Ueber die zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung.

Von

Felix Frankl (Wien).

K. Menger[1]) hat in seinen kurventheoretischen Untersuchungen folgenden Begriff definiert, von dem sich eine äquivalente Formulierung auch bei P. Urysohn[2]) findet:

Ein topologischer Raum heisst „im Punkte x von der Ordnung n“ (n eine Kardinalzahl), wenn es in jeder Umgebung U_x von x eine x enthaltende offene Menge O_x gibt. deren Grenze die Mächtigkeit n hat, wenn es aber nicht in jedem U_x ein O_x gibt, dessen Grenze aus weniger als n Punkten besteht. Ein Punkt, in dem eine Menge von erster Ordnung ist, wird als Endpunkt der Menge bezeichnet.

Zur Herstellung des Zusammenhanges mit den älteren Kurvenbegriffen hat Menger u. a. folgenden Satz bewiesen[3]):

Ein kompaktes metrisches Kontinuum von höchstens zweiter Ordnung (d. h. welches in keinem seiner Punkte von höherer als zweiter Ordnung ist) mit mindestens zwei Endpunkten ist mit der abgeschlossenen Strecke homöomorph.

In meiner Arbeit wird nun gezeigt, dass die Voraussetzung der Kompaktheit in diesem Satze *aus den übrigen Voraussetzungen folgt.* Darüber hinaus gelange ich zu einer *Klassifikation aller zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung in beliebigen topologischen Räumen*, welche sich auf folgenden Satz stützt:

Jede zusammenhängende Menge von höchstens zweiter Ordnung kann so linear oder zyklisch geordnet werden, dass das natürliche Umgebungssystem dieser Anordnung mit dem ursprünglichen gleichwertig ist.

[1]) Menger, Math. Annalen Bd. 95. S. 279. Ueber Menger's Kurvendefinition vgl bereits dessen Note aus dem Jahre 1921 (Proc. Ac. Amsterdam 29).

[2]) Urysohn, C. R. 175. S. 471.

[3]) Vgl. Menger, Math. Annalen 95. S. 303 (Ohne Beweis findet sich der Satz bereits in den erwähnten Noten von Menger, 1921, und Urysohn, 1922).

Daher verteilen sich die topologischen Typen zusammenhängender Mengen von höchstens zweiter Ordnung auf vier Klassen:

1) die zyklisch geordneten,
2) die linear geordneten ohne Endpunkte,
3) „ „ „ mit einem Endpunkt,
4) „ „ „ „ zwei Endpunkten.

Aus dieser Klassifikation folgert man leicht:

Die Klassen 1) und 4) enthalten alle insichbikompakten[1]) zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung und nur diese. Zu diesem auf kompakte Mengen bezüglichen Teil unseres allgemeineren Resultates gelangte bereits Menger hinsichtlich metrischer Räume, doch bediente er sich dabei verhältnismässig komplizierter Hilfsmittel, nämlich des Satzes von Hahn und Mazurkiewicz über die stetige Durchlaufbarkeit der im kleinen zusammenhängenden metrischen Kontinua, und des Satzes, dass sich in einer stetigen Kurve je zwei Punkte durch einen einfachen Bogen verbinden lassen.

In separablen Räumen besteht jede der vier Klassen aus einem einzigen Typus, die erste aus dem des Kreises und die anderen drei aus denen der Intervalle.

Im folgenden legen wir die betrachteten Mengen selbst als Räume zu grunde; als Umgebungen nehmen wir die offenen Mengen mit zwei Grenzpunkten, bezw. mit einem Grenzpunkt, was gestattet ist[2]), da die Ordnung ≤ 2 ist.

I. *Jeder Raum von endlicher Ordnung ist regulär*, d h. *zu jedem* U_a *gibt es ein* V_a, *so dass* $\overline{V}_a \subset U_a$ [3]).

Denn besteht die Grenze von U_a — wir bezeichnen sie mit U_{a_g} — aus endlich vielen Punkten, so gibt es nach den Hausdorff'schen Axiomen B und D ein V_a, so dass keiner dieser endlich vielen Punkte in $\overline{V}_a$ enthalten ist und dass $V_a \subset U_a$; dann ist aber auch $\overline{V}_a \subset U_a$.

