D. Normann has pointed out to one of the authors) it is not hard to see that the absolutely Δ^1_2 sets cannot be enlarged by programming; the same is true of meta-programming.

Postscript

All of the results presented above are illuminated, and some were anticipated, by developments in *effective* descriptive set theory. Under this heading should be listed the work of: Aczel on so-called next-quantifiers, Cenzer on monotone *vs.* nonmonotone Σ^1_1-induction, Harrington & Kechris on monotone *vs.* nonmonotone Δ^1_2-induction, Harrington on the R-transform and the first strongly admissible or nonprojectible ordinal, John on winning strategies for Σ^0_3-games, Moschovakis on the preservation of the prewellordering and other properties by game-quantifiers, and Solovay on Σ^1_1-induction and winning strategies for Σ^0_2-games. Unfortunately, most of the most relevant material was unpublished and unavailable to us while we were engaged in the work reported above. Now some of it has at last appeared in the long-awaited volume: Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland, Amsterdam 1980. See especially parts 6E and 7C.

References

[28] P. Aczel, *An introduction to inductive definitions*, in J. Barwise, ed., Handbook of Math. Logic, North Holland, Amsterdam 1977, pp. 739–782.

[29] D. Blackwell, *Borel-programmable functions*, Ann. of Probability 6 (1978), pp. 321–324.

[30] J. E. Fenstad and D. Normann, *On absolutely measurable sets*, Fund. Math. 81 (1974), pp. 91–98.

[31] P. J. Hinman, *Hierarchies in effective descriptive set theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), pp. 111–140.

[32] R. A. Lockhart, *The programming operation on sigma fields*, Doctoral Dissertation, Department of Statistics, University of California at Berkeley, 1978.

[33] D. E. Miller, *Invariant descriptive set theory and the topological approach to model theory*, Doctoral Dissertation, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, 1976.

[34] B. V. Rao, review of [29], Math. Reviews 57 (1979), pp. 80.

[35] S. E. Shreve, *Borel-approachable functions*, to appear.

DEPARTMENT OF PHILOSOPHY
PRINCETON UNIVERSITY
Princeton, New Jersey

Accepté par la Rédaction le 3. 3. 1980

Sur les classes de Baire des fonctions de deux variables

par

Zbigniew Grande (Bydgoszcz)

Résumé. Dans cet article on introduit la définition de certaines propriétés d'une famille de fonctions d'une variable réelle qui sont les propriétés bien connues d'une fonction ("être mesurable", "être de classe 1 de Baire", "être ponctuellement discontinue" et "avoir la propriété de Baire") de la même façon pour toute fonction de la famille considérée et on démontre quelques théorèmes sur les fonctions de deux variables dont les sections par rapport à l'une de deux variables ont l'une des propriétés considérées.

Dans cet article j'introduis la définition suivante:

DÉFINITION 1. Soient R l'espace des nombres réels et T un ensemble d'indices. On dit que *la famille de fonctions* f_t: $R \to R$ $(t \in T)$ *a la propriété*:

(A_1) lorsque, quels que soient le nombre $\varepsilon > 0$ et l'ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) A de mesure positive, il existe un ensemble mesurable $B \subset A$ tel que $m(B) > 0$ (m désigne la mesure de Lebesgue dans R) et $\operatorname{osc}_B f_t \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in T$;

(A_2) lorsqu'il existe pour tout ensemble fermé, non vide $A \subset R$ un point $x_0 \in A$ tel que les fonctions partielles f_t/A $(t \in T)$ sont équicontinues au point x_0; c'est-à-dire qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que $|f_t(x) - f_t(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ et pour tout $t \in T$;

(A_3) lorsque, quel que soit l'intervalle ouvert $J \subset R$, il existe un point $x_0 \in J$ auquel les fonctions f_t $(t \in T)$ sont équicontinues; et

(A_4) lorsque, quels que soient le nombre $\varepsilon > 0$ et l'ensemble $A \subset R$ ayant la propriété de Baire et étant de deuxième catégorie, il existe un ensemble $B \subset A$ de deuxième catégorie, ayant la propriété de Baire et tel que $\operatorname{osc}_B f_t \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in T$.

Je démontre ensuite quelques théorèmes sur les fonctions de deux variables dont les sections par rapport à l'une de deux variables ont l'une des propriétés (A_i) $(i = 1, 2, \ldots, 4)$. En particulier, je donne dans cet article la résolution négative du problème suivant:

PROBLÈME (Problème 2, [1]). Existe-t-il une fonction f: $X \times Y \to R$ qui n'est pas de première classe de Baire et dont les coupes f^y sont de première classe de Baire et les coupes f_x sont semi-équicontinues supérieurement? (X et Y étant ici des espaces métriques, séparables et complets).

