Convergence diffuse d'une suite de fonctions

par

Jean Saint Raymond (Paris)

Abstract. The result we prove here is somewhat stronger than the following: "Let (f_n) be a sequence of continuous functions on $[0, 1]$. Then the sequence of integrals $\left(\int f_n(t)\,d\sigma(t)\right)$ converges for every atomless measure σ on $[0, 1]$ if and only if the sequence (f_n) is uniformly bounded and every subsequence from (f_n) contains a pointwise converging subsequence".

Le point de départ de cette étude est la constatation que la suite des fonctions de Rademacher sur $[0, 1]$, bien qu'elle converge faiblement vers 0 dans l'espace L^1 associé à la mesure de Lebesgue, ne converge pas faiblement vers 0 dans l'espace L^1 associé à n'importe quelle mesure diffuse.

On a donc cherché à quelles conditions une suite (f_n) de fonctions continues sur un compact K converge faiblement vers 0 dans $L^1(\sigma)$ pour toute mesure diffuse σ sur K, ou ce qui revient au même, à quelles conditions $(\int f_n\,d\sigma)$ converge vers 0 pour toute probabilité diffuse σ. Le résultat essentiel est alors qu'une sous-suite de (f_n) converge vers 0 en dehors d'un ensemble dénombrable.

Plus généralement, on considère dans toute la suite un compact métrisable K et une face F du convexe des mesures de probabilité $\mathscr{M}^1(K)$ sur K, dont on suppose qu'elle est un G_δ pour la topologie vague, et on cherche des conditions nécessaires et suffisantes sur une suite (f_n) de fonctions continues sur K pour que $\int f_n\,d\sigma$ converge pour tout σ de F.

Definition 1. On dira qu'une partie A de K est *F-négligeable* si elle est négligeable pour toute mesure σ de F. On notera $\mathscr{N}$ la famille des boréliens F-négligeables de K.

Definition 2. On appelle *support* de F le complémentaire du plus grand ouvert F-négligeable, c'est-à-dire le plus petit fermé portant toutes les mesures de F.

Dans le cas où F est la famille des mesures de probabilité diffuses sur K, qui est une face vaguement G_δ, le support de F est le noyau parfait de K, et les boréliens F-négligeables sont les parties dénombrables de K.

La démonstration suivante est laissée au lecteur.

Lemme 3. *La face F s'identifie à une face vaguement G_δ dense de $\mathscr{M}^1(K_0)$, où K_0 est le support de F.*

On peut ainsi, en considérant les restrictions à K_0 des fonctions (f_n) se ramener au cas où F est vaguement G_δ dense dans $\mathcal{M}^1(K)$.

Lemme 4. *L'espace vectoriel V engendré par F est normiquement fermé dans l'espace $\mathcal{M}(K)$ des mesures de Radon sur K.*

Démonstration. Puisque F est une face de $\mathcal{M}^1(K)$, la trace de V sur le cône $\mathcal{M}(K)$ des mesures positives sur K est le cône engendré par F. Puisque F est vaguement G_δ, F est un G_δ normique.

L'application $\mu \to \mu/\|\mu\|$ est normiquement continue sur $\mathcal{M}(K)\setminus\{0\}$. Donc

$$V \cap \mathcal{M}^+(K)-\{0\} = \left\{\mu \mid \frac{\mu}{\|\mu\|} \in F\right\}$$

est un G_δ normique dans $\mathcal{M}(K)\setminus\{0\}$, de même que $V \cap \mathcal{M}^+(K)$ dans $\mathcal{M}(K)$. Puisque V est l'ensemble des mesures telles que μ^+ et μ^- soient dans $V \cap \mathcal{M}^+(K)$, et que les applications $\mu \to \mu^+$ et $\mu \to \mu^-$ sont normiquement continues, V est un G_δ pour la norme. Mais comme V est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach $\mathcal{M}(K)$, ceci entraîne que V est fermé en norme, d'après le théorème de Baire.

