[14] A. J. Ostaszewski, *Descriptive set theory in Hausdorff spaces*, Ph. D. thesis, University College, London (1973).
[15] C. A. Rogers, *Analytic sets in Hausdorff spaces*, Mathematika 11 (1964), pp. 1–8.
[16] A. H. Stone, *Non-separable Borel sets*, Dissertationes Math. 28 (1962).
[17] A. Wilansky, *Topology for Analysis*, London 1970.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
LONDON SCHOOL OF ECONOMICS AND POLITICAL SCIENCE

Accepté par la Rédaction le 13. 11. 1978

Sur les fonctions de deux variables équicontinues par rapport à une variable

by

Zbigniew Grande (Elbląg)

Résumé. Dans cet article on considère la mesurabilité (la propriété de Baire) d'une fonction f: $X\times Y\to R$ définie sur le produit cartésien d'un espace topologique X et d'un espace mesurable Y (et d'un espace topologique Y) dont toutes les sections f^y sont équicontinues et toutes les sections f_x sont mesurables (ont la propriété de Baire).

Soient (X, T_1) et (Y, T_2) des espaces topologiques et R l'espace des nombres réels. Si $X = Y = R$ et $T_1 = T_2$ est la topologie euclidienne et si f: $R\times R\to R$ est une fonction, la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de toutes les sections $f_x(y) = f(x, y)$ $(x, y \in R)$ et la continuité de toutes les sections $f^y(x) = f(x, y)$ impliquent la mesurabilité (au sens de Lebesgue sur le plan $R\times R$) de la fonction f. Ce théorème ne reste plus vrai dans le cas des fonctions réelles définies sur le produit de deux espaces topologiques. En effet, l'hypothèse du continu implique l'existence d'une fonction f: $R\times R\to R$ non mesurable au sens de Lebesgue et telle que toutes ses sections f_x sont mesurables au sens de Lebesgue et toutes ses sections f^y sont approximativement continues (donc continues relativement à la topologie de densité [2]). Dans l'article [3] les auteurs examinent les cas particuliers dans lesquels le théorème considéré reste vrai.

Dans la première partie de cet article je démontre que l'équicontinuité de toutes les sections f_x d'une fonction f: $X\times Y\to R$ (X et Y étant des espaces topologiques) et la μ_2-mesurabilité (propriété de Baire) de toutes les sections f^y impliquent la $\overline{\mu_1\times\mu_2}$-mesurabilité (propriété de Baire) de la fonction f, en admettant des hypothèses supplémentaires sur les mesures μ_1 et μ_2.

Dans la deuxième partie je démontre que l'équicontinuité approximative de toutes les sections f_x d'une fonction f: $I\times I\to R$, où $I = [0, 1]$, et que la propriété de Baire par rapport à la topologie euclidienne de toutes les sections f^y impliquent la propriété de Baire par rapport à la topologie euclidienne sur $I\times I$ de la fonction f.

I. Soit (X, T) un espace topologique avec la topologie T. On dit que la mesure μ_1 définie sur une σ-algèbre $M_1 \subset T$ satisfait à la condition (Z) lorsqu'il existe pour toute famille $\{U_t\}$ d'ensembles appartenant à T telle que $\bigcup_t A_t = X$ une sous-famille dénombrable $\{U_n\} \subset \{U_t\}$ telle que $\mu_1(X - \bigcup_n U_n) = 0$.

Théorème 1. *Supposons que (X, T) soit un espace topologique, que la mesure μ_1 satisfasse à la condition (Z) et que (Y, M_2, μ_2) soit un espace mesurable avec la mesure σ-finie μ_2. Si une fonction $f\colon X \times Y \to R$ est telle que toutes ses sections $f_x(y) = f(x, y)$ $(x \in X$ et $y \in Y)$ sont μ_2-mesurables et si toutes ses sections $f^y(x) = f(x, y)$ sont équicontinues, la fonction f est $\overline{\mu_1 \times \mu_2}$-mesurable, où $\overline{\mu_1 \times \mu_2}$ désigne le complété de la mesure produite $\mu_1 \times \mu_2$.*

