[3] Th. Jech, *Set Theory*, Academic Press, 1978.
[4] D. Maharam, *On a theorem of von Neumann*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), pp. 987–994.
[5] D. A. Martin and R. M. Solovay, *Internal Cohen extensions*, Annals of Math. Logic 2 (1970), pp. 143–178.
[6] J. von Neumann and M. H. Stone, *The determination of representative in the residual classes of a Boolean algebra*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 353–378.
[7] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, Springer Verlag 1971.
[8] K. L. Prikry, *Changing measurable into accessible cardinals* (thesis), University of California, Berkeley.
[9] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Berlin 1964.
[10] A. D. Taylor, *On saturated sets of ideals and Ulam's problem*, Fund. Math. 109 (1980), pp. 37–53.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF WARSAW
INSTYTUT MATEMATYKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Warszawa

Sur une propriété des fonctions de deux variables

par

Zbigniew Grande (Elbląg)

Résumé. Dans l'article [1] O'Malley a démontré que toute fonction $f\colon [0,1]\to R$ étant surpassement continue est de première classe de Baire et a la propriété de Darboux. Dans cet article on introduit les trois différentes définitions de la continuité surpasse des fonctions réelles de deux variables et on examine si cettes propriétés impliquent la première classe de Baire et la propriété de Darboux définie par Mišik dans l'article [2].

Dans l'article [1] O'Malley a introduit la définition suivante:

(1) Let f be a measurable real-valued function defined on $[0, 1]$. Let (a, b) be any open interval and $E = \{x\colon f(x)\in(a, b)\}$. Then f is preponderantly continuous if, for every $x\in E$, we can find a $\delta = \delta(x, (a, b))>0$ such that $m(E\cap I)/m(I)>\frac{1}{2}$ for all interval I containing x with $0<m(I)<\delta$. (Here m denotes Lebesgue measure.)

et a démontré le théorème suivant:

THEOREM. *If f is preponderantly continuous on* $[0, 1]$ (*according to* (1)), *then f is Baire* 1, *Darboux.*

Dans cet article j'établis des théorèmes analogues concernant les fonctions de deux variables.

DÉFINITION 1. Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit $R\times R$. On dit qu'une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $f\colon R^2\to R$ a la propriété:

(P_1) lorsqu'il existe pour tout point $A\in R^2$ et pour tout intervalle ouvert (a, b) contenant $f(A)$ un nombre positif $\delta = \delta(A, (a, b))$ tel que

$$m_2\big(S(A, r)\cap f^{-1}((a, b))\big)/m_2\big(S(A, r)\big)>\tfrac{1}{2}$$

pour tout $0<r<\delta$, où m_2 désigne la mesure de Lebesgue dans l'espace R^2 et $S(A, r) = \{X\in R^2\colon \varrho(A, X)<r\}$ et ϱ désigne la distance euclidienne dans R^2;

(P_2) lorsqu'il existe pour tout point $A\in R^2$ et pour tout intervalle $(a, b)\ni f(A)$ un nombre positif $\delta = \delta(A, (a, b))$ tel que

$$\liminf_{r\to 0} m_2\big(S(A, r)\cap f^{-1}((a, b))\big)/m_2\big(S(A, r)\big)>\tfrac{1}{2}\,;$$

(P_3) lorsqu'il existe pour tout point $A \in R^2$ et pour tout intervalle $(a, b) \ni f(A)$ un nombre positif $\delta = \delta(A, (a, b))$ tel que

$$m_2(S \cap f^{-1}((a, b)))/m_2(S) > \tfrac{1}{2}$$

pour tout cercle ouvert S, contenant A, dont le diamètre $d(S)$ est plus petit que δ.

THÉORÈME 1. *Si une fonction mesurable $f\colon R^2 \to R$ a la propriété* (P_1), *elle est de première classe de Baire.*

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f\colon R^2 \to R$ ayant la propriété (P_1) et n'étant pas de première classe de Baire. Il existe donc un ensemble parfait P et deux nombres réels a et b $(a<b)$ tels que, quel que soit le point $A \in P$, on a

$$\text{(I)} \qquad \liminf_{\substack{X\to A\\ X\in P}} f(X) < a \quad \text{et} \quad \limsup_{\substack{X\to A\\ X\in P}} f(X) > b\,.$$

Posons $B_1 = \{X\colon f(X)>b\}$, $B_2 = \{X\colon f(X)<a\}$, $B_3 = \{X\colon f(X)<\frac{1}{2}(a+b)\}$ et $B_4 = \{X\colon f(X)>a\}$. La fonction f ayant la propriété (P_1), il existe pour tout point $X \in P$ un nombre rationnel $r(X)>0$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour $0<\delta\leqslant r(X)$:

(2) si $X \in B_i$, où $i = 1, 2$, la densité moyenne de l'ensemble B_i sur le cercle $S(X, \delta)$ est plus grande que $\frac{1}{2}$; et

(3) si $a \leqslant f(X) < \frac{1}{2}(a+b)$ $[\frac{1}{2}(a+b) \leqslant f(X) \leqslant b]$, la densité moyenne de l'ensemble $B_3[B_4]$ sur le cercle $S(X, \delta)$ est plus grande que $\frac{1}{2}$.