Definition 5. On appellera *topologie diffuse sur $C(K)$* la topologie faible associée à la dualité avec l'espace V engendré par F. On dira qu'une *suite (f_n) converge diffusément* si elle converge pour cette topologie; bien sûr cette convergence dépend de F, qu'on a supposé fixé une fois pour toute.

Cette topologie est séparée si et seulement si K est le support de F.

Proposition 6. *Si Z est une partie diffusément bornée de $C(K)$, Z est uniformément bornée sur le support de F.*

Comme on l'a indiqué plus haut, on peut se ramener au cas où F est vaguement dense, c'est-à-dire où K est le support de F. Alors la quantité:

$$\psi(\sigma) = \sup_{f\in Z} \left|\int f\,d\sigma\right|$$

est une semi-norme s.c.i. sur l'espace de Banach V, donc majorée par un multiple de la norme. En particulier, il existe M tel que

$$\forall \sigma \in F \ \forall f \in Z \quad \left|\int f\,d\sigma\right| \leqslant M .$$

Et comme F est dense dans $\mathcal{M}^1(K)$, ceci est valable pour tout élément de $\mathcal{M}^1(K)$, donc en particulier toute mesure de Dirac. Donc

$$\forall x \in K \ \forall f \in Z \quad |f(x)| \leqslant M .$$

On va maintenant prouver le théorème suivant:

Theoreme 7. *Si la suite (f_n) converge diffusément vers 0, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge vers 0 en dehors d'une partie F-négligeable.*

Nous aurons besoin, pour démontrer ce théorème, d'utiliser le lemme suivant:

Lemme 8. *Soient (f_n) une suite convergeant diffusément vers 0 et $\varepsilon>0$. Il existe une partie M, F-négligeable, de K et une partie infinie H de N telles que*

$$\forall x \in K\setminus M \ \lim_{n\in H}\sup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \varepsilon .$$

Démonstration du lemme. Désignons par O l'ensemble des couples (U, H) formés d'un ouvert U de K et d'une partie infinie H de N tels que l'ensemble $\{x \in U \mid \lim_{n\in H}\sup_{n\to\infty} f_n(x)>\varepsilon\}$ soit F-négligeable, ordonné par la relation d'ordre:

$$(U, H) \prec (U', H') \text{ si } [(U\subset U') \text{ et } (H'\setminus H \text{ est fini}) \text{ et } (H' = H \text{ où } U' \neq U)] .$$

Il va de soi que O n'est pas vide puisque il contient $(\emptyset, N)$ et que l'énoncé du lemme est équivalent à l'existence d'un couple (K, H) dans O. Nous allons prouver que O est inductif, et qu'un élément maximal (U, H) est nécessairement obtenu avec $U = K$.

Soit $(U_i, H_i)_{i\in I}$ une chaine dans O, et notons V la réunion des $(U_i)_{i\in I}$. S'il existe un $i_0 \in I$ tel que $V = U_{i_0}$, (U_{i_0}, H_{i_0}) est le plus grand élément de la chaîne. Sinon, il existe, en vertu du théorème de Lindelöf, une suite croissante (i_n) telle que $V = \bigcup_n U_{i_n}$. On en conclut que (i_n) est cofinal dans I. Il existe, d'après le lemme diagonal de Cantor, une partie infinie H de N telle que pour tout entier n, $H\setminus H_{i_n}$ soit fini.

Alors (V, H) appartient à O puisque $\mathcal{N}$ est un σ-idéal, et il majore tout élément de la chaîne.

Soit maintenant (U, H) un élément maximal de O. Nous prouvons que l'hypothèse $K_1 = K\setminus U \neq \emptyset$ amène une contradiction, et plus précisément, que l'ensemble des mesures σ de $F \cap \mathcal{M}^1(K_1)$ telles que

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\sigma \geqslant \varepsilon$$

est un résiduel du compact $\mathcal{M}^1(K_1)$, contrairement à l'hypothèse de convergence diffuse de (f_n) vers 0.

