Weil nun $K-(a,b)$ zusammenhängend ist, so ist nach VI. 1. K selbst ein bikompakter Lennes'scher Bogen.

2. Es gibt nur einen Punkt a in K, so dass $K-(a)$ zusammenhängend ist. Dann führen wir einen idealen Punkt b ein; ist x ein beliebiger Punkt von K und K_x die Komponente von $K-(x)$, die a nicht enthält, so soll $K_x+(b)$ eine Umgebung von b sein. Von den Umgebungsaxiomen sind für dieses System A, C und D trivial; B, das Durchschnittsaxiom, beweist man folgendermassen: sind x, y zwei von a verschiedene Punkte von K, so zerfällt $K-(x,y)$, wie man leicht erkennt, in 3 Komponenten (dies schliesst man wie bei VI. 2); die, welche a enthält, häuft sich nur in einem der Punkte x, y, zum Beispiel in x (dies zeigt man wie im Beweis von V.); von den beiden übrigen heisse die, welche sich in x und y häuft, K_{xy}; und die, welche sich nur in y häuft, K_y. Dann sind die zu x, beziehungsweise zu y gehörigen Umgebungen von b: $K_{xy}+(y)+K_y+(b)$ und $K_y+(b)$; eine ist direkt in der andern enthalten. Da $(K+(b))-(a,b)$ zusammenhängend ist, so ist nach VI. 1. $K+(b)$ ein bikompakter Lennes'scher Bogen.

3. Für jedes x von K zerfällt $K-(x)$.

Sei x ein Punkt von K und seien K_1 und K_2 die beiden Komponenten von $K-(x)$. Dann sind $K_1+(x)$ und $K_2+(x)$ solche nicht geschlossene unverzweigte Kurven, wie sie unter 2. behandelt wurden; erweitern wir wie dort $K_1+(x)$ durch einen Punkt a, ebenso $K_2+(x)$ durch b, so ist $K+(a,b)$ ein bikompakter Lennes'scher Bogen, wie aus VI. 1 hervorgeht.

Mithin kann jede nicht geschlossene unverzweigte Kurve nach Lennes geordnet werden; dass das natürliche Umgebungssystem dieser Anordnung mit dem ursprünglichen gleichwertig ist, könnten wir mit Vietoris aus der Bikompaktheit schliessen [1]); es ist aber hier direkt ersichtlich, dass dies der Fall ist, da, wie man leicht erkennt, jede genügend kleine der durch die Ordnung 1 oder 2 geforderten Umgebungen mit genau einem beziehungsweise genau zwei Grenzpunkten eine natürliche Umgebung ist.

Die Sätze VII. und VIII. ergeben zusammen die in der Einleitung zusammengefassten Resultate; dabei ergibt VII den Fall 1 und VIII 1, 2, 3 die Fälle 4, 3, 2 der Einleitung (S. 97).

[1]) **Vietoris** Monatshefte f. Math. und. Phys., Bd. 31, S. 194.

Sur une propriété générale de fonctions.

Par

S. Saks et W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème connu de M. Vitali [1]) il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$, définie dans l'intervalle $I=(0,1)$, une fonction $\varphi(x)$ de la classe $\leqslant 2$, telle que $f(x)=\varphi(x)$ pour tous les points x de l'intervalle I, sauf les points formant un ensemble de mesure nulle.

Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante qui peut être regardée comme une extension du théorème de M. Vitali aux fonctions quelconques (mesurables ou non):

Théorème: *$f(x)$ étant une fonction définie dans l'intervalle $I=(0,1)$, il existe toujours une fonction $\varphi(x)$ de la classe $\leqslant 2$, telle que, quel que soit le nombre positif ε, l'inégalité*

$$(1) \qquad |f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

a lieu pour tous les nombres x de I sauf les nombres formant un ensemble de mesure intérieure nulle.

Vu le théorème de Vitali, il suffira évidemment de démontrer qu'il existe une fonction *mesurable* $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions de notre théorème.

Lemme 1. *N étant un ensemble quelconque, et P et Q étant des ensembles mesurables, tels que*

[1]) G. Vitali: *Rend. Lomb.* 38 (1905), p. 599; v. aussi: W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. III, p. 319.