Démonstration. Fixons le nombre réel a et démontrons que l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in X \times Y\colon f(x, y) < a\} \in \overline{M_1 \times M_2}.$$

Les sections f^y étant équicontinues, il existe pour tout point $x \in X$ et pour tout nombre naturel n, un ensemble $A(x, n) \in T$ tel que $x \in A(x, n)$ et $|f(t, y) - f(x, y)| < 1/4n$, quels que soient les points $t \in A(x, n)$ et $y \in Y$. Comme la mesure μ_1 satisfait à la condition (Z), il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$, une suite $\{A_{k,n}\} \subset \{A(x, n)\colon x \in X\}$ telle que $\mu_1(X - \bigcup_k A_{k,n}) = 0$. Soient les points $x_{k,n}$ tels que $A_{k,n} = A(x_{k,n}, n)$. Remarquons que les ensembles $B_{k,n} = \{y \in Y\colon f(x_{k,n}, y) < a - 1/n\} \in M_2$ pour $k, n = 1, 2, \ldots$ et posons $C_{k,n} = A_{k,n} \times B_{k,n}$. Si $(x, y) \in C_{k,n}$, on a

$$|f(x, y) - f(x_{k,n}, y)| < 1/4n$$

et, par conséquent,

$$f(x, y) < f(x_{k,n}, y) + 1/4n < a + 1/4n - 1/n < a.$$

L'ensemble $\bigcup_{k,n} C_{k,n}$ est donc contenu dans l'ensemble A. D'autre part, l'ensemble

$$D = A \cap [(\bigcap_n \bigcup_k A_{k,n}) \times Y] \subset \bigcup_{k,n} C_{k,n}.$$

En effet, si $(x, y) \in D$, il existe un nombre naturel n tel que $f(x, y) < a - 2/n$ et un nombre naturel k tel que $x \in A_{k,n}$. Comme $|f(x, y) - f(x_{k,n}, y)| < 1/4n$, on a

$$f(x_{k,n}, y) < f(x, y) + 1/4n < a - 2/n + 1/4n < a - 1/n$$

et, par conséquent, $(x, y) \in C_{k,n}$. Comme l'ensemble

$$A - \bigcup_{k,n} C_{k,n} \subset [(X - \bigcap_n \bigcup_k A_{k,n}) \times Y] = E \quad \text{et} \quad (\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0,$$

la démonstration du théorème 1 est donc achevée.

Nous indiquons encore les deux exemples suivants qui montrent l'importance des hypothèses du théorème 1:

Exemple 1. Soit X un ensemble de puissance 2^c, où c désigne la puissance du continu. Soit $\varrho\colon X \times X \to R$ la métrique discrète. Posons $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = \infty$ pour tout ensemble $A \subset X$ $(A \neq \emptyset)$. Il existe un ensemble $B \subset X \times X$ qui n'est pas $\overline{\mu \times \mu}$-mesurable [1]. Posons pour $(x, y) \in X \times X$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) \notin B \end{cases}$$

et remarquons que toutes les sections f_x et f^y sont équicontinues et μ-mesurables et que la fonction f est continue relativement à la métrique $\varrho \times \varrho$, mais elle n'est pas $\overline{\mu \times \mu}$-mesurable.

Exemple 2. Soit (X, μ) un espace avec la mesure μ définie sur la σ-algèbre de tous les ensembles de l'espace X telle que $\mu(X) = 1$ et $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout point $x \in X$ ([6], pp. 50–51). Rangeons tous les points de l'espace X en une suite transfinie

$$a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \alpha_0, \tag{1}$$

telle que $a_\alpha \neq a_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta < \alpha_0)$. Soit $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$ le premier nombre ordinal tel que $\mu(\{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_1\} = A) > 0$. Posons

$$A_\alpha = \{a_\beta\colon \beta < \alpha\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{\alpha < \alpha_1} [A_\alpha \times \{a_\alpha\}].$$

Il résulte du théorème de Fubini que l'ensemble B n'est pas $\overline{\mu \times \mu}$-mesurable. Cependant la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) \in X \times X - B, \end{cases}$$

où $x, y \in X$, est telle que toutes ses sections f_x et f^y sont équicontinues par rapport à la topologie T de tous les ensembles de l'espace X et qu'elles sont μ-mesurables.