Montrons d'abord que $F \cap \mathcal{M}^1(K_1)$, qui est un G_δ de $\mathcal{M}^1(K_1)$ est dense dans $\mathcal{M}^1(K_1)$. En effet, $F \cap \mathcal{M}^1(K_1)$ est une face de $\mathcal{M}^1(K_1)$ et son adhérence est une face fermée, c'est-à-dire l'ensemble des probabilités portées par un fermé T de K_1. Si $F \cap \mathcal{M}^1(K_1)$ n'était pas dense dans $\mathcal{M}^1(K_1)$, T serait distinct de K_1, et l'ouvert $K_1\setminus T$ de K_1 serait F-négligeable. Le couple $(K\setminus T, H)$ majorerait alors strictement $(U, H) = (K-K_1, H)$ dans O, contrairement à la maximalité de (U, H).

Pour prouver que l'ensemble $\{\sigma \in \mathcal{M}^1(K_1) \mid \limsup_{n\to\infty} \left|\int f_n\,d\sigma\right| \geqslant \varepsilon\}$ est un résiduel, il suffit de montrer que, pour tout entier p, l'ouvert vague

$$W_p = \bigcup_{n\geqslant p} \left\{\sigma \in \mathcal{M}^1(K_1) \mid \int f_p\,d\sigma > \varepsilon\right\}$$

est partout dense dans $\mathcal{M}^1(K_1)$. Soit donc W un ouvert vague non vide de $\mathcal{M}^1(K_1)$. Il existe dans W une mesure discrète $\tau = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ avec $\alpha_i \geqslant 0$ et $\sum_{1}^{m} \alpha_i = 1$.

Il existe alors des voisinages $V_1, \ldots, V_m$ de $x_1, \ldots, x_m$ dans K_1 tels que

$$(y_1, \ldots, y_m) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{y_i} \in W .$$

L'hypothèse de maximalité de (U, H) entraîne que pour tout ouvert non vide V de K_1 et toute partie infinie H' de H, $(U \cup V, H') \notin O$, donc qu'il existe un point y de V tel que

$$\lim_{n \in H'} \sup_{n \to \infty} f_n(y) > \varepsilon$$

donc aussi une partie infinie H_1 de H' telle que

$$\forall n \in H_1 \quad f_n(y) > \varepsilon .$$

On peut donc construire inductivement des points $y_1, \ldots, y_m$ dans $V_1, \ldots, V_m$, et des parties infinies $H_1, \ldots, H_m$ de H tels que

$$H_m \subset H_{m-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H ,$$

$$\forall n \in H_i \quad f_n(y_i) > \varepsilon .$$

Pour ces points $y_1, \ldots, y_m$, et un entier $n \geqslant p$ choisi dans H_m, on a donc

$$\sigma = \sum_{1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{y_i} \in W ,$$

$$\int f_n d\sigma > \sum_{1}^{m} \alpha_i \varepsilon = \varepsilon ,$$

c'est-à-dire $\sigma \in W \cap W_p$.

Ceci montre que W_p est partout dense dans $\mathcal{M}^1(K_1)$, donc que $\bigcap_p W_p$ est un résiduel de $\mathcal{M}^1(K_1)$, de même que $F \cap (\bigcap_p W_p)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème 7. En appliquant le lemme précédent alternativement à la suite (f_n) et à la suite $(-f_n)$, on peut trouver une suite décroissante (H_k) de parties infinies de N et une suite M_k de boréliens F-négligeables telles que

$$\forall x \in K \setminus M_k \quad \lim_{n \in H_k} \sup_{n \to \infty} (-1)^k f_n(x) \leqslant 2^{-k} .$$

Alors $M = \bigcup_k M_k$ est un borélien F-négligeable. Par ailleurs, en vertu du lemme diagonal de Cantor, il existe une partie infinie H de N telle que pour tout entier k, $H \setminus H_k$ soit fini. On vérifie alors que

$$\forall x \in K \setminus M \quad \lim_{n \in H, n \to \infty} f_n(x) = 0 .$$

THEOREME 9. *Pour qu'une suite (f_n) de fonctions continues sur K converge diffusément vers 0, il faut et il suffit qu'elle soit uniformément bornée sur le support de F et que toute sous-suite de (f_n) contienne une sous-suite qui converge F-presque partout vers 0.*

