Es sei bemerkt, dass es Konvergenzkontinua gibt von der Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte $K + \Sigma K_n$ die Ebene lokal in unendlich viele Gebiete zerschneidet, wie auch solche, wo es einen, bzw. zwei Ausnahmepunkte gibt.

Ein Beispiel für den ersten Fall bietet das Kontinuum ($x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$) mit K_n $\left(y = \sin\frac{1}{x}, \frac{1}{(k+2)\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k\pi}\right.$ wo $\left.k = 1 + 3n \text{ ist}\right)$; für den zweiten Fall, das Kontinuum ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) mit $K_n\left(y = \sin\frac{1}{x}, \frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k\pi} \text{ wo } k = 2n \text{ ist}\right)$; hier ist nur $(0, 0)$ ein Ausnahmepunkt.

Der dritte Fall tritt ein für das Kontinuum ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) mit $K_n\left(x = \frac{1}{n}, 0 \leqslant y \leqslant 1\right)$; hier sind $(0, 0)$ und $(0, 1)$ zwei Ausnahmepunkte.

Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Soit $f(x)$ la fonction possédant la période $b - a$. Soit

$$a \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \xi_i \leqslant x_i \leqslant \ldots \xi_n \leqslant b \quad (x_0 = a,\ x_n = b)$$

une subdivision de ab. M. Denjoy[1]) dit que $f(x)$ est *intégrable au sens (B)* et que l'intégrale

$$(B)\int_a^b f(x)\,dx$$

a pour valeur I, si, lorsque le pas ω de la subdivision x_i tend vers zéro, la mesure de l'ensemble des t vérifiant les relations

$$|\,I - \varphi(t)\,| = |\,I - \Sigma(x_i - x_{i-1})f(\xi_i + t)\,| > R,$$
$$0 < t < b - a,$$

tend vers zéro, quel que soit le nombre positif R indépendant de ω.

M. Denjoy a démontré que toute fonction sommable est intégrable *(B)*. Notre bût est de montrer, que *toute fonction*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d_\alpha$$

conjuguée à une fonction sommable $f(x)$ de période 2π est aussi intégrable (B). On sait que parmis ces fonctions $g(x)$ il y en de telles, qui ne sont sommables dans aucun intervalle.

Nous avons établi ailleurs[2]) l'inégalité

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Mes}\{\,|\,g(x)\,| > R\,\} < \frac{C}{R}\int_0^{2\pi} |\,f(x)\,|\,dx,$$

[1]) *Sur l'intégration riemanienne*, Comptes Rendus, t. 169, p. 219.

[2]) Fundamenta Mathematicae, t. VII, p. 25.

où C est une constante absolue. Formons la somme $\varphi(t)$ pour la fonction $g(x)$, $\varphi(t)$ est conjuguée à

$$\Sigma(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i + t).$$

Donc en vertu de (1) on a

$$\text{Mes}\{|\varphi(t)| > R\} < \frac{2\pi C}{R} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx. \tag{2}$$

Soit ε arbitrairement petit. $f(x)$ peut être représentée sous la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

où $f_1(x)$ est bornée et

$$\int_0^{2\pi} |f_2(x)|\, dx < \frac{\varepsilon R}{8\pi C}.$$

La fonction $g_1(x)$ conjuguée à $f_1(x)$ est sommable vers zéro dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Donc pour ω assez petit on a

$$\delta_1 = \text{Mes}\left\{|\varphi_1(t)| > \frac{1}{2} R\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De l'autre côté selon (2) on a

$$\delta_2 = \text{Mes}\left\{|\varphi_2(t)| > \frac{1}{2} R\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ces deux inégalités on déduit pour ω assez petit

$$\text{Mes}\{|\varphi(t)| > R\} \leqslant \delta_1 + \delta_2 < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'intégrabilité (B) de $g(x)$.

On peut montrer analoguément, que $g(x)\cos nx$ et $g(x)\sin nx$ sont aussi intégrables (B) et que la série de Fourier-(B) de $g(x)$ est conjuguée à la série de Fourier-Lebesgue de $f(x)$.

5. IV. 27.

Sur les points d'ordre $\mathfrak{c}$ dans les continus.

Par

C. Kuratowski et S. Mazurkiewicz (Varsovie).

Un point p d'un ensemble (plan) E est dit d'ordre $\mathfrak{c}$, lorsqu'il existe un cercle R entourant p et tel que, X étant un ensemble arbitraire ouvert dans E contenant p et contenu dans R, l'ensemble $E\overline{X} - X$ a la puissance du continu [1].

L'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$ de E est désigné par $E^{\mathfrak{c}}$.

Le but de cette note est de construire un continu plan K tel que

$$K^{\mathfrak{c}} \neq K^{\mathfrak{cc}},$$

c'est-à-dire, qui contienne un point p d'ordre $\mathfrak{c}$ qui n'est pas d'ordre $\mathfrak{c}$ dans l'ensemble des points d'ordre $\mathfrak{c}$.

Une légère modification du continu K, qui consistera à le rendre *non-dense*, fournit la solution positive d'un problème de M. Menger [2].

1. Soit $C_1, C_2, C_3, \ldots$ la suite des carrés construits sur les segments $[0,1]$, $[1, 1+\frac{1}{4}]$, $[1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}], \ldots$ de l'axe des x (au-dessus de cette axe). $D_1, D_2, D_3, \ldots$ désignent resp. les diagonales de ces carrés inclinées d'angle $\frac{\pi}{4}$ sur l'axe des x; p désigne le point $(1\frac{1}{3}, 0)$.

L'idée de construction consiste à placer dans chaque C_n un continu K_n tel que 1°: aucun ensemble fermé dénombrable ne coupe [3] K_n entre les deux sommets de C_n étrangers à D_n, 2°: l'ensemble $D_n \cdot K_n^{\mathfrak{c}}$ soit dénombrable. La propriété 1° entraîne que $p \,\varepsilon\, K^{\mathfrak{c}}$ et 2° entraîne que p *non* $\varepsilon\, K^{\mathfrak{cc}}$, où on a posé $K = p + \Sigma K_n$.

[1]) *Voir*: K. Menger, *Grundzüge einer Theorie von Kurven*, Math. Ann. 95 (1925), p. 280. [2]) Ibid. p. 290.

[3]) Un ensemble Z coupe un continu Q entre a et b (où $(a, b) \subset Q - Z$), lorsqu'il n'existe aucun continu X tel que $(a, b) \subset X \subset Q - Z$.