II. *Jede zusammenhängende Menge* M *von endlicher Ordnung ist zusammenhängend im kleinen* d. h.[4]) ist U_a eine beliebige Umge-

[1]) Vgl. über diese Mengen Vietoris, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31, S. 187, wo sie unter dem Namen »lückenlose Mengen« eingeführt wurden, und Alexandroff und Urysohn, Math. Annalen 92, S. 260.

[2]) Vgl. Menger, Math. Annalen 95, S. 281.

[3]) Vietoris, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31, S. 172 und Alexandroff und Urysohn, Math. Annalen, 92, S. 263.

[4]) Hahn, Fund. Math. Bd. 2, S. 191.

bung von a und K_a die a enthaltende Komponente von U_a, so ist a innerer Punkt von K_a.

Denn sei V_a eine Umgebung von a, deren Grenze aus endlich vielen Punkten $a_1, a_2, \dots a_n$ besteht, und so daß $\overline{V}_a \subset U_a$ gilt. Es enthält jede Quasikomponente [1]) von $\overline{V}_a$ einen Punkt der Grenze von V_a; denn enthielte Q_x, die Quasikomponente eines Punktes x von $\overline{V}_a$, keinen Grenzpunkt von V_a, dann sei A_i eine x, aber nicht a_i enthaltende, von ihren Komplement auf $\overline{V}_a$ abgesonderte [2]) Teilmenge von $\overline{V}_a$ $(i = 1, 2, \dots n)$; dann ist der Durchschnitt $\overset{n}{\underset{i=1}{D}} A_i$ von $\overline{V}_a - \overset{n}{\underset{i=1}{D}} A_i$ abgesondert und zu V_{ag} fremd. Mithin ist $M = (M - \overset{n}{\underset{i=1}{D}} A_i) + \overset{n}{\underset{i=1}{D}} A_i$ eine Zerspaltung von M in zwei abgesonderte Teile; dies ist aber unmöglich, da M zusammenhängend ist. Demnach und weil $\overline{V}_a$ nur endlich viele Grenzpunkte hat, hat es auch nur endlich viele Komponenten [3]); diese sind alle in $\overline{V}_a$ offen, insbesondere die, welche a enthält; daher gibt es eine Umgebung $W_a \subset V_a$, die ganz in einem zusammenhängenden Teil von $\overline{V}_a$ und daher von U_a liegt; mithin ist $W_a \subset K_a$; q. e. d. [4])

III. *Jede zusammenhängende Menge K von endlicher Ordnung zerfällt nach Weglassung endlich vieler Punkte in höchstens endlich viele Komponenten, von denen sich jede in mindestens einem der weggelassenen Punkte häuft.*

Seien $a_1, a_2, \dots a_n$ die weggelassenen Punkte. Da K zusammenhängend im kleinen ist, hat $K - (a_1, \dots a_n)$ als offene Menge offene Komponenten [5]); da K zusammenhängend ist, können diese Komponenten nicht auch in K abgeschlossen sein; sie sind aber in $K - (a_1 \dots a_n)$ abgeschlossen; mithin muss sich jede in einem der Punkte $a_1, a_2, \dots a_n$ häufen; in jedem dieser Punkte können sich aber nur endlich viele häufen (anderenfalls wäre die Ordnung in diesem Punkte nicht endlich; denn bezeichnen wir den Punkt mit a und nehmen wir an, die Ordnung wäre gleich n; dann greifen wir aus $n + 1$ der

[1]) Haussdorff, Mengenlehre, 1914 S. 248.

[2]) Zwei Mengen A, B heissen abgesondert, wenn $A\overline{B} + \overline{A}B = 0$.

[3]) Bei endlicher Quasikomponentenzahl fallen Komponenten und Quasikomponenten zusammen; ebenso bei endlicher Komponentenzahl. (Hausdorff, S. 248, 249).

[4]) Vgl. für diesen Beweis in kompakten metrischen Räumen Menger, Math. Ann. 95. S. 300. Den allgemeinen Beweis verdanke ich Herrn W. Hurewicz.