La partie directe du théorème résulte de la proposition 6 et du théorème 7 appliqué aux sous-suites de (f_n). Inversement, si (f_n) ne converge pas diffusément vers 0, il existe $\sigma \in F$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int f_n d\sigma \right| > \varepsilon .$$

Si on pose alors $H = \{n \in N \mid |\int f_n d\sigma| > \varepsilon\}$, H est infini. Si une sous-suite $(f_n)_{n \in H'}$ de la suite $(f_n)_{n \in H}$ convergeait F-presque partout, elle convergerait σ-presque partout, et si la suite (f_n) est uniformément bornée sur le support de F, elle est uniformément bornée sur le support de σ. Il résulterait alors du théorème de Lebesgue que $\lim_{n \in H', n \to \infty} \int f_n d\sigma = 0$ alors que $|\int f_n d\sigma| > \varepsilon$ pour tout n de H'.

COROLLAIRE 10. *Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions continues sur K; si, pour tout n, $|g_n| \leqslant |f_n|$ et si (f_n) converge diffusément vers 0, il en est de même de (g_n).*

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent.

On s'intéresse maintenant aux suites de Cauchy pour la topologie diffuse. La proposition 6 montre qu'une telle suite est nécessairement uniformément bornée sur le support de F. De plus, si (f_n) est une telle suite, on peut définir sur F une fonction φ par:

$$\forall \sigma \in F \quad \varphi(\sigma) = \lim \int f_n d\sigma$$

qui est définie puisque pour tout σ la suite numérique de Cauchy $(\int f_n d\sigma)$ est convergente. On constate alors que φ est de première classe sur F, et affine.

THEOREME 11. *Soit φ une fonction affine de première classe de Baire sur F. Il existe alors une fonction bornée h sur K de première classe telle que*

$$\forall \sigma \in F \quad \varphi(\sigma) = \int_K h \, d\sigma .$$

Un théorème de G. Mokobodzki [1] affirme sous des conditions moins restrictives sur F l'existence d'une fonction borélienne h telle que $\varphi(\sigma) = \int h d\sigma$, mais sans pouvoir préciser la classe de Baire de h. C'est pourquoi nous donnons une démonstration de ce théorème. Nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant.

LEMME 12. *Soient φ une fonction affine de première classe sur F et $\varepsilon > 0$. Il existe alors une fonction de première classe h_ε sur K telle que*

$$\forall \sigma \in F \quad \left| \varphi(\sigma) - \int h_\varepsilon d\sigma \right| \leqslant \varepsilon .$$

Soit O l'ensemble des ouverts U de K sur lesquels existe une fonction de première classe g vérifiant

$$\forall \sigma \in F \cap \mathcal{M}^1(U) \quad \left| \varphi(\sigma) - \int g \, d\sigma \right| \leqslant \varepsilon .$$

Soit U la réunion de tous les éléments de O. Il existe une suite (U_n) d'éléments de O de réunion U, une suite (g_n) de fonctions de première classe définies sur les U_n telles que

$$\forall\sigma\in F\cap \mathscr{M}^1(U_n)\quad |\varphi(\sigma)-\int g_n d\sigma|\leqslant\varepsilon .$$

Soit ψ_n une partition de l'unité localement finie sur U subordonnée au recouvrement (U_n), et posons, pour $\sigma\in F\cap\mathscr{M}^1(U)$.

$$g=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n g_n ,$$
$$\alpha_n=\int\psi_n d\sigma ,$$
$$\sigma_n=(1/\alpha_n)\psi_n\sigma .$$

