où C est une constante absolue. Formons la somme $\varphi(t)$ pour la fonction $g(x)$, $\varphi(t)$ est conjuguée à

$$\Sigma(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i + t).$$

Donc en vertu de (1) on à

$$\text{Mes}\{|\varphi(t)| > R\} < \frac{2\pi C}{R}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx. \tag{2}$$

Soit ε arbitrairement petit. $f(x)$ peut être représentée sous la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

où $f_1(x)$ est bornée et

$$\int_0^{2\pi} |f_2(x)|\, dx < \frac{\varepsilon R}{8\pi C}.$$

La fonction $g_1(x)$ conjuguée à $f_1(x)$ est sommable vers zéro dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Donc pour ω assez petit on a

$$\delta_1 = \text{Mes}\left\{|\varphi_1(t)| > \frac{1}{2}R\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De l'autre côté selon (2) on a

$$\delta_2 = \text{Mes}\left\{|\varphi_2(t)| > \frac{1}{2}R\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ces deux inégalités on déduit pour ω assez petit

$$\text{Mes}\{|\varphi(t)| > R\} \leqslant \delta_1 + \delta_2 < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'intégrabilité (B) de $g(x)$.

On peut montrer analoguément, que $g(x)\cos nx$ et $g(x)\sin nx$ sont aussi intégrables (B) et que la série de Fourier-(B) de $g(x)$ est conjuguée à la série de Fourier-Lebesgue de $f(x)$.

5. IV. 27.

Sur les points d'ordre $\mathfrak{c}$ dans les continus.

Par

C. Kuratowski et S. Mazurkiewicz (Varsovie).

Un point p d'un ensemble (plan) E est dit d'ordre $\mathfrak{c}$, lorsqu'il existe un cercle R entourant p et tel que, X étant un ensemble arbitraire ouvert dans E contenant p et contenu dans R, l'ensemble $E\overline{X} - X$ a la puissance du continu [1].

L'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$ de E est désigné par $E^{\mathfrak{c}}$.

Le but de cette note est de construire un continu plan K tel que

$$K^{\mathfrak{c}} \neq K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}},$$

c'est-à-dire, qui contienne un point p d'ordre $\mathfrak{c}$ qui n'est pas d'ordre $\mathfrak{c}$ dans l'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$.

Une légère modification du continu K, qui consistera à le rendre *non-dense*, fournit la solution positive d'un problème de M. Menger [2].

1. Soit $C_1, C_2, C_3, \ldots$ la suite des carrés construits sur les segments $[0,1]$, $[1, 1+\frac{1}{4}]$, $[1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}], \ldots$ de l'axe des x (au-dessus de cette axe). $D_1, D_2, D_3, \ldots$ désignent resp. les diagonales de ces carrés inclinées d'angle $\frac{\pi}{4}$ sur l'axe des x; p désigne le point $(1\frac{1}{3}, 0)$.

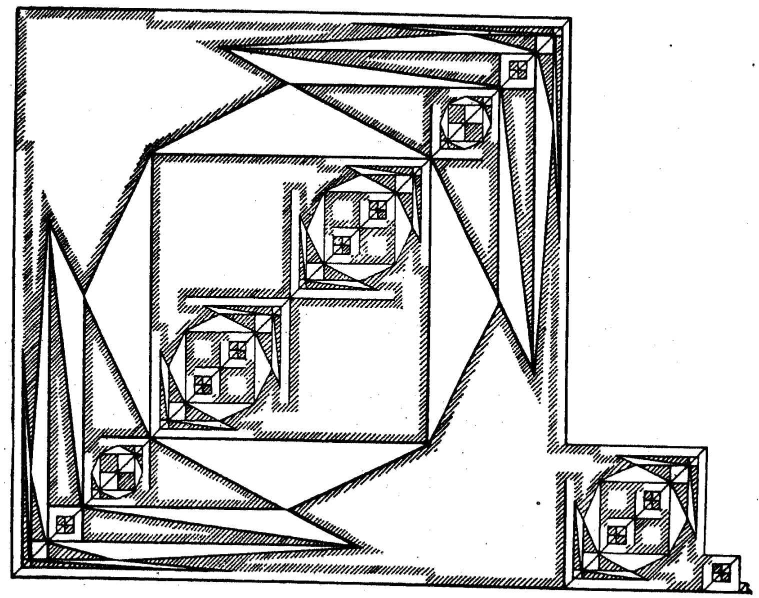
L'idée de construction consiste à placer dans chaque C_n un continu K_n tel que 1°: aucun ensemble fermé dénombrable ne coupe [3] K_n entre les deux sommets de C_n étrangers à D_n, 2°: l'ensemble $D_n \cdot K_n^{\mathfrak{c}}$ soit dénombrable. La propriété 1° entraîne que $p \,\varepsilon\, K^{\mathfrak{c}}$ et 2° entraîne que p *non* $\varepsilon K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$, où on a posé $K = p + \Sigma K_n$.