[5]) Hahn, Fund. Math. Bd. 2, S. 191.

sich in a häufenden Komponenten je einen Punkt heraus und wählen U_a so, dass es keinen dieser Punkte enthält; jede der betrachteten Komponenten schneidet dann U_{ag}. U_{ag} besteht also mindestens aus $n + 1$ Punkten).

Mithin hat $K - (a_1, \dots a_n)$ nur endlich viele Komponenten.

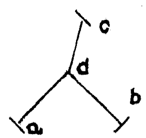
III a. *Eine zusammenhängende Menge K von höchstens zweiter Ordnung zerfällt durch Weglassung eines Punktes in höchstens zwei Komponenten.* Denn nach dem Vorigen ist die Ordnung von K in a $(a \varepsilon K)$ mindestens gleich der Anzahl der Komponenten von $K - (a)$. Sind a und b zwei Punkte von K, so hat $K - (a, b)$ höchstens 3 Komponenten. Denn wie man leicht sieht, gibt es mindestens eine, die sich in a und b häuft (anderenfalls wäre K nicht zusammenhängend), und weder in a noch in b können sich mehr als zwei häufen.

Statt „zusammenhängende Menge von höchstens zweiter Ordnung" soll im folgenden „unverzweigte Kurve" geschrieben werden.

Der folgende Satz IV ist der wichtigste Hilfssatz der Untersuchung; die Endresultate folgen dann durch einfache Schlüsse.

IV. *Hat eine unverzweigte Kurve K mindestens 2 Endpunkte a, b, so ist sie absolut abgeschlossen* [1]).

Der Gedankengang des Beweises ist folgender: könnte man zu K einen Punkt c hinzufügen, in dem sich K häuft



so sagt die Anschauung, dass dann in K ein Punkt d von mindestens dritter Ordnung auftreten müsste; einen solchen Punkt suchen wir nun durch eine Beziehung, die er zu K hat, zu charakterisieren und beweisen dann, dass sich diese Beziehung mit einer Ordnung $\leqq 2$ nicht verträgt.

Wir betrachten alle x von der Eigenschaft, dass die a enthaltende Komponente von $K - (x)$ sich in c nicht häuft und b nicht enthält. Diese Komponente nennen wir dann K_{ax}; für solche x, welche die obige Eigenschaft nicht haben, soll K_{ax} nicht definiert werden. Die Vereinigung aller K_{ax} nennen wir S.

Dann ist weder S noch $K - S$ leer und S häuft sich nicht in b. Denn ist U_a^x eine Umgebung von a, welche b nicht enthält, sich in c nicht häuft und deren Grenze nur aus x besteht, so ist $U_a^x = K_{ax}$

[1]) D. h. die Menge ist in jedem sie enthaltenden Raum abgeschlossen. Alexandroff und Urysohn, Math. Annalen Bd. 92, S. 261.

(denn in diesem Falle hat $K-(x)$ zwei Komponenten, von denen die eine in U_a^x, die andere ganz ausserhalb $\overline{U}_a^x$ liegt). Also ist S nicht leer. Ist U_b^y eine Umgebung von b, $\overline{U}_{b_y}^y=(y)$; a, c nicht in $\overline{U}_b^y$ enthalten, so ist U_b^y zu allen K_{ax} fremd; denn liegt x ausserhalb $\overline{U}_b^y$ oder ist $x=y$, so ragt, wie man leicht einsieht, nur eine Komponente von $K-(x)$ in U_b^y hinein; diese enthält b und ist mithin kein K_{ax}; ist aber $x \varepsilon U_b^y$ so hat nur eine Komponente von K (x) Punkte ausserhalb U_b^y und diese häuft sich in c; es gibt also in diesem Fall kein K_{ax}.

Mithin häuft sich S nicht in b.

Da S als Vereinigung offener Mengen offen und K zusammenhängend ist, so muss es in $K-S$ einen Punkt d geben, in dem sich S häuft; nach dem Vorigen ist $d \neq b$.

