de ses dimensions est égal au nombre local de dimensions de l'espace R_n.

Autrement dit: à tout „intervalle" I_B de R_n, de centre B, correspond un voisinage V_A de A sur E tel que V_A soit homéomorphe à une partie P de I_B, B étant le transformé de A; et à tout voisinage W_A de A sur E correspond un intervalle J_B de R_n, de centre B, tet que J_B soit homéomorphe à une partie Q de W_A, A étant le transformé de B.

En prenant pour W_A qui est arbitraire, V_A, on voit que V_A est homéomorphe à une partie d'un „intervalle" K_B de R_n de centre B et comme K_B est homéomorphe à I_B, on voit que V_A est homéomorphe à une partie de I_B (avec correspondance de A et de B).

Finalement, à tout intervalle I_B de R_n correspond un voisinage V_A de A sur E, tel que chacun soit homéomorphe à une partie de l'autre et avec correspondance de A et B.

Ainsi, d'après notre définition générale, si un ensemble E est homogène à n dimensions, à chaque point A de E correspond un voisinage qui a le même nombre de dimensions que l'un quelconque des voisinages d'un point quelconque de R_n.

Cette fois, on voit qu'avec ce mode de définition la circonférence et la droite sont deux ensembles homogènes à un même nombre de dimensions locales; de même, pour le plan et le cercle, de même pour les surfaces de la sphère et du tore; etc.

Sur une question concernant les ensembles analytiques plans.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est la solution d'une question qui m'a été posée par M. N. Lusin.

P étant un ensemble plan donné, désignons par $g(P)$ l'ensemble de tous les points (a, b) du plan qui sont points de condensation de l'ensemble

$$P . \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=a] \text{ [1]},$$

et désignons par $\mu(P)$ l'ensemble de tous les points (a, b) de l'ensemble P, tels que

$$P . \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=a,\ y<b]=0 \text{ [2]}.$$

M. Lusin demande *quelle est la nature des ensemble $g(P)$ et $\mu(g(P))$ dans le cas, où P est un ensemble (A)?*

Nous prouverons que:

I. Si P est un ensemble (A) plan, $g(P)$ est un ensemble (A) (plan).

II. Si P est un ensemble (A) plan, $\mu(P)$ est une différence de deux ensembles (A) (plans).

De I et II résulte tout de suite que

III. Si P est un ensemble (A) plan, $\mu(g(P))$ est une différence de deux ensembles (A) (plans).

[1]) $\underset{x,y}{\mathrm{E}}[C(x,y)]$ désigne l'ensemble de tous les points (x, y) du plan satisfaisant à la condition $C(x,y)$.

[2]) Selon M. Mazurkiewicz (*Fund. Math.* t. X, p. 172) on pourrait dire que $\mu(P)$ est l'ensemble des y *minima* de l'ensemble P.

Dans le § 3 nous étudierons les projections des ensembles $\mu(P)$ sur l'axe OY, et nous donnerons une solution d'un problème de M. Mazurkiewicz qui s'y rattache.

1. Démonstration de la proposition I. Soit P un ensemble (A) plan donné. n étant un nombre naturel, désignons par Q_n l'ensemble de tous les points (a, b) du plan, tels que l'ensemble

$$(1) \qquad T_n(a,b) = P.\underset{x,y}{\mathrm{E}}\left[x=a, \quad \frac{Enb-1}{n} \leqslant y \leqslant \frac{Enb+1}{n}\right]$$

est non dénombrable, Et désignant le plus petit entier $\leqslant t$. On voit sans peine que

$$(2) \qquad g(P) = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Posons, pour n naturel et b réel:

$$(3) \qquad F_n(b) = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\left[\frac{Enb-1}{n} \leqslant y \leqslant \frac{Enb+1}{n}\right]$$

— ce seront évidemment des ensembles plans fermés.

P étant un ensemble (A), l'ensemble

$$(4) \qquad P_n(b) = P.F_n(b)$$

sera aussi un ensemble (A). Or, d'après (1), (3) et (4), nous trouvons sans peine

$$(5) \qquad T_n(a,b) = P_n(b).\underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=a].$$

D'après un théorème que nous avons démontré avec M. Mazurkiewicz[1]), si M est un ensemble (A) plan, l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que l'ensemble

$$(6) \qquad M.\underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=a]$$

est non dénombrable, est un ensemble (A) (linéaire). Il en résulte sans peine que si M est un ensemble (A) plan, l'ensemble de tous les points (a, b) du plan, tels que l'ensemble (6) est non dénombrable, est un ensemble (A) (plan).

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 166.

Donc, les ensembles $P_n(b)$ étant des ensembles (A) plans, nous concluons, d'après (5) et d'après la définition de l'ensemble Q_n, que Q_n est un ensemble (A) (pour $n = 1, 2, 3, \dots$)

La formule (2) prouve donc que l'ensemble $g(P)$ (comme produit d'une infinité dénombrable d'ensembles (A)) est un ensemble (A). La proposition I est ainsi démontrée.

2. Démonstration de la proposition II. Soit P un ensemble plan (A) donné, et désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que

$$(x,y) \,\epsilon\, P \quad \text{et} \quad z > 0;$$

on voit sans peine que l'ensemble Q est encore un ensemble (A) (dans l'espace à 3 dimensions).

Or, désignons par R l'ensemble de tous les points (x, y) du plan pour lesquels il existe au moins un point (ξ, η) de P, tel que $x = \xi$ et $y > \eta$. On voit sans peine que l'ensemble R est une image univoque et continu de l'ensemble Q: en effet, on obtient une transformation continue de Q en R en faisant corespondre au point (x, y, z) de Q le point $(x, y+z)$ de R. Donc R, comme image continue d'un ensemble (A), est un ensemble (A).