[1]) *Voir*: K. Menger, *Grundzüge einer Theorie von Kurven*, Math. Ann. 95 (1925), p. 280. [2]) Ibid. p. 290.

[3]) Un ensemble Z coupe un continu Q entre a et b (où $(a, b) \subset Q - Z$), lorsqu'il n'existe aucun continu X tel que $(a, b) \subset X \subset Q - Z$.

2. Avant de définir le continu K, nous allons établir ce que nous entendons par $C_{k_1 \dots k_n}$ et par $F(C_{k_1 \dots k_n})$, le système $k_1 \dots k_n$ étant formé de nombres naturels.

$C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots$ est la suite des carrés situés le long de la diagonale D_1 de C_1 et ayant pour sommets les points à coordonnées: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 1-\frac{1}{8}$ etc. En remplaçant dans cette définition le carré C_1 par $C_{k_1 \dots k_{n-1}}$ (dont le côté est considéré comme d'unité de longueur) on obtient la définition de $C_{k_1 \dots k_{n-1} k_n}$.



(les régions à contour ombré sont à regarder comme pleines, donc contenues dans K).

L'introduction de la fonction $F(C)$ a pour but de faire correspondre au carré C une famille de triangles (non-ombrés sur la figure) que l'on imaginera enlevés de C.

Soit $r_1, r_2, \dots r_n, \dots$ une suite de nombres réels *dense* dans l'intervalle $0, \frac{3}{4}$ et telle que $\frac{1}{2^n} < r_n \leq \frac{3}{4}$ (nous admettons, en outre, que $r_1 = \frac{3}{4}$). Soient a_n le point $\left(r_n, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et T_n le triangle à sommets a_n, $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et a_{n+1}.

Nous désignons par $F(C_1)$ la somme des intérieurs des triangles T_n et de tous les triangles qui leur sont symétriques par rapport soit au centre du carré C_1 soit à l'une ou l'autre diagonale de C_1.

La définition de $F(C_{k_1 \dots k_n})$, pour le cas général, s'obtient immédiatement de celle de $F(C_1)$ en considérant le carré $C_{k_1 \dots k_n}$ au lieu du carré C_1.

Définition du continu K:

$$K = p + \sum_{n=1}^{\infty} C_n - \Sigma F(C_{k_1 \dots k_n}),$$

la deuxième sommation s'étendant à tous les systèmes finis $k_1 \dots k_n$ de nombres naturels.

3. Convenons, pour abréger, d'appeler deux points x et y situés sur le contour de $C_{k_1 \dots k_n}$ points *conjugués,* lorsque la distance entre x et l'un des deux sommets de ce carré étrangers à D_{k_1} et entre y et l'autre de ces sommets est inférieure à un quart de la longueur du côté du carré $C_{k_1 \dots k_n}$. Nous établirons, à présent, la propriété suivante des points conjugués: *aucun ensemble fermé dénombrable Z ne coupe K entre deux points conjugués de $C_{k_1 \dots k_n}$ (situés en dehors de Z).*

Il suffit évidemment de prouver ladite propriété pour le carré C_1.

Or, supposons que Z soit un ensemble fermé dénombrable qui coupe K entre deux points x et y du contour de C_1 situés respectivement à distance $< \frac{1}{4}$ des sommets $(0,1)$ et $(1,0)$ de ce carré. L'ensemble Z étant dénombrable, il existe dans l'intervalle $0, \frac{3}{4}$ un nombre réel α tel que ni $(\alpha, 0)$ ni $(0, \alpha)$ n'appartient à Z. Cet ensemble étant, en outre, fermé et la suite $\{r_n\}$ étant dense dans l'intervalle $0, \frac{3}{4}$, la suite $\{a_n\}$ contient une suite $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$ qui converge vers $(\alpha, 0)$ et qui est situé entièrement en dehors de Z. De plus, comme $\lim_{n=\infty} a'_{i_n} = (0, \alpha)$, où a'_n désigne le point $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, r_n\right)$, on peut admettre que la suite $a'_{i_1}, a'_{i_2}, \dots$ est aussi située en dehors de Z.