Wenn wir nun voraussetzen dass K auch in d von höchstens zweiter Ordnung ist, so können wir ein K_{ax}, in dem d enthalten ist, angeben und *dies ist der gesuchte Widerspruch*

Denn ist U_d eine Umgebung von d, welche höchstens 2 Grenzpunkte hat, und enthält $\overline{U}_d$ weder a noch b noch c, *so ist U_d zusammenhängend* Denn liesse sich U_d in die abgesonderten Teile U_1 und U_2 spalten ($d \varepsilon U_1$), so gäbe es ein x, so dass K_{ax} in U_1 hineinragt (denn U_1 ist offen). K_{bx} sei die zweite Komponente von $K-(x)$. Dann schneidet K_{ax} die Grenze von U_d in y, K_{bx} in z. Also ist $U_{dg}=(y,z)$. K_{ax} und K_{bx} sind natürlich auch unverzweigte Kurven. Sei L_{ax} die Komponente von $K_{ax}-(y)$, die in U_d hineinragt, L_{bx} die entsprechende Komponente von $K_{bx}-(z)$; M_{ax} und M_{bx} die beiden anderen Komponenten von $K_{ax}-(y)$, beziehungsweise $K_{bx}-(z)$ Wäre nun $x \varepsilon U_d$, so wäre $U_d=L_{ax}+(x)+L_{bx}$ und, da sich L_{ax} und L_{bx} in x häufen müssen, zusammenhängend entgegen der Voraussetzung. Anders gesagt, dass U_d sich in die abgesonderten Teile U_1 und U_2 spalten lässt, ist nur so möglich, dass x nicht in U_d enthalten ist. Dann ist aber $U_d=L_{ax}+L_{bx}$ und die Zerlegung in L_{ax} und L_{bx} ist die einzige Möglichkeit, U_d in zwei abgesonderte Teile zu spalten; da $d \varepsilon U_1$ und $d \varepsilon L_{bx}$, so gilt $U_1=L_{bx}$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass K_{ax} in U_1 hineinragt; denn K_{ax} und L_{bx} sind fremd. U_d ist also zusammenhängend und daraus folgt wieder $x \varepsilon U_d$. Schliesslich erhalten wir also: $U_d=L_{ax}+(x)+L_{bx}$.

Daraus ergibt sich folgende Zerlegung: $K-(z)=(M_{ax}+(y)+L_{ax}+(x)+L_{bx})+M_{bx}$. Die Menge $M_{ax}+(y)+L_{ax}+(x)+L_{bx}$ (wir schreiben dafür K_{as}) ist zusammenhängend, enthält a und d, aber

nicht b und häuft sich nicht in c; wie man sofort einsieht, ist K_{as} eine Komponente von $K-(z)$. d ist also in einem „K_{ax}" enthalten, nämlich in K_{az}, womit der Widerspruch hergestellt ist.

V. *Enthält eine unverzweigte Kurve K zwei Punkte a, b, so dass $K-(a)$ und $K-(b)$ zusammenhängend sind, so ist K absolut abgeschlossen.*

Dann liesse sich zu K ein Punkt c hinzufügen, in dem sich K häuft, so gehen wir folgendermassen vor: Wir legen um a eine Umgebung U_a, so dass $\overline{U}_a$ weder b noch c enthält. Da U_{ag} aus höchstens zwei Punkten besteht, so zerfällt $K-U_{ag}$ nach III a in höchstens drei Komponenten. K_1 sei die a enthaltende, K_2 die b enthaltende. Gibt es keine dritte, so haben K_1 und K_2 einen gemeinsamen, in U_{ag} liegenden Häufungspunkt y. *Dieser ist ein Endpunkt von* $K_2+(y)$. Drei Komponenten kann $K-U_{ag}$ nur dann haben, wenn U_{ag} aus zwei Punkten x, y besteht. Dann häuft sich eine Komponente — K_x — in x, aber nicht in y, eine — K_y — in y, aber nicht in x, eine — K_{xy} — in x und y. *Dann ist* $K_1 \neq K_{xy}$. Denn anderenfalls gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es gibt eine Komponente L_{xy} von $K_{xy}-(a)$, die sich in x und y häuft; dann ist $L_{xy}+(x,y)$ eine unverzweigte Kurve mit den Endpunkten x und y (denn von den beiden Grenzpunkten einer genügend kleinen Umgebung von x (oder y) muss einer ausserhalb K_{xy} liegen); $L_{xy}+(x,y)$ muss also nach IV abgeschlossen sein; es häuft sich aber in a.