La fonction g est de première classe sur U, les (α_n) sont positifs et de somme 1, les σ_n sont dans $F\cap\mathscr{M}^1(U_n)$ puisque F est une face de $\mathscr{M}^1(K)$, et

$$\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sigma_n .$$

La fonction φ se prolonge en une fonction linéaire $\tilde{\varphi}$ sur V, l'espace engendré par F, de première classe pour la norme puisque

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\|\tau^+\|\varphi\left(\frac{\tau^+}{\|\tau^+\|}\right)-\|\tau^-\|\varphi\left(\frac{\tau^-}{\|\tau^-\|}\right).$$

Puisque V est un espace de Banach, $\tilde{\varphi}$ est continue donc bornée sur F, et dénombrablement additive. On a donc

$$\varphi(\sigma)=\sum_0\alpha_n\varphi(\sigma_n)$$

et

$$\begin{aligned}|\varphi(\sigma)-\int g\,d\sigma| &= |\sum_0^{\infty}\alpha_n\varphi(\sigma_n)-\sum_0^{\infty}\alpha_n\int g_n d\sigma_n|\\ &\leqslant\sum_0^{\infty}\alpha_n|\varphi(\sigma_n)-\int g_n d\sigma_n|\leqslant\sum_0\alpha_n\varepsilon\\ &\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui prouve que U appartient à O, dont il est le plus grand élément.

Pour prouver le lemme, il faut montrer que $U=K$. Si $K_1=K\setminus U\neq\emptyset$, il existe une mesure σ de F telle que $\sigma(K_1)\neq\emptyset$; sinon la fonction h_ε obtenue en prolongeant g par 0 sur K_1 est de première classe et satisfait les conditions du lemme. La mesure $\sigma'=\sigma|K_1/\sigma(K_1)$ appartient alors à $F\cap\mathscr{M}^1(K_1)$ puisque F est une face, et ceci prouve que $F\cap\mathscr{M}^1(K_1)$ est un fermé non vide de F. La restriction à ce fermé de φ possède un point de continuité τ.

Soient donc $\eta>0$, $\varrho_1,\ldots,\varrho_m\in C(K)$ tels que en désignant par Ω l'ouvert vague défini par

$$\{\sigma|\ |\int\varrho_j d\sigma-\int\varrho_j d\tau|<\eta,\ j=1,2,\ldots,m\}$$

on ait

$$\sigma\in\Omega\cap F\cap\mathscr{M}^1(K_1)\ \Rightarrow\ |\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

En utilisant l'uniforme continuité des ϱ_j, il existe un recouvrement ouvert fini $(W_1,\ldots,W_k)$ de K et une partition de l'unité (ψ_i) subordonnée à ce recouvrement tels que, pour tout i,

$$(x\in W_i,\ y\in W_i)\ \Rightarrow\ \sup_j|\varrho_j(x)-\varrho_j(y)|<\eta .$$

Posons

$$\alpha_i=\int\psi_i d\tau ,$$
$$\tau_i=\frac{1}{\alpha_i}\psi_i\tau\in F\cap\mathscr{M}^1(W_i\cap K_1) .$$

Les α_i sont positifs de somme 1, et $\tau=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\tau_i$. Si on définit

$$\delta_i=\sup\{\varphi(\sigma)-\varphi(\sigma')|\ \sigma,\sigma'\in F\cap\mathscr{M}^1(W_i\cap K_1)\}$$

on voit, en utilisant que φ est affine et que

$$(\forall i=1,2,\ldots,k,\ \sigma_i\in F\cap\mathscr{M}^1(W_i\cap K_1))\ \Rightarrow\ (\sum\alpha_i\sigma_i\in\Omega) ,$$

l'on obtient

$$\sum_1^k\alpha_i\delta_i\leqslant\sup\{\varphi(\sigma)-\varphi(\sigma')|\ \sigma,\sigma'\in\Omega\cap F\cap\mathscr{M}^1(K_1)\}\leqslant\tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon . \tag{1}$$

Cette inégalité prouve l'existence d'un indice p tel que $\alpha_p>0$ et $\delta_p\leqslant\varepsilon$.