Or, on a évidemment:

$$(7) \qquad \mu(P) = P - R:$$

P et R étant des ensembles (A), $\mu(P)$ est une différence de deux ensembles (A), et la proposition II est démontrée.

En particulier, si P est un ensemble plan mesurable B, il résulte tout de suite de la formule (7) que l'ensemble $\mu(P)$ est complémentaire d'un ensemble (A): c'est une proposition, démontrée (par une voie différente) par M. Mazurkiewicz[1]).

Dans le cas général, où P est un ensemble (A) plan quelconque, $\mu(P)$ n'est pas nécessairement un ensemble complémentaire d'un ensemble (A). En effet, soient E_1 et E_2 deux ensembles (A) linéaires quelconques. Désignons par H_1 l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \,\epsilon\, E_1$ et $y = 0$, et par H_2 l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \,\epsilon\, E_2$ et $y = -1$, et posons $P = H_1 + H_2$: ce sera évidemment un ensemble (A) (plan). On voit sans peine que $\mu(P).\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y=0] = E_1 - E_2$. Or, on peut choisir les

[1]) *Fund. Math.* t. X, p. 172. La démonstration de M. Mazurkiewicz s'applique encore à la proposition II.

ensembles (A) E_1 et E_2 de sorte que l'ensemble $E_1 - E_2$ ne soit pas ni un ensemble (A), ni un complémentaire d'un ensemble (A) [1]). Dans ce cas, comme on le voit sans peine, l'ensemble $\mu(P)$ ne sera pas ni un ensemble (A), ni un complémentaire d'un ensemble (A).

3. Nous prouverons maintenant que *les projections sur l'axe OY des ensembles $\mu(F)$, où F sont des ensembles plans fermés, coïncident avec les ensembles (A) linéaires.*

En effet, d'une part on démontre sans peine (en appliquant un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous avons appliqué dans le cas, où P est un ensemble (A) plan) que si P est un ensemble fermé, l'ensemble $\mu(P)$ est un G_δ [2]) et parsuite sa projection sur l'axe OY est un ensemble (A).

Or, soit E un ensemble (A) donné quelconque, situé sur l'axe OY. L'ensemble E est donc l'ensemble de valeurs d'une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels. Posons

$$\Gamma = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x \in N,\ y = f(x)].$$

Soit

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \dots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels, et désignons par S l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$x = r_n, \quad y = -m - n$$

où m et n sont deux nombres naturels.

Posons enfin

$$F = \overline{\Gamma} + S,$$

où $\overline{\Gamma} = \Gamma + \Gamma'$ désigne la fermeture de l'ensemble Γ.

On voit sans peine que l'ensemble F est fermé et que $\mu(F) = \mu(\Gamma) = \Gamma$, d'où résulte tout de suite que la projection de $\mu(F)$ sur l'axe OY est précisément l'ensemble E, c. q. f. d.

Un raisonnement analogue peut être appliqué pour résoudre par l'affirmative le problème suivant, posé par M. **Mazurkiewicz**: *Les projections sur l'axe OY des ensembles $\mu(H)$, où H sont des ensembles G_δ plans, coïncident-elles avec les ensembles $PC(A)$ linéaires* (projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A) plans)?

[1]) Soient, en effet, M_1 un ensemble (A) non mesurable B, situé dans l'intervalle $I_1 = (0, 1)$ et M_2 un ensemble (A) non mesurable B situé dans l'intervalle $I_2 = (-1, 0)$: il suffira de prendre $E_1 = M_1 + I_2$ et $E_2 = M_1$.

[2]) les ensembles Q et R étant dans ce cas des F_σ.

D'une part, si H est un ensemble G_δ plan, $\mu(H)$ est comme nous savons, un ensemble $C(A)$ plan, et sa projection sur l'axe OY est un ensemble $PC(A)$ (linéaire).

D'autre part, soit E un ensemble $PC(A)$ donné quelconque, situé sur l'axe OY. Comme je l'ai démontré, les ensembles $PC(A)$ linéaires coïncident avec les images continues des ensembles $C(A)$ linéaires [1]). Il existe donc une fonction $f(x)$ définie et continue dans un ensemble M qui est un $C(A)$ linéaire, telle que E est l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour $x \in M$.

Posons

$$\Gamma = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x \in M,\ y = f(x)].$$

L'ensemble M étant un $C(A)$, $C(M)$ est un ensemble (A), donc une projection sur l'axe OX d'un ensemble G_δ plan, soit T, que nous pouvons supposer situé entre les parallèles $y = 0$ et $y = 1$. Désignons par T_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, où

$$(x,\ y + n) \in T,$$

et posons

$$H = \overline{\Gamma} + T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

On voit sans peine que l'ensemble H est un G_δ (plan) et que $\mu(H) = \mu(\Gamma) = \Gamma$, et il en résulte sans peine, d'après la définition de l'ensemble Γ et la propriété de la fonction $f(x)$, que la projection de $\mu(H)$ sur l'axe OY est précisément l'ensemble E, c. q. f. d.

En généralisant ce résultat, on pourrait démontrer que *les projections sur l'axe OY des ensembles $\mu(M)$ où M sont des ensembles C_n plans, coïncident avec les ensembles P_{n+2} linéaires* [2]) (pour $n = 1, 2, 3, \dots$).

[1]) *Fund. Math.* t. VII, p. 239.

[2]) Pour la définition des ensembles P_n et C_n voir *Fund. Math.* t. XI, p. 121.