2. Eine der beiden Komponenten von $K_{xy}-(a)$ häuft sich in x, aber nicht in y; diese heisse L_x; die andere, L_y, häuft sich in y, aber nicht in x. Dann wäre: $K-(a)=(K_x+(x)+L_x)+(K_y+(y)+L_y)$ eine Zerlegung von $K-(a)$ in zwei abgesonderte Teile; $K-(a)$ ist aber zusammenhängend.

Ebenso wie oben erhalten wir die Ungleichung $K_2 \neq K_{xy}$.

Da $K_1 \subset U_a$ ist und K_1 sich daher nicht in c häuft und $K_{xy}+(x.y)$ absolut abgeschlossen ist, so *häuft sich K_2 in c.*

Bei entsprechender Bezeichnung der Grenzpunkte von U_a ist $K_x=K_1$, $K_y=K_2$.

Wie im Fall der zwei Komponenten *ist y ein Endpunkt von* $K_2+(y)$.

Zerfällt nun $K_2-(b)$ in die beiden Komponenten L_1 und L_2, wobei etwa L_2 an y grenzt, so grenzt L_1 an x; denn würde L_1 weder an x noch an y grenzen, so wäre L_1 von $(K-(b))-L_1$ abgesondert; würde L_1 aber an y grenzen, so wäre die Ordnung in $y \geqq 3$. Also grenzt K_2 an x und y. Dann grenzt aber auch K_1 an x und y; denn sonst wäre (nach einem Schluß analog dem eben unter Fall 2 durchgeführten) $K-(b)$ nicht zusammenhängend. Die beiden Mengen $K_1+(x,y)$ und $K_2+(x,y)$ enthalten also die endpunkte x und y; daher ist $K=(K_1+(x,y))+(K_2+(x,y))$ nach IV absolut abgeschlossen.

Ist aber $K_2-(b)$ zusammenhängend, so legen wir um b eine Umgebung U_b mit höchstens zwei Grenzpunkten, so dass $\overline{U_b}$ weder y noch c enthält. L sei die Komponente von $K_2-U_{b_g}$, die sich in y häuft. Ziehen wir jetzt über K_2 und U_b dieselben Schlüsse, die wir eben über K und U_a gezogen haben, so folgt, dass *sich L in c häufen muss.*

Anderseits häuft sich aber L in einem Grenzpunkte z von U_b, in dem sich noch eine zweite Komponente von $K_2-U_{b_g}$ häuft. Dann sind y und z Endpunkte von $L+(y,z)$; $L+(y,z)$ ist absolut abgeschlossen und *kann sich daher nicht in c häufen.*

Dies ist ein Widerspruch.

VI. *Enthält eine unverzweigte Kurve K ein Punktepaar a, b, so dass $K-(a,b)$ zusammenhängend ist, so gilt:*

1. K ist ein bikompakter Lennes'scher Bogen [1]) *zwischen a und b.*

2. a und b sind Endpunkte von K [2]).

1. Um zu beweisen, dass K zwischen a und b irreduzibel [3]) ist, genügt es, zu zeigen, dass für jedes x in K, das von a und b verschieden ist, a und b in verschiedenen Komponenten von $K-(x)$ liegen. Lägen nun a und b in derselben Komponente K_{ab} von $K-(x)$, so gäbe es eine Komponente L_{ab} von $K_{ab}-(a,b)$, die sich in a und b häuft. Da $L_{ab}+(a,b)$ nach V. abgeschlossen ist, kann L_{ab} sich nicht in x häufen und ist daher von seinem Komplement auf $K-(a,b)$ abgesondert; dies widerspricht der Annahme, dass $K-(a.b)$ zusammenhängend ist. Da K nach V. absolut abgeschlossen und nach I. regulär ist, ist K bikompakt [4]).