L'ensemble P est un espace complet et $P = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$, où $C_i = B_i \cap P$, au moins l'un des ensembles C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ est donc de deuxième catégorie dans l'ensemble P. Par raison de symétrie on peut supposer que l'ensemble C_1 soit de deuxième catégorie dans P. Comme, de plus, l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable, il existe donc un nombre rationnel $r>0$ tel que l'ensemble $D = \{X \in C_1\colon r(X) = r\}$ est également de deuxième catégorie dans P. Soit U le cercle ouvert tel que l'ensemble D est dense dans l'ensemble $U \cap P$. D'après (I) l'ensemble C_2 est dense dans l'ensemble P. Fixons un point A dans l'ensemble $U \cap C_2$. Posons $s = \min(r, r(A))$. Soit $\{A_n\} \subset D$ une suite de points convergente vers le point A. Comme les densités moyennes de l'ensemble B_1 sur les cercles $S_n = S(A_n, s)$ sont plus grandes que $\frac{1}{2}$, la densité moyenne de l'ensemble B_1 sur le cercle $S_0 = S(A, s)$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Mais, d'autre part, la densité moyenne de l'ensemble B_2 sur le cercle S_0 est plus grande que $\frac{1}{2}$, en contradiction avec le fait que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

L'exemple suivant montre l'importance de la condition $m(E \cap I)/m(I) > \frac{1}{2}$ de (1) pour que le théorème d'O'Malley soit vrai.

EXEMPLE 1. Soit $A \subset [0, 1]$ l'ensemble de Cantor. Désignons par

$$(\alpha_n, \beta_n) (\alpha_n < \beta_n \text{ et } n = 1, 2, \ldots)$$

les composantes de l'ensemble $[0, 1]-A$. Posons, pour $n = 1, 2, \ldots$, $\gamma_n = \frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n)$. Dans toute composante (α_n, β_n) il existe deux suites monotones $\{a_k^n\}$ et $\{b_k^n\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ convergentes respectivement vers α_n et β_n et telles que $a_1^n = b_1^n$, $(a_k^n - a_{k+1}^n)/(a_{k+1}^n - \alpha_n) < 1/kn$ et $(b_{k+1}^n - b_k^n)/(\beta_n - b_{k+1}^n) < 1/kn$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Posons $c_k^n = \frac{1}{2}(a_{k+1}^n + a_k^n)$ et $d_k^n = \frac{1}{2}(b_k^n + b_{k+1}^n)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Si les ensembles B et C sont non boréliens et tels que $A = B \cup C$ et $B \cap C = \emptyset$, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in B \cup \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} [c_k^n, a_k^n) \cup \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} [b_k^n, d_k^n)\,, \\ 1 & \text{pour } x \in C \cup \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} [a_{k+1}^n, c_k^n) \cup \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} [d_k^n, b_{k+1}^n) \end{cases}$$

n'est pas borélienne. Cependant, quels que soient le point $x \in [0, 1]$ et l'intervalle ouvert (a, b) contenant $f(x)$, la densité inférieure de l'ensemble $f^{-1}((a, b))$ au point x est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

DÉFINITION 2. On dit qu'une fonction $f\colon R^2 \to R$ a la propriété de Darboux lorsque $f(S)$ est un ensemble connexe pour tout cercle ouvert S (¹).

Il existe des fonctions réelles de deux variables ayant la propriété (P_1) qui n'ont pas la propriété de Darboux, par exemple la fonction caractéristique d'un cercle ouvert. Mais les fonctions ayant la propriété (P_2) ou bien (P_3) ont déjà la propriété de Darboux.