Théorème 2. *Supposons que (X, T) soit un espace topologique avec la topologie de Lindelöf T, que μ_1 soit la mesure définie sur la σ-algèbre $M_1 \supset T$, et que (Y, M_2, μ_2) soit un espace mesurable avec la mesure σ-finie μ_2. Si toutes les sections $f^y(x) = f(x, y)$ d'une fonction $f\colon X \times Y \to R$ sont équicontinues et si toutes ses sections $f_x(y) = f(x, y)$ sont μ_2-mesurables, la fonction f est $(\mu_1 \times \mu_2)$-mesurable.*

La démonstration du théorème 2 est analogue à celle du théorème 1.

Problème 1. Le théorème 2 reste-t-il vrai si l'on remplace l'hypothèse de l'équicontinuité des sections f^y par l'hypothèse de leur continuité?

Théorème 3. *Soient (X, T_1) et (Y, T_2) des espaces topologiques. Si toutes les sections f^y d'une fonction $f\colon X \times Y \to R$ sont équicontinues et si toutes ses sections f_x ont la propriété de Baire par rapport à la topologie T_2, la fonction f a la propriété de Baire par rapport à la topologie $T_1 \times T_2$.*

Démonstration. Fixons le nombre réel a et démontrons que l'ensemble $\{(x, y) \in X \times Y\colon f(x, y) < a\}$ a la propriété de Baire par rapport à la topologie produite $T_1 \times T_2$. Les fonctions f^y étant équicontinues, il existe pour tout nombre naturel n une famille d'ensembles ouverts $U(n, t) \in T_1$ disjoints deux à deux, et une famille de points $x_{n,t} \in U(n, t)$ telles que $|f(x_{nt}, y) - f(x, y)| < 1/4n$ pour

$x \in U(n, t)$ et $y \in Y$ et telles que l'ensemble $B_n = X - \bigcup_t U(n, t)$ est de première catégorie dans l'espace topologique (X, T_1). Remarquons que les ensembles $B(n, t) = \{y \in Y \colon f(x_{n,t}, y) < a - 1/n\}$ ont la propriété de Baire par rapport à la topologie T_2 et posons $C(n, t) = U(n, t) \times B(n, t)$. De la même façon que dans la démonstration du théorème 1 on démontre que $D = \bigcap_n \bigcup_t C(n, t) \subset A$ et que l'ensemble $A - D$ est de première catégorie dans l'espace produit $(X \times Y, T_1 \times T_2)$. Comme, de plus, tout ensemble $\bigcup_t C(n, t)$ a la propriété de Baire, l'ensemble A l'a également et la démonstration du théorème 3 est terminée.

II. Dans cette partie je démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si toutes les sections f^y d'une fonction $f\colon I \times I \to R$, où $I = [0, 1]$, sont approximativement équicontinues et si toutes ses sections f_x ont la propriété de Baire relativement à la topologie euclidienne dans l'intervalle I, la fonction f a la propriété de Baire relativement à la topologie euclidienne dans l'espace $I \times I$.*

Remarque. Le théorème 4 ne résulte pas immédiatement des théorèmes 2 et 3.

Dans la démonstration du théorème 4 nous appliquons les lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit $f\colon I \times I \to R$ une fonction bornée telle que toutes ses sections f^y sont des dérivées. Si toutes les fonctions $g_t(y) = \int_0^t f(x, y)\,dx$ $(t \in [0, 1])$ ont la propriété de Baire, la fonction f a la propriété de Baire.*

La démonstration de ce lemme est la même que celle du théorème 3 de l'article [5].