THÉORÈME 1. *Les fonctions f_t: $R \to R$, où $t \in T$, ont la propriété* (A_1) *si et seulement s'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé $E \subset R$ tel que $m(R-E) \leqslant \varepsilon$ et si les fonctions partielles f_t/E $(t \in T)$ sont équicontinues en tout point $x \in E$.*

Démonstration. Suffisance. Soient $A \subset R$ un ensemble mesurable de mesure positive et finie et ε un nombre positif. Il existe un ensemble fermé E tel que $m(R-E) < m(A)/2$ et que les fonctions partielles f_t/E $(t \in T)$ sont équicontinues en tout point $x \in E$. Remarquons que $m(E \cap A) > 0$. Soit $x_0 \in E \cap A$ un point de densité de l'ensemble $E \cap A$. Comme les fonctions partielles f_t/E $(t \in T)$ sont équicontinues au point x_0, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, quel que soit l'indice $t \in T$, on a $|f_t(x) - f_t(x)| < \varepsilon/2$ pour tout point $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Désignons par B l'ensemble $E \cap A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ et remarquons que $B \subset A$, $m(B) > 0$ et $\operatorname{osc}_B f_t \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in T$.

Nécessité. Fixons le nombre $\varepsilon > 0$. Soit (A_{ni}) $(i, n = 1, 2, \ldots)$ une suite d'ensembles mesurables, de mesure positive, telle que

(1) $A_{ni} \cap A_{nj} = \emptyset$ lorsque $i \neq j$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

(2) $m(R - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$; et

(3) $\operatorname{osc}_{A_{ni}} f_t \leqslant 1/n$ pour tout $t \in T$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$.

Il existe pour tout ensemble A_{ni} un ensemble ouvert G_{ni} tel que $G_{ni} \supset A_{ni}$ et $m(G_{ni} - A_{ni}) < \varepsilon/4^{n+i}$. Posons

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni} - \bigcup_{n,i=1}^{\infty} (G_{ni} - A_{ni}) .$$

Remarquons que l'ensemble E est mesurable et que, d'après (2), on a

$$m(R-E) = m\Big(\bigcup_{n,i=1}^{\infty} (G_{ni} - A_{ni})\Big) \leqslant \sum_{n,i=1}^{\infty} m(G_{ni} - A_{ni}) < \sum_{n,i=1}^{\infty} \varepsilon/4^{n+i} = \varepsilon/9 < \varepsilon .$$

Fixons le point $x_0 \in E$ et le nombre $\eta > 0$. Soit un nombre naturel n_0 tel que $1/n_0 < \eta$. Comme $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}$, $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_0 i}$. Il existe donc un indice i_0 tel que $x_0 \in A_{n_0 i_0}$. Mais $E \subset R - \bigcup_{n,i=1}^{\infty} (G_{ni} - A_{ni})$, on a donc $E \cap G_{n_0 i_0} \subset A_{n_0 i_0}$. Soit un nombre $\delta > 0$ tel que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_{n_0 i_0}$. Si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$, on a d'après (3) $|f_t(x) - f_t(x_0)| < 1/n_0 < \eta$, quel que soit $t \in T$, et la démonstration est achevée.

Le théorème 1 et le théorème 3 du travail [4] entraînent le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit f: $R \times R \to R$ une fonction. Si toutes les sections $f_x(y) = f(x, y)$ ($x \in R$ étant fixé et $-\infty < y < \infty$) ont la propriété* (A_1) *et si toutes les sections $f^y(x) = f(x, y)$ ($-\infty < x < \infty$ et $y \in R$ étant fixé) sont mesurables, la fonction f est également mesurable.*

THÉORÈME 3. *Les fonctions f_t: $R \to R$ $(t \in T)$ ont la propriété* (A_4) *si et seulement s'il existe un ensemble résiduel $A \subset R$ tel que les fonctions partielles f_t/A $(t \in T)$ sont équicontinues en tout point $x \in A$.*