[1]) Lennes, Am. J. of Math. Bd. 33, S. 308.

[2]) VI. 2 könnten wir aus VI. 1 nach Vietoris Monatshefte f. Math. u. Phys. Bd. 31, wo die bikompakten Lennes'schen Bögen unter dem Namen „Linienstücke in lückenlosen Bereichen" eingehend behandelt werden, schliessen. Wir beweisen es aber lieber direkt, um das Auswahlaxiom zu vermeiden.

[3]) Eine Menge heisst zwischen 2 Punkten a und b irreduzibel, wenn sie zusammenhängend ist, aber keiner ihrer echten zusammenhängenden Teile a und b enthält.

[4]) Alexandroff u. Urysohn Math. Annalen Bd. 92, S. 263. Die Benützung dieses Satzes ist die einzige Verwendung des Auswahlaxioms, die in meiner Arbeit vorkommt. Will man auch diese vermeiden, so muss man die in den Sätzen VII

2. Wäre U_a eine Umgebung von a, deren Grenze aus genau 2 Punkten x, y $(x,y\neq b)$ besteht; so zerfällt $K-(x)$ wegen der Irreduzibilität von K in 2 Komponenten; ist L die, welche y enthält, so zerfällt $L-(y)$ abermals; $K-(x,y)$ hat mithin 3 Komponenten; sei K_a die a enthaltende, so schliessen wir wie im Beweise von V., dass K_a sich nur in einem der Punkte x und y häuft. Mithin ist K_a eine Umgebung von a mit nur einem Grenzpunkt. Ebenso zeigen wir, dass b ein Endpunkt ist.

Eine unverzweigte Kurve K heisse geschlossen, wenn für jedes x von K auch $K-(x)$ zusammenhängend ist.

VII. *Jede geschlossene unverzweigte Kurve K ist Vereinigung zweier bikompakter Lennes'scher Bögen, die nur die Endpunkte gemein haben.*

Denn ist a, b ein Punktepaar aus K, so ist $K-(a,b)$ nicht zusammenhängend; denn wäre $K-(a,b)$ zusammenhängend, so zerfiele $K-(x)$ nach VI. 1 für jedes von a und b verschiedene x in zwei abgesonderte Teile und K wäre nicht geschlossen. Nun ist aber $K-(a)$ zusammenhängend; $(K-(a))-(b)$ besteht also aus 2 Komponenten K_1 und K_2, die sich beide in b häufen; ebenso schliesst man, dass sich K_1 und K_2 in a häufen. Dann ist $K=(K_1+(a,b))+(K_2+(a,b))$ eine Darstellung von K, wie sie in VII. gefordert wird.

VIII. *Jede nicht geschlossene unverzweigte Kurve K lässt sich zu einem bikompakten Lennes'schen Bogen erweitern.*

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. Es gibt mindestens 2 Punkte x, so dass $K-x$ zusammenhängend ist. Zwei solche Punkte bezeichnen wir mit a, b; dann ist auch $K-(a,b)$ zusammenhängend; denn im anderen Falle könnte man wie im Beweise von VII. schliessen, dass K eine Vereinigung zweier bikompakter Lennes'scher Bögen ist, die nur die Endpunkte gemein haben; dann wäre aber K, wie man leicht sieht, geschlossen.

und VIII. ausgesprochenen Endresultate dadurch einschränken, dass man in diesen Sätzen die Worte „bikompakter Lennes'scher Bogen" ersetzt durch die Worte Lennes'scher Bogen von der Art, dass, wenn man ihn nach Lennes als geordnete Menge betrachtet, sein „natürliches" Umgebungssystem mit dem ursprünglichen überstimmt. Dabei wird das natürliche Umgebungssystem einer geordneten Menge folgendermassen definiert: ist x ein Punkt vor a und y ein Punkt nach a, so soll die Menge aller Punkte, welche nach x und vor y liegen, eine Umgebung von a bilden.

Weil nun $K-(a,b)$ zusammenhängend ist, so ist nach VI. 1. K selbst ein bikompakter Lennes'scher Bogen.

