Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. N. Lusin a démontré en 1914[1]), en admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) qu'il existe des ensembles linéaires non dénombrables E jouissant de la propriété (L) suivante:

Propriété (L): *Tout ensemble parfait non dense contient au plus un ensemble dénombrable de points de l'ensemble E.*

En 1924 M. Lavrentieff a prouvé[2]) que tout ensemble linéaire, homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété (L) est de mesure nulle. Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante:

Toute image continue d'un ensemble jouissant de la propriété (L) est un ensemble de mesure nulle.

Lemme Soit E un ensemble linéaire (infini), $f(x)$ — une fonction (réelle) définie et continue dans E. Il existe une décomposition $E = K + R$, où K est un ensemble de première catégorie et $mf(R) = 0$[2]).

Démonstration. Soit $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ un sous-ensemble dénombrable de E, dense dans E. Soient k et n deux indices donnés. La fonction $f(x)$ étant continue dans E au point p_k, il existe un

[1]) C. R. t. 158; v. aussi: M. Lavrentieff *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.

[2]) M. Lavrentieff, l. c.

[3]) $f(Q)$ désigne l'ensemble de toutes les valeurs que prend la fonction $f(x)$ pour $x \in Q$, mT désigne la mesure (lebesguienne) de l'ensemble T.

nombre positif $\delta_{k,n}$, tel que les formules

$$|x - p_k| < \delta_{k,n}, \quad x \in E \tag{1}$$

entraînent l'inégalité

$$|f(x) - f(p_k)| < \frac{1}{2^k n}. \tag{2}$$

Désignons par E_n l'ensemble de tous les points x de E qui satisfont aux inégalités

$$|x - p_k| \geqslant \delta_{k,n}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots: \tag{3}$$

l'ensemble P étant dense dans E, on voit sans peine que les ensembles E_n sont non denses, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$: l'ensemble $K = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ sera donc de première catégorie.

Posons $R = E - K$: je dis que $mf(R) = 0$.

Désignons, en effet, par U_n la somme de tous les intervalles

$$\left(f(p_k) - \frac{1}{2^k n}, \quad f(p_k) + \frac{1}{2^k n}\right) \qquad (k = 1, 2, 3, ..) \tag{4}$$

La somme de longueurs des intervalles (4) est évidemment égale à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k n} = \frac{2}{n}:$$

l'ensemble U_n est donc de mesure $\leqslant 2/n$.

Or, je dis que $f(R) \subset U_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). Soit, en effet, n un indice donné, x — un point de l'ensemble $R = E - K$: nous avons donc $x \in E$ et $x \text{ non} \in K = E_1 + E_2 + \ldots$, donc $x \text{ non} \in E_n$. Il résulte donc de la définition de l'ensemble E_n que le nombre x ne peut pas satisfaire aux inégalités (3): une au moins de ces inégalités n'est pas donc vraie, c'est-à-dire il existe un nombre naturel k (dépendant de n et de x), tel qu'on a la formule (1) qui entraîne, comme nous savons, la formule (2), ce qui prouve que $f(x)$ appartient à l'un au moins des intervalles (4), et parsuite $f(x) \in U_n$. Nous avons donc $f(R) \subset U_n$, et parsuite $m_e f(R) \leqslant m(U_n) \leqslant \frac{2}{n}$. Ceci étant vrai pour tout n naturel, nous trouvons $mf(R) = 0$, et notre lemme est démontré.

Soit maintenant E un ensemble jouissant de la propriété (L), et soit $f(x)$ une fonction définie et continue dans E. D'après notre lemme, nous pouvons poser $E = K + R$, où K est un ensemble de première catégorie, et $m f(R) = 0$. L'ensemble E jouissant de la propriété (L), K est un ensemble au plus dénombrable, ce qui entraîne que $m f(K) = 0$. Or, on a évidemment $f(E) = f(K + R) = f(K) + f(R)$: les formules $m f(K) = 0$ et $m f(R) = 0$ donnent donc $m f(E) = 0$, et notre proposition est démontrée.

Il en résulte (d'après le résultat de M. Lusin) que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toute image continue est de mesure nulle.*

Il est encore à remarquer que tout ensemble E jouissant de la propriété (L) satisfait à la condition (C) suivante:

(C). Quel que soit la suite infinie de nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, il existe une suite infinie des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ recouvrant E et telle que la longueur de l'intervalle δ_n est a_n. pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ [1]).

Soit, en effet, E un ensemble jouissant de la propriété (L), $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite infinie donnée de nombres positifs. Soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite infinie formée de tous les nombres rationnels. Désignons par δ_{2n-1} l'intervalle $(r_n - \frac{1}{2} a_{2n-1}, r_n + \frac{1}{2} a_{2n-1})$. L'ensemble $\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 + \ldots$ est évidemment partout dense, et par suite l'ensemble $Q = E - (\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 + \ldots)$ est non dense, donc, d'après la propriété (L), au plus dénombrable, soit $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots)$. Désignons par δ_{2n} l'intervalle $(q_n - \frac{1}{2} a_{2n}, q_n + \frac{1}{2} a_{2n})$. Les intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ recouvrent évidemment l'ensemble E et la longueur de δ_n est $= a_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

On pourrait encore démontrer sans peine que toute image continue d'un ensemble jouissant de la propriété (L) est un ensemble satisfaisant à la condition (C).

[1]) C'est M. E. J. Szpilrajn qui a posé récemment le problème d'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable satisfaisant à la condition (C).

La propriété de Baire de fonctions et de leurs images.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'une fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, si, quel que soit l'ensemble parfait P, elle est continue sur P quand on néglige un ensemble de première catégorie par rapport à P [1]).

On dit qu'un ensemble plan E jouit de la propriété de Baire, si tout ensemble plan parfait P, sur lequel E est de deuxième catégorie, contient une portion Π, telle que $\Pi - E$ est de première catégorie sur P [2]).

Nous appellerons *image* d'une fonction $f(x)$ (d'une variable réelle) l'ensemble $I(f)$ de tous les points (x, y) du plan, tels que $y = f(x)$.

Théorème: *Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, son image $I(f)$ jouit de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété de Baire. Pour démontrer que l'image $I(f)$ de $f(x)$ jouit de la propriété de Baire, il suffira évidemment de prouver que si P est un ensemble plan parfait et borné, sur lequel $I(f)$ est partout de deuxième catégorie (c'est-à-dire de deuxième catégorie sur toute portion de P), $P - I(f)$ est de première catégorie sur P. Soit Q la projection de P sur l'axe OX: on voit sans peine que la projection Q_1 de l'ensemble $P . I(f)$ est dense dans Q, et que Q est un ensemble parfait. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété de Baire,

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. V, p. 20.

[2]) Cf. *Fund. Math.* t, IV, p. 319. On peut démontrer que pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'on ait pour tout ensemble parfait P: $PE = (F - K_1) + K_2$, où F est un ensemble fermé et K_1 et K_2 sont des ensembles de première catégorie par rapport à P.