Démonstration. Suffisance. Soient $B \subset R$ un ensemble ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie et ε un nombre positif. Il existe un ensemble résiduel $A \subset R$ tel que les fonctions partielles f_t/A $(t \in T)$ sont équicontinues en tout point $x \in A$. Comme l'ensemble $A \cap B$ a la propriété de Baire et est de deuxième catégorie, il existe un intervalle ouvert (α, β) dans lequel l'ensemble $A \cap B$ est résiduel. Soit x_0 un point de l'ensemble $A \cap B \cap (\alpha, \beta)$. Les fonctions partielles f_t/A $(t \in T)$ étant équicontinues au point x_0, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, quel que soit l'indice $t \in T$, $|f_t(x) - f_t(x_0)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Posons $C = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\alpha, \beta) \cap A \cap B$. L'ensemble $C \subset B$ a la propriété de Baire, il est de deuxième catégorie et $\operatorname{osc}_C f_t \leqslant \varepsilon$, quel que soit l'indice $t \in T$.

Nécessité. Il existe pour tout nombre naturel n, deux suites (A_{ni}) et (U_{ni}), $i = 1, 2, \ldots$, telles que:

(1) U_{ni} est un intervalle ouvert d'extrémités rationnelles;

(2) $U_{ni} \neq U_{nj}$ pour $i \neq j$;

(3) $A_{ni} \subset U_{ni}$ et A_{ni} est résiduel dans U_{ni} pour $i = 1, 2, \ldots$;

(4) $\operatorname{osc}_{A_{ni}} f_t \leqslant 1/n$ pour $i = 1, 2, \ldots$, quel que soit l'indice $t \in T$; et

(5) $R - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}$ est un ensemble de première catégorie.

Désignons par A l'ensemble $\big(R - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_{ni} - A_{ni})\big) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}$. On vérifie facilement que l'ensemble A est résiduel. Démontrons encore que les fonctions partielles f_t/A $(t \in T)$ sont équicontinues en tout point de l'ensemble A. Dans ce but fixons le point $x_0 \in A$ et le nombre $\varepsilon > 0$. Soit n_0 un nombre naturel tel que $1/n_0 < \varepsilon$. Il existe un indice i_0 tel que $x_0 \in A_{n_0 i_0}$ et un nombre $\delta > 0$ tel que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U_{n_0 i_0}$. Remarquons que, quel que soit $t \in T$, on a

$$|f_t(x) - f_t(x_0)| \leqslant 1/n_0 < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) ,$$

et la démonstration est ainsi achevée.

Du théorème 3 et du théorème 4 du travail [4] résulte le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soit f: $R \times R \to R$ une fonction. Si toutes les sections f_x ont la propriété* (A_4) *et toutes les sections f^y ont la propriété de Baire, la fonction f a également la propriété de Baire.*

THÉORÈME 5. *Soit f: $R \times R \to R$ une fonction. Si toutes les sections f_x ont la propriété* (A_3) *et toutes les sections f^y sont ponctuellement discontinues, la fonction f est également ponctuellement discontinue.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g: $R \times R \to R$ ponctuellement discontinue et telle que

$|f(x,y)-g(x,y)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $(x,y)\in R\times R$. Fixons donc le nombre $\varepsilon>0$. Soit I_1 un intervalle ouvert d'extrémités rationnelles tel que $\operatorname{osc}_{I_1} f_x\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in R$. Soit $\alpha>1$ un nombre ordinal dénombrable tel que, quel que soit le nombre ordinal $\beta<\alpha$, on ait déjà défini l'intervalle ouvert I_β d'extrémités rationnelles tel que $\operatorname{osc}_{I_\beta} f_x\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in R$ et $I_\beta\cap I_\gamma=\emptyset$ pour $\gamma<\beta$. Si l'ensemble $R-\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ est de deuxième catégorie, il existe un intervalle ouvert $U\subset R-\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ et par conséquent un point $x_0\in U$ auquel les fonctions f_x $(x\in R)$ sont équicontinues. Il existe donc un intervalle ouvert $I_\alpha\subset U$ d'extrémités rationnelles contenant x_0 et tel que $\operatorname{osc}_{I_\alpha} f_x\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in R$. Évidemment $I_\alpha\cap I_\beta=\emptyset$ pour tout $\beta<\alpha$. Fixons dans tout intervalle I_α un point $y_\alpha\in I_\alpha$ et posons

$$g(x,y_\alpha)=\begin{cases} f(x,y_\alpha) & \text{lorsque } y\in I_\alpha\,,\\ f(x,y) & \text{lorsque } y\notin\bigcup_\alpha I_\alpha\,.\end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction g est ponctuellement discontinue et que

$$|f(x,y)-g(x,y)|\leqslant\varepsilon\quad\text{pour tout point } (x,y)\in R\times R\,.$$

