Soit maintenant E un ensemble jouissant de la propriété (L), et soit $f(x)$ une fonction définie et continue dans E. D'après notre lemme, nous pouvons poser $E = K + R$, où K est un ensemble de première catégorie, et $mf(R) = 0$. L'ensemble E jouissant de la propriété (L), K est un ensemble au plus dénombrable, ce qui entraîne que $mf(K) = 0$. Or, on a évidemment $f(E) = f(K+R) = f(K) + f(R)$: les formules $mf(K) = 0$ et $mf(R) = 0$ donnent donc $mf(E) = 0$, et notre proposition est démontrée.

Il en résulte (d'après le résultat de M. Lusin) que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toute image continue est de mesure nulle.*

Il est encore à remarquer que tout ensemble E jouissant de la propriété (L) satisfait à la condition (C) suivante:

(C). Quel que soit la suite infinie de nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, il existe une suite infinie des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ recouvrant E et telle que la longueur de l'intervalle δ_n est a_n, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ [1]).

Soit, en effet, E un ensemble jouissant de la propriété (L), $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite infinie donnée de nombres positifs. Soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite infinie formée de tous les nombres rationnels. Désignons par δ_{2n-1} l'intervalle $(r_n - \frac{1}{2}a_{2n-1}, r_n + \frac{1}{2}a_{2n-1})$. L'ensemble $\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 + \ldots$ est évidemment partout dense, et par-suite l'ensemble $Q = E - (\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 + \ldots)$ est non dense, donc, d'après la propriété (L), au plus dénombrable, soit $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$. Désignons par δ_{2n} l'intervalle $(q_n - \frac{1}{2}a_{2n}, q_n + \frac{1}{2}a_{2n})$. Les intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ recouvrent évidemment l'ensemble E et la longueur de δ_n est $= a_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

On pourrait encore démontrer sans peine que toute image continue d'un ensemble jouissant de la propriété (L) est un ensemble satisfaisant à la condition (C).

[1]) C'est M. E. J. Szpilrajn qui a posé récemment le problème d'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable satisfaisant à la condition (C).

La propriété de Baire de fonctions et de leurs images.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'une fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, si, quel que soit l'ensemble parfait P, elle est continue sur P quand on néglige un ensemble de première catégorie par rapport à P[1]).

On dit qu'un ensemble plan E jouit de la propriété de Baire, si tout ensemble plan parfait P, sur lequel E est de deuxième catégorie, contient une portion Π, telle que $\Pi - E$ est de première catégorie sur P[2]).

Nous appellerons *image* d'une fonction $f(x)$ (d'une variable réelle) l'ensemble $I(f)$ de tous les points (x, y) du plan, tels que $y = f(x)$.

Théorème: *Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, son image $I(f)$ jouit de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété de Baire. Pour démontrer que l'image $I(f)$ de $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, il suffira évidemment de prouver que si P est un ensemble plan parfait et borné, sur lequel $I(f)$ est partout de deuxième catégorie (c'est-à-dire de deuxième catégorie sur toute portion de P), $P - I(f)$ est de première catégorie sur P. Soit Q la projection de P sur l'axe OX: on voit sans peine que la projection Q_1 de l'ensemble $P.I(f)$ est dense dans Q, et que Q est un ensemble parfait. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété de Baire,

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. V, p. 20.

[2]) Cf. *Fund. Math.* t, IV, p. 319. On peut démontrer que pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'on ait pour tout ensemble parfait P: $PE = (F - K_1) + K_2$, où F est un ensemble fermé et K_1 et K_2 sont des ensembles de première catégorie par rapport à P.

il existe un ensemble K de première catégorie sur Q, tel que la fonction $f(x)$ est continue sur $Q-K$, et nous pouvons évidemment supposer que K est un ensemble F_σ, donc $Q-K$ — un G_δ. Désignons par I_1 la partie de l'ensemble $P.I(f)$ qui se projette sur K, et par I_2 — celle qui se projette sur $Q-K$. La fonction $f(x)$ étant continue sur l'ensemble $Q-K$ qui est un G_δ, l'ensemble I_2 est évidemment un G_δ plan, donc un ensemble jouissant de la propriété de Baire. Il suffira donc de démontrer que I_1 est de première catégorie sur P. Or, cela résulte sans peine de la remarque que l'ensemble K est de première catégorie sur la projection Q de P, et du fait que I_1 a au plus un point sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.