2. Es gibt nur einen Punkt a in K, so dass $K-(a)$ zusammenhängend ist. Dann führen wir einen idealen Punkt b ein; ist x ein beliebiger Punkt von K und K_x die Komponente von $K-(x)$, die a nicht enthält, so soll $K_x+(b)$ eine Umgebung von b sein. Von den Umgebungsaxiomen sind für dieses System A, C und D trivial; B, das Durchschnittsaxiom, beweist man folgendermassen: sind x, y zwei von a verschiedene Punkte von K, so zerfällt $K-(x,y)$, wie man leicht erkennt, in 3 Komponenten (dies schliesst man wie bei VI. 2); die, welche a enthält, häuft sich nur in einem der Punkte x, y, zum Beispiel in x (dies zeigt man wie im Beweis von V.); von den beiden übrigen heisse die, welche sich in x und y häuft, K_{xy}; und die, welche sich nur in y häuft, K_y. Dann sind die zu x, beziehungsweise zu y gehörigen Umgebungen von b: $K_{xy}+(y)+K_y+(b)$ und $K_y+(b)$; eine ist direkt in der andern enthalten. Da $(K+(b))-(a,b)$ zusammenhängend ist, so ist nach VI. 1. $K+(b)$ ein bikompakter Lennes'scher Bogen.

3. Für jedes x von K zerfällt $K-(x)$.

Sei x ein Punkt von K und seien K_1 und K_2 die beiden Komponenten von $K-(x)$. Dann sind $K_1+(x)$ und $K_2+(x)$ solche nicht geschlossene unverzweigte Kurven, wie sie unter 2. behandelt wurden; erweitern wir wie dort $K_1+(x)$ durch einen Punkt a, ebenso $K_2+(x)$ durch b, so ist $K+(a,b)$ ein bikompakter Lennes'scher Bogen, wie aus VI. 1 hervorgeht.

Mithin kann jede nicht geschlossene unverzweigte Kurve nach Lennes geordnet werden; dass das natürliche Umgebungssystem dieser Anordnung mit dem ursprünglichen gleichwertig ist, könnten wir mit Vietoris aus der Bikompaktheit schliessen [1]; es ist aber hier direkt ersichtlich, dass dies der Fall ist, da, wie man leicht erkennt, jede genügend kleine der durch die Ordnung 1 oder 2 geforderten Umgebungen mit genau einem beziehungsweise genau zwei Grenzpunkten eine natürliche Umgebung ist.

Die Sätze VII. und VIII. ergeben zusammen die in der Einleitung zusammengefassten Resultate; dabei ergibt VII den Fall 1 und VIII 1, 2, 3 die Fälle 4, 3, 2 der Einleitung (S. 97).

[1]) **Vietoris** Monatshefte f. Math. und. Phys., Bd. 31, S. 194.

Sur une propriété générale de fonctions.

Par

S. Saks et W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème connu de M. Vitali [1]) il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$, définie dans l'intervalle $I=(0,1)$, une fonction $\varphi(x)$ de la classe $\leqslant 2$, telle que $f(x)=\varphi(x)$ pour tous les points x de l'intervalle I, sauf les points formant un ensemble de mesure nulle.

Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante qui peut être regardée comme une extension du théorème de M. Vitali aux fonctions quelconques (mesurables ou non):

Théorème: *$f(x)$ étant une fonction définie dans l'intervalle $I=(0,1)$, il existe toujours une fonction $\varphi(x)$ de la classe $\leqslant 2$, telle que, quel que soit le nombre positif ε, l'inégalité*

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \tag{1}$$

a lieu pour tous les nombres x de I sauf les nombres formant un ensemble de mesure intérieure nulle.

Vu le théorème de Vitali, il suffira évidemment de démontrer qu'il existe une fonction *mesurable* $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions de notre théorème.

Lemme 1. *N étant un ensemble quelconque, et P et Q étant des ensembles mesurables, tels que*

[1]) G. **Vitali**: *Rend. Lomb.* 38 (1905), p. 599; v. aussi: W. **Sierpiński**: *Fund. Math.* t. III, p. 319.