LEMME 2. *Une fonction $g\colon I \to R$ a la propriété de Baire si et seulement s'il existe pour tout ensemble $A \subset I$ et pour tout intervalle ouvert J contenant la fermeture $\mathrm{Cl}(f(A))$ de l'ensemble $f(A)$ un ensemble B contenant A, ayant la propriété de Baire et tel que $f(B) \subset J$.*

Démonstration. Si la fonction g a la propriété de Baire, l'ensemble $g^{-1}(J)$ a la propriété de Baire et $A \subset g^{-1}(J)$.

D'autre part, si $[a, b]$ $(a < b)$ est un intervalle fermé, il existe pour tout nombre naturel n un ensemble B_n ayant la propriété de Baire tel que $B_n \supset g^{-1}([a, b])$ et $g(B_n) \subset (a - 1/n, b + 1/n)$. Par conséquent l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ a la propriété de Baire. Comme, de plus, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = g^{-1}([a, b])$, la fonction g a donc la propriété de Baire.

Démonstration du théorème 4. Il suffit de démontrer, d'après le lemme 1, que quel que soit le nombre $t \in [0, 1]$, la fonction $g_t(y) = \int_0^t f(x, y)\,dx$ a la propriété de Baire. Fixons le nombre $t \in [0, 1]$ et démontrons que la fonction g_t satisfait à l'hypothèse du lemme 2. Soient $A \subset I$ un ensemble et J intervalle ouvert contenant $\mathrm{Cl}(f(A))$ et n un nombre naturel tel que $\{y \in R\colon$ il existe $y_0 \in \mathrm{Cl}(g_t(A))$ tel que $|y - y_0| < 1/n\} \subset J$. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que la fonction f

soit bornée, car dans le cas contraire on peut considérer la fonction $\operatorname{arctg} f$. Soit M un nombre réel tel que $|f(x, y)| \leqslant M$, quel que soit le point $(x, y) \in I \times I$. Les sections f^y étant approximativement équicontinues, il existe pour tout point $x \in (0, t)$ un ensemble mesurable $B(x)$ contenant le point x, ayant la densité 1 au point x et tel que, quels que soient les points $y \in I$ et $z \in B(x)$, on ait $|f(z, y) - f(x, y)| < 1/10n$. Soient des points $x_1, \ldots, x_k \in (0, t)$ tels que la mesure de Lebesgue $m\left(H = (0, t) - \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i)\right)$ est plus petite que $1/10nM$. Soit $A_1 \subset A$ la différence de l'ensemble A et de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles dans lesquels l'ensemble A est de première catégorie. Remarquons que l'ensemble $C = A - A_1$ est de première catégorie et que l'ensemble A_1 est de deuxième catégorie en chacun de ses points. Les sections $f_{x_1}, \ldots, f_{x_k}$ ayant la propriété de Baire, il existe des ensembles de première catégorie $D_1, \ldots, D_k$ tels que les fonctions réduites $f_{x_i}/I - D_i$, $i = 1, \ldots, k$, sont continues. Les ensembles $E_i = f_{x_i}^{-1}(\mathrm{Cl}(f_{x_i}(A_1)))$, $i = 1, \ldots, k$, ont la propriété de Baire, leur produit $E = \bigcap_{i=1}^{k} E_i$ l'a également et $A_1 \subset E \cap \mathrm{Cl}(A_1) = F$. Pour achever la démonstration il suffit de démontrer que $g_t\left(G = F - \bigcup_{i=1}^{k} D_i\right) \subset J$, puisque $A_1 - G$ est de première catégorie. Dans ce but fixons le point $y_0 \in G$. Le point y_0 étant un point de continuité des fonctions $f_{x_i}/I - D_i$, $i = 1, \ldots, k$, et l'ensemble A_1 étant dense dans l'ensemble G, il existe un point $y_1 \in A_1 \cap G$ tel que $|f(x_i, y_0) - f(x_i, y_1)| < 1/10n$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Si le point $z \in B(x_i)$ $(i = 1 \leqslant i \leqslant k)$, on a

$$\begin{aligned} &|f(z, y_1) - f(z, y_0)| \\ &\quad \leqslant |f(z, y_1) - f(x_i, y_1)| + |f(x_i, y_1) - f(x_i, y_0)| + |f(x_i, y_0) - f(z, y_0)| \\ &\quad < 1/10n + 1/10n + 1/10n = 3/10n. \end{aligned}$$