Or, les points a_{i_n} et a'_{i_n} sont les sommets de deux triangles ayant pour bases resp. le côté droit et la base supérieure d'un même carré (nommons le C_{1k_n}). Ces points étant étrangers à Z, on voit aussitôt que Z ne coupe K entre x et aucun point u_n de la base supérieure de C_{1k_n} (qui n'appartient pas à Z), ainsi que entre y et aucun point v_n du côté droit de C_{1k_n}. Les points u_n et v_n peuvent être supposés conjugués dans C_{1k_n} et situés en dehors de Z, puisque, par hypothèse, Z est dénombrable.

Comme, d'autre part, Z coupe K entre x et y, on en conclut que Z coupe K entre deux points conjugués de C_{1k_n}, (u_n et v_n) pour $n = 1, 2, \dots$ De là résulte 1° que $Z . C_{1k_n} \neq 0$, d'où $s_1 \varepsilon Z$, s_1 désignant le sommet inférieur gauche de C_1, 2° que Z coupe K entre deux points conjugués d'une suite de carrés $C_{1k_n l_m}$, $m = 1, 2, \dots$ (pour s'en convaincre on remplacera C_1 par C_{1k_n} dans le raisonnement qui précède). Mais 2° entraîne que la suite des sommets inférieures gauches $s_{11}, s_{12}, \dots$ des carrés $C_{1k_1}, C_{1k_2}, \dots$ appartient à Z. Comme $\lim\limits_{n=\infty} s_{1n} = s_1$, on arrive à la conclusion que Z contient un ensemble dense en soi de sommets: $s_1, s_{11}, s_{12}, \dots s_{21}, \dots s_{111}, \dots$. ce qui contredit l'hypothèse que Z est fermé et dénombrable.

La propriété des points conjugués annoncée au début du N 3 est ainsi établie

4. Cette propriété nous permettra à présent de prouver que $p \varepsilon K^{\mathfrak{c}}$.

Il suffit évidemment de démontrer que. X désignant un ensemble ouvert dans K contenant p et disjoint du côté gauche de C_1, l'ensemble $Z = \overline{X} - X$ est non-dénombrable.

Supposons par contre que Z soit dénombrable.

Or, on voit facilement que l'ensemble X contient, comme ensemble ouvert dans K, les carrés C_n à partir d'un indice suffisamment grand. Il existe donc parmi les carrés dont le côté gauche est disjoint de X un carré ayant l'indice le plus grand. Rien n'empêche de supposer que C_1 est ce carré.

Il en résulte que le segment $[0, \frac{1}{4}]$ de la droite $x = 1$ contient un point y qui appartient à X D'autre part, le segment $[\frac{3}{4}, 1]$ du côté gauche de C_1 contient un point x qui n'appartient pas à $\overline{X}$, car ce segment est disjoint de X et l'ensemble $Z = \overline{X} - X$ a été supposé dénombrable.

Nous parvenons ainsi à la conclusion que l'ensemble fermé dénombrable Z coupe K entre deux points conjugués (x et y) du carré C_1 qui sont situés en dehors de Z, — conclusion qui contredit le résultat du N 3.

La proposition $p \varepsilon K^{\mathfrak{c}}$ se trouve ainsi établie.

5. Nous allons maintenant prouver que $D_n . K^{\mathfrak{c}}$ est dénombrable.

Il suffit évidemment de montrer que $K^{\mathfrak{c}}$ ne contient aucun point q de D_1 dont les coordonnées soient des fractions binaires infinies.

Or, les sommets des carrés $C_{k_1 \dots k_n}$ ayant pour coordonnées des fractions binaires finies, le point q est situé à l'intérieur de chaque carré $C_{k_1 \dots k_n}$ qui le contient. Il existe, en particulier, un carré C_{1n} qui le contient à l'intérieur. De là résulte *l'existence d'un ensemble X ouvert dans K tel que $q \varepsilon X$, $\overline{X} - X$ se compose de 4 points et X est contenu à l'intérieur de C_1*.