(2) $$P \supset N, \quad |P| = |N| \quad et \quad Q \supset N$$ [1]),

on a

$$|P - Q| = 0.$$

Dém. On a, d'après (2), $PQ \supset N$, donc $|PQ| \geq |N| = |P|$, et parsuite, P et Q étant mesurables:

$$|P - Q| = |P - PQ| = |P| - |PQ| = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 2. *$g(x)$ étant une fonction définie dans un ensemble E et prenant un ensemble au plus dénombrable de valeurs différentes, il existe toujours une fonctions mesurable $\varphi(x)$ et un ensemble $H \subset E$, tels que $|H| = |E|$ et que $g(x) = \varphi(x)$ dans l'ensemble H.*

Dém. Soient

(3) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

toutes les valeurs que prend la fonction $g(x)$. Nous pourrons toujours supposer la suite (3) infinie, en répétant une même valeur une infinité de fois, s'il est nécessaire.

Désignons par E_n l'ensemble de tous les nombres x de E, pour lesquels $g(x) = a_n$; nous aurons évidemment:

(4) $$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$$

Nous définirons maintenant, par l'induction, la suite infinie d'ensembles mesurables $M_1, M_2, M_3, \ldots$, comme il suit.

Il existe, comme on sait, un ensemble mesurable M_1 (même un G_δ), tel que

(5) $$M_1 \supset E_1 \quad \text{et} \quad |M_1| = |E_1|.$$

Soit maintenant n un nombre naturel > 1, et supposons que nous avons déjà défini les ensembles mesurables $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Nous désignerons par M_n un ensemble mesurable, tel que

(6) $$M_n \supset E_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1})$$

et

(7) $$|M_n| = |E_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1})|$$

Nous pouvons encore supposer que

(8) $$M_k M_n = 0 \quad \text{pour} \quad k < n,$$

[1]) $|E|$ désigne la mesure extérieure (lebesguienne) de l'ensemble E.

puisqu'on peut toujours remplacer dans les formules (6) et (7) l'ensemble M_n par l'ensemble $M_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1})$, sans que ces formules cessent d'être vraies.

Les ensembles mesurables $M_1, M_2, M_3, \ldots$ sont ainsi définis par l'induction.

Posons maintenant

(9) $$H = M_1 E_1 + M_2 E_2 + M_3 E_3 + \ldots$$

et désignons par M un ensemble mesurable, tel que

(10) $$M \supset H$$

et

(11) $$|M| = |H|.$$

D'après (5) et (6) nous avons

$$E_n \subset M_1 + M_2 + \ldots + M_n, \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots),$$

donc

$$E_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}) \subset M_n E_n,$$

ce qui donne, d'après (9) et (10):

(12) $$M \supset E_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}).$$

n étant un nombre naturel donné, posons $P = M_n$, $Q = M$, $N = E_n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1})$: d'après (6), (7) et (12), les ensembles P, Q et N satisfont aux conditions du lemme 1: en appliquant ce lemme, nous trouvons

(13) $$|M_n - M| = 0 \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, nous avons

$$(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) - M = (M_1 - M) + (M_2 - M) + (M_3 - M) + \ldots,$$

ce qui donne, d'après (13):

(14) $$|(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) - M| = 0.$$

D'autre part on a, d'après (6):

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \subset M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = (M_1 + M_2 + \ldots) M + \\ + [(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) - M],$$

donc, d'après (14):

$$|E_1 + E_2 + E_2 + \ldots| \leqslant |M|$$

c'est-à-dire, d'après (4) et (11): $|H| \geq |E|$, donc

$$|H| = |E|,$$

puisque, d'après (9) et (4), $H \subset E$.

Définissons maintenant la fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle par les conditions:

$$\varphi(x) = a_n \quad \text{pour} \quad x \in M_n,$$

et

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \text{ non } \epsilon\, (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots)$$

Les ensembles M_n étant mesurables, la fonction $\varphi(x)$ sera évidemment mesurable, et nous aurons, vu la définition des ensembles E_n:

$$g(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in M_n E_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

donc, d'après (9):

$$g(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in H.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 3. *$f(x)$ étant une fonction définie dans un ensemble E et ε un nombre positif, il existe toujours une fonction mesurable $\varphi(x)$ et un ensemble $H \subset E$, tels que $|H| = |E|$ et*

(15) $$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad x \in H.$$

Dém. Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'ensemble E, ε — un nombre positif donné. Posons

(16) $$g(x) = \varepsilon \, \mathrm{E} \frac{f(x)}{\varepsilon} \quad \text{pour} \quad x \in E,$$

$\mathrm{E}\, t$ désignant le plus petit entier $\leqslant t$. Nous aurons évidemment

(17) $$0 \leqslant f(x) - g(x) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in E.$$

Or, il résulte de (16) que la fonction $g(x)$ prend dans E un ensemble au plus dénombrable de valeurs différentes: il existe donc, d'après le lemme 2, une fonction mesurable $\varphi(x)$ et un ensemble $H \subset E$, tels que $|H| = |E|$ et que

(18) $$g(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in H.$$

Les formules (17) et (18) donnent (d'après $H \subset E$) l'inégalite (15), et notre lemme est démontré.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque définie dans l'intervalle $I = (0, 1)$. Posons $E = I$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et appliquons le lemme 3: désignons par $\varphi_1(x)$ et H_1 la fonction $\varphi(x)$ et l'ensemble H correspondant. Nous aurons donc $|H_1| = 1$.