THÉORÈME 6. *Soit $f\colon R\times R\to R$ une fonction. Si les sections f_x $(x\in R)$ ont la propriété* (A_2) *et toutes les sections f^y sont de classe ξ de Baire, où $\xi>0$, la fonction f est également de classe ξ de Baire.*

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon>0$ une fonction $g\colon R\times R\to R$ de classe ξ et telle que

$$|f(x,y)-g(x,y)|\leqslant\varepsilon\quad\text{pour tout point } (x,y)\in R\times R\,.$$

Fixons le nombre $\varepsilon>0$ et rangeons tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles en une suite $J_1,J_2,\ldots$ telle que $J_k\neq J_l$ pour $j\neq l$. Les fonctions f_x $(x\in R)$ étant équicontinues en un certain point x_1, il existe un intervalle $J^1\in\{J_i\}_{i=1}^\infty$ tel que $\operatorname{osc}_{J^1} f_x\leqslant\varepsilon/2$ pour tout $x\in R$. Fixons le nombre ordinal $\alpha>1$ et supposons que, quel que soit le nombre ordinal $\beta<\alpha$, il existe un intervalle $J^\beta\in\{J_i\}$ tel que $\operatorname{osc}_{J^\beta-\bigcup_{\gamma<\beta}J^\gamma} f_x\leqslant\varepsilon/2$ pour tout $x\in R$. Si $R-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta\neq\emptyset$, il existe un point $y_\alpha\in R-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta$ auquel les fonctions partielles $f_x/(R-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta)$ sont équicontinues. Par conséquent il existe un intervalle ouvert $J^\alpha\in\{J_i\}_{i=1}^\infty$ tel que $y_\alpha\in J^\alpha$ et $\operatorname{osc}_{J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta} f_x\leqslant\varepsilon/2$ pour tout $x\in R$. Remarquons que la famille $\{J^\alpha\}$ est dénombrable et fixons le point $t^\alpha\in J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta$ dans chacun des ensembles $J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta$. Posons

$$g(x,y)=f(x,t_\alpha)\quad\text{lorsque}\quad y\in J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta$$

et remarquons que, quel que soit le point $(x,y)\in R\times R$, on a

$$|f(x,y)-g(x,y)|=|f(x,y)-f(x,t_\alpha)|\leqslant\varepsilon/2\,,$$

puisque $y,t_\alpha\in J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta$ et $\operatorname{osc}_{J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta} f_x\leqslant\varepsilon/2$. Reste à prouver que la fonction g est de classe ξ de Baire. Dans ce but il suffit de remarquer que, quel que soit le nombre réel a, on a pour un nombre ordinal $\gamma<\Omega$

$$\{(x,y)\colon g(x,y)<a\}=\bigcup_{\alpha<\gamma}(\{x\colon f(x,t_\alpha)<a\}\times[J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta])$$

et

$$\{(x,y)\colon g(x,y)>a\}=\bigcup_{\alpha<\gamma}(\{x\colon f(x,t_\alpha)>a\}\times[J^\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}J^\beta])\,.$$

Remarque 1. On voit sans peine qu'on peut généraliser les théorèmes 3—6 (en appliquant les mêmes méthodes) au cas où les fonctions f_t et f seront définies respectivement sur un espace métrique, séparable, complet X ou sur le produit cartésien $X\times Y$ de deux espaces métriques, séparables, complets.

Remarque 2. Il existe une fonction $f\colon R\times R\to R$ non mesurable, n'ayant pas la propriété de Baire et telle que toutes ses sections f^y sont semicontinues supérieurement et sont discontinues au plus en un point et quel que soit l'ensemble fermé, non vide $A\subset R$, il existe un point $y\in A$ tel que toutes les fonctions partielles f_x/A $(x\in R)$ sont continues au point y.