On a, par conséquent,

$$\begin{aligned} |g_t(y_0) - g_t(y_1)| &= \left|\int_0^t f(x, y_0)\,dx - \int_0^t f(x, y_1)\,dx\right| \\ &\leqslant \int_0^t |f(x, y_0) - f(x, y_1)|\,dx \\ &= \int_H |f(x, y_0) - f(x, y_1)|\,dx + \int_{[0,t]-H} |f(x, y_0) - f(x, y_1)|\,dx \\ &\leqslant 2Mm(H) + 3t/10n \\ &\leqslant 2M/10nM + 3/10n = 1/2n. \end{aligned}$$

Comme $g_t(y_1) \in g_t(A)$ et $|g_t(y_1) - g_t(y_0)| < 1/n$, on a donc $g_t(y_0) \in J$, d'où notre théorème.

PROBLÈME 2. En admettant dans le théorème 4 que toutes les sections f^y sont boreliennes, la fonction f est-elle borelienne?

A quelle classe de Baire la fonction f appartient-elle si les sections f^y sont de classe α de Baire?

Problème 3 (L. Mišik). La fonction $f\colon I\times I\to R$ est-elle borelienne, si toutes ses sections f_x sont approximativement continues et toutes ses sections f^y sont de première classe de Baire?

Travaux cités

[1] R. Bing, W. Bledsoe and R. D. Mauldin, *Sets generated by rectangles*, Pacific J. Math. 51 (1974), pp. 27–36.

[2] R. O. Davies and J. Dravecky, *On the measurability of functions of two variables*, Matematicky Časopis 23 (1973), pp. 285–289.

[3] J. Dravecky and T. Neubrunn, *Measurability of functions of two variables*, Matematicky Časopis 23 (1973), pp. 147–157.

[4] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, Warszawa 1965.

[5] J. S. Lipiński, *On the measurability of functions of two variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), pp. 131–135.

[6] J. Oxtoby, *La mesure et la catégorie* (russe), Moscou 1974.

INSTYTUT MATEMATYKI
WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
Bydgoszcz

Accepté par la Rédaction le 27. 11. 1978

On measurable relations

by

C. J. Himmelberg *, **T. Parthasarathy** and **F. S. Van Vleck** * (Lawrence, Ks.)

Abstract. The results in this paper supplement those in "Measurable relations" by C. J. Himmelberg [H]. Some results of that paper are extended and examples are given showing the sharpness of earlier results. In particular, examples are given showing (i) that the intersection of two weakly measurable, closed-valued relations may fail to be weakly measurable, and (ii) that Filippov's implicit function theorem may fail without appropriate restrictions either on the domain of the relation or on its values.

1. Introduction. Measurable relations, i.e., set valued functions which assign to each element t of a measurable space T a subset of a topological space X in a manner satisfying any one of several possible definitions of measurability, have been studied extensively in recent years by many authors. In this paper, which is somewhat of a sequel to the paper of Himmelberg [H], we extend some earlier results and give several examples that indicate the sharpness of some theorems dealing with measurable relations and their properties.

Generally, the notation follows that in [H]. Also, as in [H], we are most concerned with the case when T is an arbitrary, abstract measurable space. For general references to recent literature the reader is frequently referred to the excellent survey paper by Wagner [W].

In Section 2 we give the notation and terminology that will be used. Also, several propositions, which give known properties of measurable relations, are stated without proof. All of these will be used later.

In Section 3 we present some extensions of known results. Several of these extend results in [H] by noting that a separability hypothesis on X can be deleted.

Section 4 is devoted to examples. In particular, there is an example showing that the intersection of two closed-valued measurable multifunctions may fail to be measurable. Also there is an example showing that the Filippov type implicit function lemma may fail without appropriate restrictions either on the domain of the relation or on its values. The last example is of a countable (but not closed)-

* Supported in part by NSF Grant MCS 76-24436 and University of Kansas General Research Fund Grants.