THÉORÈME 2. *Si une fonction mesurable $f\colon R^2 \to R$ a la propriété* (P_2), *elle a également la propriété de Darboux.*

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant dont la démonstration est évidente:

LEMME 1. *Étant donné le cercle $S(A_0, r_0)$ et le point $A_1 \in \mathrm{Fr}(S(A_0, r_0))$ (la frontière de ce cercle) étant fixé, on a*

$$\lim_{r\to 0} m_2(S(A_0, r_0) \cap S(A_1, r))/m_2(S(A_1, r)) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Démonstration du théorème 2. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f\colon R^2 \to R$ ayant la propriété (P_2) et n'ayant pas la propriété de Darboux. Il existe donc un cercle ouvert S_0 tel que l'ensemble $f(S_0)$ n'est pas connexe. Soit z_0 un nombre réel tel que $(-\infty, z_0) \cap f(S_0) \neq \emptyset$, $(z_0, \infty) \cap f(S_0) \neq \emptyset$ et $z_0 \notin f(S_0)$. Posons $Q_1 = S_0 \cap f^{-1}((-\infty, z_0))$ et $Q_2 = S_0 \cap f^{-1}((z_0, \infty))$ et $Q_3 = \mathrm{Cl}(Q_1) \cap \mathrm{Cl}(Q_2) \cap S_0$, où $\mathrm{Cl}(Q_i)$, $i = 1, 2$, désigne la fermeture de l'ensemble Q_i. Comme la fonction f est de première classe de Baire, il existe donc un point de continuité de la fonction partielle f/Q_3, que nous désignons par A_1. Par raison de symétrie on peut supposer que $A_1 \in Q_1 \cap Q_3$, d'où il vient $f(A_1)<z_0$. Comme A_1 est un point de continuité de la fonction réduite f/Q_3, il existe donc un cercle ouvert $S_1 = S(A_1, r_1) \subset S_0$ tel que $S_1 \cap Q_3 \subset Q_1$. Soit $A_2 \in Q_2$ un point tel que

(¹) Si, en outre, la fonction f a la propriété (P_2) ou bien (P_3), la fonction f a la propriété de Darboux au sens de Mišik (voir [2]).

$\varrho(A_2, A_1) < \frac{1}{3} r_1$. Désignons par r_2 la distance du point A_2 à l'ensemble fermé Q_3 (fermé dans le cercle S_1) et remarquons que le cercle ouvert $S_2 = S(A_2, r_2) \subset Q_2 \cap S_1$. Mais, il existe dans la frontière du cercle S_2 un point $A_3 \in Q_1$, en contradiction, d'après le lemme 1, avec la propriété (P_2) de la fonction f.

De la même façon on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si une fonction mesurable $f: R^2 \to R$ a la propriété* (P_3), *elle a également la propriété de Darboux.*

Remarque. Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ approximativement continue (donc ayant les propriétés (P_2) et (P_3)) qui n'est pas connexe, c'est-à-dire telle qu'il existe un ensemble connexe $P \subset R^2$ pour lequel l'image $f(P)$ n'est pas connexe.

Travaux cités

[1] R. J. O'Malley, *Note about preponderantly continuous functions*, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 21 (1976), pp. 335–336.

[2] L. Mišik, *Der Mittelwertsatz für additive Intervallfunktionen*, Fund. Math. 45 (1957), pp. 64–70.

Non standard interpretations of higher order theories

by

Paweł Zbierski (Warszawa)

Abstract. We prove the existence of some types of nonstandard interpretations of higher order arithmetic (or higher order set theory) in itself.

Section 0. Classifying interpretations. Interpreting a theory in itself or in another theory is one of most basic tools in foundational research. There is a number of papers devoted to general theory of interpretations. In Szczerba [8] and Pinter [7] it is proved that some logical and model theoretical notions are preserved under interpretations satisfying suitable conditions. In Szczerba and Setti [9], we find an algebraic characterization for a functor from the class of models of T_1 to the class of models of T_2 to be determined by an interpretation of T_2 in T_1. Here we turn our attention to the problem of classification of interpretations according to semantical notions preserved. We do this in the case of nth order arithmetic A_n or some consistent extensions of A_n. Similar results hold in the case of nth order set theory M_n (see Marek and Zbierski [4]). We distinguish the following classes of interpretations:

(1) β-interpretations or standard interpretations. These are interpretations preserving well-orderings. More precisely, for an interpretation I let p^I denote the formula corresponding to p under I. Then I is a β-interpretation if the formula

$$I(x) \,\&\, \mathrm{Bord}^I(x) \to \mathrm{Bord}(x)$$

is provable (in the theory in which we interpret), where $\mathrm{Bord}(x)$ stands for "x is a well-ordering".

(2) k-β-(or k-standard) interpretations. We assume $1 \leqslant k < n$ and then the interpretations are those which preserve well-orderings up to the kth type, but for some x of type $k+1$ we have

$$\vdash I(x) \,\&\, \mathrm{Bord}^I(x) \,\&\, \neg \mathrm{Bord}(x)\,.$$

Standard (k-standard) interpretations preserve natural numbers. Hence