Notre théorème est ainsi démontré.

Il importe de remarquer que *le théorème inverse n'est pas vrai, tout au moins si l'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) *est vraie*[1]. En effet, nous prouverons que *si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une fonction d'une variable réelle*, $f(x)$, *qui ne jouit pas de la propriété de Baire et dont l'image jouit de la propriété de Baire.*

Soit E_1+E_2 une décomposition de la droite $y=0$ en deux ensembles disjoints, contenant chacun au moins un point du tout ensemble linéaire parfait[2]. M. N. Lusin a démontré qu'il existe dans chaque intervalle de longueur 1 un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait[3]: nous appellerons un tel ensemble: *ensemble de M. Lusin.* Soit L_1 un ensemble de M. Lusin, situé sur le segment $(0,0)-(1,0)$ de l'axe OY, et L_2 — un ensemble de M. Lusin situé sur le segment $(2,0)-(3,0)$ de l'axe OY. Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, les ensembles E_1, E_2, L_1 et L_2 ont évidemment la même puissance (égale à celle du continu). Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de E_1 et de L_1, et une autre entre les points de E_2 et de L_2. Si $x\in E_1$, soit $f(x)$ le point correspondant de L_1, et si $x\in E_2$, soit $f(x)$ le point correspondant de L_2. La fonction $f(x)$ sera ainsi définie pour tout x réel.

Il résulte de la définition de la fonction $f(x)$ que l'image $I(f)$ de la fonction $f(x)$ est un ensemble plan qui contient au plus un

[1] C'est un problème de M. Lusin (v. ce volume, p. 308) qui suggere la question si toute fonction dont l'image jouit de la propriété de Baire, jouit ellemême de cette propriété.

[2] Quant à l'existence d'une telle décomposition, voir p. e. *Fund. Math* t. I, p. 8.

[3] N. Lusin: *Fund. Math.* t. II, p. 155.

point de toute droite parallèle à l'axe OX et dont la projection sur l'axe OY est l'ensemble L_1+L_2. Ce dernier étant un ensemble de M. Lusin, on en conclut sans peine que $I(f)$ est un ensemble (plan) de M. Lusin[1]), donc un ensemble satisfaisant à la condition de Baire.

Or, on voit sans peine que la fonction $f(x)$ ne jouit pas de la propriété de Baire. En effet, d'après la définition de $f(x)$, nous aurons $f(x)\leqslant 1$ pour $x\in E_1$ et $f(x)\geqslant 2$ pour $x\in E_2$. Chacun des ensembles E_1 et E_2 contenant des points de tout ensemble parfait, il en résulte que pour tout ensemble parfait P les ensembles PE_1 et PE_2 sont denses dans P. La fonction $f(x)$ est donc partout discontinue sur tout ensemble parfait. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'on pourrait encore démontrer le théorème suivant:

Pour qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ *jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit que chacun des ensembles* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)>a]$ (où a est un nombre réel quelconque, ou, si l'on veut, un nombre rationnel quelconque) *jouit de la propriété de Baire*[2]).

[1] C'est M. Kuratowski qui a remarqué que tout ensemble de puissance $\aleph_1$ est une projection biunivoque d'une ensemble de M. Lusin: voir *Fund. Math.* t IV, p. 323.

[2] J'apprends que ce théorème a été connu encore en 1913 à M. O. Nikodym. Sa démonstration paraîtra prochainement dans un autre récueil.