En effet, si C_{1n} est le carré qui a le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour sommet, on peut prendre pour X la partie de K contenue dans le carré (dépourvu des sommets) ayant ce point pour centre et les points $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ pour sommets. Dans le cas contraire, X dénote la partie de K contenue dans le quadrilatère formé du carré C_{1n} et des deux triangles contigus, les sommets du quadrilatère étant exclus.

La proposition que nous venons de démontrer subsiste évidemment, lorsqu'on considère au lieu de C_1 un carré arbitraire $C_{k_1 \dots k_n}$. Le diamètre de ce carré étant aussi petit que l'on veut, il en résulte que q est d'ordre 4 dans K, donc q *non* $\varepsilon K^{\mathfrak{c}}$.

Ceci établi, nous en concluons facilement que p *non* $\varepsilon K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$.

En effet, soit X_n l'ensemble de points de $K^{\mathfrak{c}}$ situés à droite de de la diagonale D_n. Cet ensemble est donc ouvert dans $K^{\mathfrak{c}}$, contient p et l'ensemble $K^{\mathfrak{c}} . \overline{X}_n - X_n$, comme égal à $D_n . K^{\mathfrak{c}}$, est (au plus) dénombrable. Le diamètre de X_n tendant vers 0, lorsque n tend vers l'infini, on a: p *non* $\varepsilon K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$ (p est, en réalité, d'ordre $\aleph_0$ dans $K^{\mathfrak{c}}$) [1]).

L'inégalité $K^{\mathfrak{c}} \neq K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$ est ainsi établie.

6. Le continu K peut être transformé en un continu *non-dense* („courbe") vérifiant cette inégalité.

En effet, K est somme d'un continu non-dense (formé des contours des carrés $C_{k_1 \dots k_n}$, des diagonales D_n et du point p) et d'une famille des triangles n'empiétant pas les uns sur les autres. En remplaçant chaque triangle par un continu qui contient le contour du triangle et qui est homéomorphe au continu de M. Sierpiński [2]), composé uniquement de points d'ordre $\mathfrak{c}$, — on parvient au continu cherché.

[1]) Cela résulte, d'ailleurs, de la formule générale établie par M. Menger: $K^{\mathfrak{c}} \subset K^{\mathfrak{c}\aleph_0} + K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$, ibid. p. 289.

[2]) C. R. 162, p. 629.

Il est enfin à remarquer que l'on peut transformer K en un continu *jordanien* (image continue de l'intervalle).

Désignons à ce but par J l'ensemble formé d'une suite infinie de segments verticaux issus des points rationnels de l'intervalle 01, la longueur de ces segments tendant vers 0[1]).

Ajoutons au contour du carré C_1 l'ensemble J ainsi que les trois ensembles qui lui sont symétriques par rapport soit au centre du carré, soit à l'une ou l'autre diagonale de ce carré. Puis, ajoutons au contour de chaque carré $C_{k_1 \dots k_n}$ une figure analogue (convenablement diminuée). Le continu ainsi obtenu est jordanien et répond au problème.

[1]) Cf. Janiszewski, Thèse, Paris 1911, p. 18.

The Double-Elliptic Case of the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert Problem of the Foundations of Geometry [1]).

By

R. G. Lubben (Austin, Texas, U. S. A.).

Introduction.

In his paper *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, Hilbert[2]) formulates a set of axioms concerning a group of motions which is sufficient to necessitate that this group should be simply isomorphic with either the Euclidean or the Bolyai-Lobatschefskian group of rigid motions in a plane. He assumes, however, that the set of points which undergoes the transformation is a number manifold. In his paper *On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert Problem of the Foundations of Geometry*, R. L. Moore[3]) gives a treatment in which this assumption is not made in advance, but in which there is a simultaneous analysis of the group of transformations and of the space which undergoes this transformation. In this paper we shall give a similar analysis for the Double-Elliptic case. After a group of preliminary theorems we shall prove that every motion distinct from the identity leaves fixed exactly two points, which we shall call poles. We shall then introduce the notions of great circles, intervals, congruence of intervals, of triangles and of angles.

[1]) Dissertation offered to the Department of Pure Mathematics, University of Texas, U. S. A., in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, June 1925. Presented before the American Mathematical Society at Ithaca, New York, September 10, 1925.

[2]) *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, David Hilbert, Mathematische Annalen, Vol. 56 (1902), pp. 381—422. This paper will be referred to hereafter as „H. G."

[3]) Cf. American Journal of Mathemetics, Vol. 41 (1919), pp. 299—319. We shall referr to this paper hereafter as „L. R. H. H."