Démonstration. Soient $A,B\subset R$ des ensembles totalement imparfaits tels que $R=A\cup B$ et $A\cap B=\emptyset$ ([3], p. 421–422). En modifiant un peu la méthode utilisée par Sierpiński dans son article [5], on démontre l'existence d'un ensemble plan $C\subset R\times A$ non mesurable, n'ayant pas la propriété de Baire et tel que tous les ensembles $C_x=\{y\colon (x,y)\in C\}$ et $C^y=\{x\colon (x,y)\in C\}$ sont vides ou ne contiennent qu'un élément au plus. En effet, rangeons tous les ensembles plans fermés dont les projections parallèles à l'axe des abscisses, respectivement à l'axe des ordonnées, ont la puissance du continu, en une suite transfinie

$$C_1,C_2,\ldots,C_\alpha,\ldots,\qquad\alpha<\Omega\,,$$

où Ω désigne le plus petit nombre ordinal de la puissance du continu. Soit (x_1,y_1) un point de l'ensemble $C_1\cap(R\times A)$. Étant donné un nombre ordinal $\alpha>1$, supposons que, quel que soit le nombre ordinal $\beta<\alpha$, on ait déjà défini un point $(x_\beta,y_\beta)\in C_\beta\cap(R\times A)$ tel que $x_\beta\neq x_\gamma$ et $y_\beta\neq y_\gamma$ pour $\gamma<\beta$. Comme l'ensemble

$$D_\alpha=C_\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}[\{(x_\beta,y)\colon y\in R\}\cup\{(x,y_\beta)\colon x\in R\}]$$

n'est pas vide, il existe un point $(x_\alpha,y_\alpha)\in D_\alpha$. L'ensemble $C=\{(x_\alpha,y_\alpha)\colon\alpha<\Omega\}$ satisfait aux conditions demandées et la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{lorsque } (x,y)\in C\,,\\ 0 & \text{lorsque } (x,y)\in(R\times R)-C\end{cases}$$

a également toutes les propriétés exigées.

DÉFINITION 2. On dit que les fonctions f_t: $R \to R$ ($t \in T$ et T désignant un ensemble d'indices) sont *semi-équicontinues supérieurement au point* $x_0 \in R$ lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que, quel que soit l'indice $t \in T$, on a

$$f_t(x) - f_t(x_0) < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

THÉORÈME 7. *Si les fonctions f_t: $R \to R$ ($t \in T$) sont semi-équicontinues supérieurement en chaque point x et uniformément bornées, elles ont la propriété* (A_2).

Démonstration. Admettons, au contraire, qu'il existe des fonctions f_t: $R \to R$ ($t \in T$) semi-équicontinues supérieurement en tout point x et n'ayant pas la propriété (A_2). Il existe donc un ensemble non vide, parfait $A \subset R$ tel que les fonctions partielles f_t/A ($t \in T$) ne sont équicontinues en aucun point $x \in A$. Par conséquent, il existe pour tout point $x \in A$ un nombre $\varepsilon(x) > 0$ tel que, quel que soit le nombre $\delta > 0$, il existe un indice $t = t(\delta) \in T$ et un point $x_1 \in A$ tels que $|x - x_1| < \delta$ et $|f_t(x_1) - f_t(x)| > \varepsilon(x)$. Cela signifie qu'il existe pour tout $x \in A$ et pour tout nombre $\delta > 0$ un indice $t \in T$ et un intervalle fermé $I(\delta, x)$ d'extrémités rationnelles et un point $x_1 \in A$ tels que $m(I(\delta, x)) > \varepsilon(x)$ et $|x - x_1| < \delta$ et $I(\delta, x) \subset (f_t(x), f_t(x_1))$. Comme les fonctions f_t ($t \in T$) sont uniformément bornées, l'ensemble de toutes les extrémités gauches des intervalles $I(1/n, x)$ contient une sous-suite infinie convergente. En désignant par $I(1/n_k, x)$ les intervalles dont les extrémités gauches composent cette sous-suite convergente, la suite de leurs extrémités droites contient également une autre sous-suite convergente.

Il en résulte qu'il existe pour tout point $x \in A$ un intervalle fermé $J(x) = [\alpha(x), \beta(x)]$ ($-\infty < \alpha(x) < \beta(x) < \infty$) d'extrémités rationnelles tel qu'il existe pour tout n un indice $t_n \in T$ et un point $x_n \in A$ tels que (1) $|x - x_n| < 1/n$ et (2) $f_{t_n}(x) - \beta(x) > m(J(x))$ et $\alpha(x) - f_{t_n}(x_n) > m(J(x))$ ou $\alpha(x) - f_{t_n}(x) > m(J(x))$ et $f_{t_n}(x_n) - \beta(x) > m(J(x))$. Les fonctions f_t étant semi-équicontinues supérieurement, il existe pour tout $x \in A$ un nombre naturel $n(x)$ tel que $f_{t_n}(x) - \beta(x) > m(J(x))$ pour tout $n \geqslant n(x)$. Remarquons également qu'il existe un ensemble