Si l'on prolonge la fonction g définie sur U par la constante $\varphi(\tau_p)$ sur $W_p\cap K_1$, on obtient une fonction g' de première classe sur $U'=U\cup W_p\neq U$ car $\alpha_p=\int\psi_p d\tau>0$. On a, pour toute mesure σ de $F\cap\mathscr{M}^1(W_p\cap K_1)$

$$|\varphi(\sigma)-\int g' d\sigma|=|\varphi(\sigma)-\varphi(\tau_p)|\leqslant\delta_p\leqslant\varepsilon$$

d'où, puisque F est une face, et que φ est affine

$$\forall\sigma\in F\cap\mathscr{M}^1(U')\quad|\varphi(\sigma)-\int g' d\sigma|\leqslant\varepsilon .$$

Ceci prouve que U n'était pas le plus grand élément de O, donc que l'hypothèse $K_1\neq\emptyset$ était absurde. Le lemme est donc prouvé.

Démonstration du théorème 11. Soit φ une fonction affine de première classe sur F. Il existe d'après le lemme précédent une suite (g_n) de fonctions de première classe g_n telles que

$$\forall n\in N\ \forall\sigma\in F\quad|\varphi(\sigma)-\int g_n d\sigma|\leqslant 2^{-n} .$$

Il en résulte que

$$\forall \sigma \in F \quad |\int (g_{n+1}-g_n)d\sigma| < 2^{1-n}.$$

Si l'ensemble $A_n = \{x \in K|\ |(g_{n+1}-g_n)(x)| > 2^{1-n}\}$ n'était pas F-négligeable, il existerait $\sigma \in F$ tel que $\sigma(A_n) > 0$, donc $\tau \leqslant \sigma$, $\tau \neq 0$ tel que $g_{n+1}-g_n > 2^{1-n}$ τ-presque partout (ou $g_n - g_{n+1} > 2^{1-n}$). Alors $\frac{\tau}{\|\tau\|} \in F$ et

$$\left|\int (g_{n+1}-g_n)d\frac{\tau}{\|\tau\|}\right| > 2^{1-n},$$

contrairement à ce qui précède. On définit alors

$$h_0 = g_0,$$
$$\forall n \geqslant 0, \quad h_{n+1} = \sup(-2^{1-n}, \inf(2^{2-n}, g_{n+1}-g_n)).$$

La série h_n converge uniformément vers une fonction de première classe h, et puisque

$$\forall n \in N\ \forall \sigma \in F \quad \int h_{n+1}d\sigma = \int (g_{n+1}-g_n)d\sigma$$

on a

$$\int h d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\sigma = \varphi(\sigma)$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 13. *Si (f_n) est une suite de Cauchy pour la topologie diffuse, il existe une suite bornée (g_n) de fonctions continues sur K qui converge simplement sur K et telle que la suite $(f_n - g_n)$ converge diffusément vers* 0.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe une fonction de première classe h sur K telle que:

$$\forall \sigma \in F \quad \int f_n d\sigma \to \int h d\sigma.$$

Si (g_n) est une suite bornée de fonctions continues sur K qui converge simplement vers h, on aura

$$\forall \sigma \in F \quad \int (f_n - g_n)d\sigma \to \int h d\sigma - \int h d\sigma = 0$$

ce qui termine la démonstration.

Theoreme 14. *Pour qu'une suite (f_n) de fonctions continues sur K soit une suite de Cauchy pour la topologie diffuse, il faut et il suffit qu'elle soit bornée uniformément sur le support de F et qu'il existe une fonction h de première classe sur K telle que toute sous-suite de (f_n) contienne une sous-suite convergeant F-presque partout vers h.*

Ceci résulte immédiatement du corollaire 13 et du théorème 11.

Proposition 15. *Si K est un compact parfait et F l'ensemble des probabilités diffuses, si (f_n) est une suite de Cauchy pour la topologie diffuse, (f_n) possède une sous-suite qui converge simplement partout.*

Il résulte de la proposition 6 que (f_n) est uniformément bornée, et du théorème 14 que (f_n) possède une sous-suite qui converge simplement F-presque partout, c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable D. Par utilisation du lemme diagonal, on peut encore extraire de cette sous-suite une suite qui converge en chaque point de D, donc en tout point de K.