Soit maintenant n un nombre naturel donné > 1, et supposons que nous avons déjà défini la fonction $\varphi_{n-1}(x)$ et l'ensemble H_{n-1}. Nous désignerons par $\varphi_n(x)$ et H_n la fonction $\varphi(x)$ et l'ensemble H correspondant qu'on obtient en appliquant notre lemme à $E = H_{n-1}$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$.

Les fonctions mesurables $\varphi_n(x)$ et les ensembles H_n seront ainsi définis pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et nous aurons:

(19) $$|H_n| = 1, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(20) $$H_{n+1} \subset H_n \subset I \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et

(21) $$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad x \in H_n.$$

D'après (21) nous avons

(22) $$|f(x) - \varphi_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{pour} \quad x \in H_{n+1};$$

or, d'après (20), l'inégalité (21) a lieu, à plus forte raison, pour $x \in H_{n+1}$: on en trouve tout de suite, d'après (22):

(23) $$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour} \quad x \in H_{n+1}.$$

La fonction $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ étant mesurable, l'ensemble P_n de tous les nombres x de I satisfaisant à l'inégalité (23) est mesurable. Or, on a évidemment

(24) $$P_n \supset H_{n+1},$$

donc, d'après (20):

(25) $$P_1 P_2 \ldots P_n \supset H_{n+1},$$

donc, d'après (19):

(26) $$|P_1 P_2 \ldots P_n| \geq 1.$$

Posons

(27) $$P = P_1 P_2 P_3 \ldots$$

— ce sera un ensemble mesurable.

Les ensembles P_n $(n=1,2,\ldots)$ étant des sous-ensembles mesurables de l'intervalle $I=(0,1)$, il résulte de (26), comme on sait:

(28) $$|P_1 P_2 P_3 \ldots| = 1,$$

c'est-à-dire, d'après (27):

(29) $$|P| = 1.$$

D'après la définition de l'ensemble P_n, nous avons:

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour} \quad x \epsilon P_n,$$

et, d'après (27), à plus forte raison

(30) $$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour} \quad x \epsilon P,$$

ce qui prouve que la suite infinie des fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,3,..)$ est uniformément convergente dans l'ensemble P. La fonction

(31) $$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x)$$

est ainsi definie dans l'ensemble P. Posons encore $\varphi(x)=0$ pour $x \epsilon I-P$: la fonction $\varphi(x)$ sera ainsi définie dans tout intervalle $(0,1)$ et elle sera mesurable (l'ensemble P et les fonctions $\varphi_n(x)$ étant mesurables).

De (30) et (31) résulte sans peine que

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{pour} \quad x \epsilon P;$$

d'après (21) nous trouvons donc:

(32) $$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{2^{n-3}} \quad \text{pour} \quad x \epsilon PH_n.$$

Or, P et H_n étant des sous-ensembles de $I=(0,1)$ et l'ensemble P étant mesurable, on a, d'après (29) et (19):

(33) $$|PH_n| = 1.$$

Soit maintenant ε un nombre positif donné quelconque. Choisissons le nombre naturel x de sorte qu'on ait

(34) $$\frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon.$$

et désignons par H l'ensemble PH_n: d'après (32) et (34) nous aurons l'inégalité (1) pour $x \epsilon H$, donc, pour tous les points x de $(0,1)$, sauf un ensemble de mesure intérieure nulle, puisque $H \subset I$ et d'après (33), $|H|=1$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer que si l'on pouvait remplacer dans notre théorème l'inégalité (1) par l'égalité $f(x)=\varphi(x)$, il en résulterait que l'hypothèse du continu est fausse.