$$B = \{x \in A\colon J(x) = J = [\alpha, \beta] \text{ et } n(x) = n_0\}$$

qui est de deuxième catégorie dans l'ensemble A. Soit L_1 un intervalle ouvert tel que $m(L_1) < 1$ et que l'ensemble $L \cap B$ est de deuxième catégorie dans A, quel que soit l'intervalle ouvert $L \subset L_1$ pour lequel $L \cap A \neq \emptyset$. Fixons le point $z \in L_1 \cap B$. Il existe un point $z_1 \in L_1 \cap A$ et un indice $s_1 \in T$ tels que $f_{s_1}(z_1) < \alpha$ et $f_{s_1}(z) > \beta$. La fonction f_{s_1} étant semi-continue supérieurement au point z_1, il existe un intervalle fermé K_1 contenant z_1 dans son intérieur et tel que $K_1 \subset L_1$ et $f_{s_1}(x) < \alpha$ pour tout $x \in K_1$. Comme l'ensemble $K_1 \cap B$ est de deuxième catégorie dans l'ensemble A, on démontre d'une façon analogue l'existence d'un intervalle fermé $K_2 \subset K_1$, d'un indice $s_2 \in T$ et d'un point $x_2 \in A$ tels que $m(K_2) < 1/2$, l'ensemble $K_2 \cap B$ est de deuxième catégorie dans A, $f_{s_2}(x) < \alpha$ pour tout $x \in K_2$ et $f_{s_2}(x_2) > \beta$ et $\varrho(x_2, K_2) = \inf_{x \in K_2} |x - x_2| < 1/2$. En général, répétant ce procédé n fois, on obtient un intervalle fermé $K_n \subset K_{n-1}$, un indice $s_n \in T$ et un point $x_n \in A$ tels que $m(K_n) < 1/n$, l'ensemble $K_n \cap B$ est de deuxième catégorie dans l'ensemble A, $f_{s_n}(x) < \alpha$ pour tout $x \in K_n$ et $f_{s_n}(x_n) > \beta$ et $\varrho(x_n, K_n) < 1/n$. Soit p le point appartenant à tous les intervalles K_n, $n = 1, 2, \ldots$ Évidemment $p \in A$. Les fonctions f_t ($t \in T$) étant semi-équicontinues supérieurement au point p, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, quel que soit l'indice $t \in T$, on a

$$f_t(x) - f_t(p) < m(J)/4 \quad \text{pour tout } x \in (p - \delta, p + \delta).$$

D'autre part, il existe un nombre naturel n tel que $2/n < \delta$. Comme $p \in K_n$ et $\varrho(x_n, K_n) < 1/n$, on a donc $|p - x_n| \leqslant 2/n < \delta$, d'où il vient $f_{s_n}(x_n) - f_{s_n}(p) < m(J)/4$, en contradiction avec les inégalités

$$f_{s_n}(p) < \alpha \quad \text{et} \quad f_{s_n}(x_n) > \beta$$

et notre théorème est démontré.

Des théorèmes 6 et 7 résulte le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Soit f: $R \times R \to R$ une fonction. Si toutes les sections f_x sont semi-équicontinues supérieurement en tout point $y \in R$ et toutes les sections f^y sont de classe ξ de Baire ($\xi \geqslant 1$), la fonction f est de classe ξ de Baire.*

Remarque 3. On voit sans peine que l'on peut généraliser les théorèmes 7 et 8 au cas où les fonctions f_t ($t \in T$) et f seront définies sur un espace métrique, séparable, complet X, respectivement sur le produit cartésien $X \times Y$ de deux espaces métriques, séparables et complets.

PROBLÈME. Les fonctions f_t: $R \to R$ ($t \in T$ et T étant un ensemble d'indices) étant approximativement équicontinues (voir [2]) en tout point $x \in R$, ont-elles nécessairement la propriété (A_2)?

Bibliographie

[1] Z. Grande et S. Stawikowska, *La semicontinuité et la propriété de Baire*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), pp. 48–52.
[2] — *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$*, Dissertationes Math. 159 (1978), pp. 45.
[3] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.
[4] E. Marczewski, et Cz. Ryll-Nardzewski, *Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables*, Annal. Soc. Polon. Math. 25 (1953), pp. 145–154.
[5] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. 1 (1920), pp. 112–115.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W BYDGOSZCZY

Accepté par la Rédaction le 3. 3. 1980