Remarque 16. On ne peut en général renforcer le théorème 7 en affirmant que le suite (f_n) elle-même converge F-presque partout vers 0.

Prenons $K = [0, 1]$, F l'ensemble des mesures diffuses sur $[0, 1]$. Pour tout entier n il existe p et q entiers tels que

$$n = 2^p + q, \quad 0 \leqslant q < 2^p.$$

Soient I_n l'intervalle $\left[\frac{q}{2^p}, \frac{q+1}{2^p}\right]$ et f_n une fonction continue sur K, à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 sur I_n et 0 hors de $\left[\frac{q-1}{2^p}, \frac{q+2}{2^p}\right]$.

Alors $\limsup_{n\to\infty} f_n = 1$. Néanmoins, si σ est une mesure diffuse, la fonction $x \to \sigma([0, x])$ est continue, donc uniformément continue; il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que $\operatorname{diam} A < \eta$ entraîne $\sigma(A) < \varepsilon$. Il en résulte que

$$\int f_n d\sigma \to 0.$$

La suite (f_n) converge donc diffusément vers 0, mais ne converge vers 0 en aucun point.

Remarque 17. L'hypothèse que F est une face G_δ ne peut être remplacée dans le théorème 7 par l'hypothèse que F est une face K_σ.

Prenons encore $K = [0, 1]$, mais pour F l'ensemble des probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et à densité bornée. On sait que la suite (f_n) définie par $f_n(t) = \sin n\pi t$ converge vers 0 pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, donc pour la topologie diffuse qui en est alors la trace sur $C(K)$.

Néanmoins, si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait F-presque partout vers 0, c'est-à-dire presque partout, on aurait, puisque

$$\sup_{n,t} |f_n(t)| = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}^2(t)\,dt = 0,$$

Or

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int f_n^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}.$$

On en déduit qu'aucune sous-suite ne converge F-presque partout vers 0, alors que F est une face K_σ, dense dans $\mathscr{M}^1(K)$.

Theoreme 18. *Dans les théorèmes 9 et 14, on peut remplacer l'hypothèse que les (f_n) sont continues par l'hypothèse que les (f_n) sont boréliennes bornées, à condition* *de remplacer "suite bornée sur le support de F" par "suite uniformément bornée sur le complémentaire d'un borélien F-négligeable, et, dans l'énoncé* 14, *"une fonction h de première classe" par "une fonction h borélienne"*.

En effet, si les (f_n) sont boréliennes sur K, il existe un espace polonais Q et une bijection continue π de Q sur K tels que les $(f_n \circ \pi)$ soient continues. Si les (f_n) sont bornées, il existe une compactification métrisable $\hat{Q}$ de Q telle que les $f_n \circ \pi$ se prolongent en fonctions continues $\hat{f}_n$ sur $\hat{Q}$.

L'ensemble $\hat{F}$ des probabilités sur Q dont l'image par π est dans F est une face G_δ de $\mathcal{M}^1(Q)$, donc une face G_δ de $\mathcal{M}^1(\hat{Q})$ puisque $\mathcal{M}^1(Q)$ est une face G_δ de $\mathcal{M}^1(\hat{Q})$.

Il suffit alors d'appliquer les théorèmes 9 ou 14 aux $\hat{f}_n$ sur $\hat{Q}$, pour obtenir le résultat cherché, compte tenu de ce que $\hat{h} \circ \pi^{-1}$ est borélienne si $\hat{h}$ est de première classe sur $\hat{Q}$, l'application π^{-1} étant borélienne.

Reference

[1] G. Mokobodzki, *Sur la limite faible d'une suite de fonctions boréliennes*, Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris n° 2, Lecture Notes in Math. n° 563.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS

Accepté par la Rédaction le 17. 8. 1979