En effet, soit $f(x)$ une fonction quelconque, définie dans l'intervalle $I=(0,1)$, et supposons qu'on peut remplacer dans notre théorème l'inégalité (1) par l'égalité $f(x)=\varphi(x)$. D'après le théorème de M. Lusin[1]) il existe pour la fonction mesurable $\varphi(x)$ un ensemble (mesurable) E de mesure $<\varepsilon$, tel que la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble $I-E$. L'égalité $f(x)=\varphi(x)$ ayant lieu, d'après l'hypothèse, pour tous les nombres x de I sauf les nombres formant un ensemble H de mesure intérieure nulle, il en résulte que la fonction $f(x)$ est continue sur l'ensemble $I-(E+H)$. Or, E étant un ensemble mesurable de mesure $<\varepsilon$, et H étant de mesure intérieure nulle, l'ensemble $E+H$ est de mesure intérieure $<\varepsilon$ Toute fonction définie dans $(0,1)$ serait donc continue quand on néglige un ensemble de mesure intérieure aussi petite que l'on veut Or, c'est incompatible avec l'hypothèse du continu, de laquelle résulte, comme il a été démontré par W. Sierpiński et A. Zygmund[2]), l'existence d'une fonction $f(x)$ discontinue sur tout ensemble non dénombrable.

Voici encore le suivant corollaire de notre théorème:

Corollaire[3]): *$f(x)$ étant une fonction définie dans l'intervalle $(0,1)$ et η un nombre positif, il existe toujours un polynome $P(x)$, tel que*

(35) $$f(x) - P(x)| < \eta$$

pour tous les points x de l'intervalle $(0,1)$, sauf les points formant un ensemble de mesure intérieure $<\eta$.

En effet, posons $\varepsilon=\eta/2$ et soit $\varphi(x)$ la fonction satisfaisant à notre thé-

[1]) *C. R.* t. 154, p. 1688; v. aussi: *Fund. Math.* t. III, p. 320 et t. IX, p. 122.

[2]) *Fund. Math.* t. IV, p. 318.

[3]) Cette proposition a été déjà signalée par W. Sierpiński dans le t. III de ce journal, p. 321.

orème. La fonction $\varphi(x)$ étant mesurable, il existe, d'après le théorème de M. Borel [1]), un polynome $P(x)$, tel que

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon \tag{36}$$

pour tous les points x de $(0, 1)$ sauf les points formant un ensemble de mesure $< \varepsilon$. L'inégalité (1) ayant lieu pour tous les points x de $(0, 1)$, sauf les points formant un ensemble de mesure intérieure nulle, on en déduit, d'après (36) (et d'après $2\varepsilon = \eta$) que l'inégalité (35) a lieu pour tous les points x de $(0, 1)$, sauf les points formant un ensemble de mesure intérieure $< \varepsilon < \eta$, c. q. f. d.

[1]) *C. R.* t. 154, p. 415; v. aussi *Fund. Math.* t. III, p. 316.

Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues.

Par

S. Banach (Lwów) et S. Saks (Varsovie).

§ 1. Dans une Note de C. R. [1]), Mlle Bary et M. Menchoff ont signalé (sans démonstration) le théorème suivant: *pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit une fonction absolument continue d'une f. absolument continue, il faut et il suffit que l'ensemble de valeurs $f(x)$ où la dérivée (unique et finie) $f'(x)$ n'existe pas, soit de mesure nulle.*

Nous nous proposons ici de prouver qu'une propriété étudiée déjà par S. Banach dans une Note antérieure [2]) et appellée la propriété (S) fournit également une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit une f. a. c. [3]) d'une f. a. c. Il est aisé en déduire le théorème de Mlle Bary et de M. Menchoff

§ 2. Nous rappellerons d'abord quelques notions utiles pour les considérations qui vont suivre.

$f(x)$ étant une fonction continue et E un ensemble de valeurs x, E_f désigne l'ensemble de valeurs $f(x)$ admises aux points $x \varepsilon E$.

La fonction $f(x)$ satisfait à la condition (N) (de M. Lusin), lorsque mes $E = 0$ implique toujours mes $E_f = 0$. On dira encore qu'elle vérifie la condition (S) lorsque, à chaque $\varepsilon > 0$, correspond un nombre $\eta > 0$ tel que mes $E < \eta$ entraîne mes $E_f < \varepsilon$.

Nous désignons, pour chaque nombre y, par $N_f(y)$ le nombre de valeurs différents x vérifiant l'équation $f(x) = y$. Nous disons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition (T) lorsque $N^f(y)$ est fini pour presque toute valeur de y.

[1]) C. R. t. 182, p. 1373.

[2]) Banach, *Sur une classe de fonctions continues. Fund. Math.* 1926. vol. VIII, p. 166.

[3]) Nous désignons, pour abréger, par f. a. c. toute fonction absolument continue.