de R sans élément dernier. Envisageons un élément arbitraire x de Z. Comme l'ensemble de tous les éléments de R qui précèdent x n'est pas bien ordonné, il contient un sous-ensemble non vide Y sans élément premier. Si l'on pose: $X = Y + Z$, on obtient un sous-ensemble non vide X de M qui n'a pas ni l'élément premier ni l'élément dernier, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que l'ensemble R est ordonné inversement au bon ordre (s'il n'est pas vide), et notre démonstration est achevée.

Remarquons que dans le cas, où P est sans élément dernier et Q — sans élément premier, la décomposition de l'ensemble M: $M = P + Q$ est déterminée d'une façon univoque.

Remarque de M. Tarski. En appliquant un raisonnement de M. Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, I Aufl., Leipzig 1914, p. 53), on peut établir le suivant:

Théorème: *On peut présenter tout ensemble ordonné M comme une somme ordonnée de trois ensembles* (*sans éléments communs*) P, Q *et* R: $M = P + Q + R$, *de façon que P soit un ensemble bien ordonné, Q — un ensemble sans élément premier et sans élément dernier et R — un ensemble ordonne inversement au bon ordre* (*les cas*: $P = 0$, $Q = 0'$ *et* $R = 0$ *ne sont pas exclus; si* $Q \neq 0$, *la décomposition de l'ensemble M est déterminée d'une façon univoque*).

Si l'on suppose que tout sous-ensemble non-vide de M a soit un élément premier, soit un élément dernier, on doit évidemment poser: $Q = 0$. Le théorème de M. Steckel présente ainsi un cas particulier du théorème précédent.

Sur les nombre de dimensions.

Par

Maurice Fréchet (Strasbourg).

Les lignes suivantes concernant certaines remarques inédites ont été extraites d'un ouvrage de l'auteur qui doit être prochainement imprimé.

Remarques sur l'addition des nombres de dimensions. On peut considérer la définition — équivalente à celle d'Urysohn — du nombre de dimensions due à M. Menger comme basée sur une définition de la soustraction ou même plus particulièrement de l'opération $NE - 1$ ou $NE \quad NR_1$, en appelant NE le nombre de dimensions, au sens de M. Menger, de l'ensemble E. La définition récurrente déduit en effet, par une certaine opération géométrique d'un ensemble E tel que $NE = n$, un ensemble F dont on convient que $NF = n - 1$, soit $NF = NE - NR_1$. Il serait intéressant de comparer dF et $dE + 1$, c'est à dire de comparer les ensembles E et $[[F, R_1]]$.

Il y a lieu à cette occasion de rectifier une assertion d'Urysohn [1]) d'après laquelle notre définition du nombre de dimensions et la sienne ne sont en aucune relation simple.

Soit, en effet, un ensemble G tel qu'il existe un nombre n pour lequel $n \leqq dG < n + 1$. Alors G est homéomorphe à un ensemble E, sans intérieur, de points de l'espace R_{n+1} à $n + 1$ dimensions et E contient un ensemble e_n homéomorphe à R_n. D'après le théorème d'Urysohn (l. c.), § 4, p. 81, on a $NE \leqq n$ et d'après son théorème § 4, p. 67, $n = Ne_n \leqq NE$. Donc $NG = n$. Ainsi $n = NG \leqq$ $\leqq dG < NG + 1 = n + 1$. On peut dire que *pour tout ensemble G comparable aux espaces à un nombre entier de dimensions le nombre*

[1]) *Fund. Math.* t. VII, p. 77, note [1]).

de dimensions de G au sens d'Urysohn peut être considéré comme la partie entière du nombre de dimensions à notre sens.

En particulier, on remarquera *qu'il y a identité entre les ensembles de dimension zéro au sens d'Urysohn et les ensembles de dimensions <1 à notre sens.* Cela résulte de ce que les derniers sont homéomorphes chacun à un ensemble de nombres irrationnels, ceux-ci étant de dimension zéro au sens d'Urysohn, et d'autre part, ces derniers d'après un théorème de M. Sierpiński[1]) sont chacun homéomorphe à un ensemble ne contenant aucun continu lequel est homéomorphe à une partie de H_1.

Enfin, supposons qu'on applique le procédé de récurrence sous la forme de M. Menger, non pas, comme lui, à partir d'ensembles vides, mais à partir d'ensembles ayant un nombre de dimensions *déterminé* à notre sens et <1. Il semble qu'on arriverait ainsi à généraliser ce procédé de façon à lui faire fournir des nombres de dimensions non entiers.

Nombre local des dimensions. La définition du nombre de dimensions que nous avons donnée repose sur la comparaison de deux ensembles pris chacun en bloc.

Il en résulte comme nous l'avons fait remarquer qu'une droite a un nombre de dimensions inférieur à celui d'une circonférence; qu'un plan a un nombre de dimensions inférieur à celui d'une sphère; etc.

Pourtant, il est clair que, dans chacun de ces cas, le voisinage d'un point a le même nombre de dimensions (sur la droite et sur le cercle, sur le plan et sur la sphère, etc).

Cette remarque a conduit M. Tietze à réstreindre notre définition du nombre de dimensions à la comparaison des *voisinages*.

Appelons voisinage d'un point A sur un ensemble E, la partie de E dont les points sont à une distance de A inférieure à un nombre ϱ (>0) qui mesure le rayon de ce voisinage.

M. Tietze[2]) adopte notre définition de l'égalité et de l'inégalité des nombres de dimensions en l'appliquant à la comparaison du voisinage d'un point A sur un ensemble E avec le voistnage d'un point B sur un ensemble F. Mais il astreint les homéomorphies qui interviennent dans cette définition à faire correspondre A à B.

[1]) *Fund. Math.* t. II, p. 89.

[2]) *Ueber Analysis Situs* Hamburg. Mathem. Einzelschr. H. 2 (1923).

Il nomme alors figure homogène à un nombre entier n de dimensions un ensemble E tel que, pour chacun des points A de E_1, il existe un voisinage de A sur E qui soit homéomorphe à un „intervalle" de l'espace R_n dont le centre soit le correspondant de A.

A vrai dire, pour tirer de la remarque initiale toutes les conséquences qu'elle comporte, il y aurait lieu de ne faire intervenir la notion de nombre de dimensions d'un voisinage déterminé que comme un intermédiaire.

Il faudrait, parallèlement à la définition en quelque sorte „intégrale" du nombre de dimensions d'un ensemble, arriver à une définition *locale* et définir *le nombre local de dimensions d'un ensemble en un point A*. Plaçons nous dans le cas des espaces (D). Alors, étant donnés deux voisinages de A sur E, il y a au moins un voisinage de A sur E contenu dans les deux précédents: son nombre de dimensions est inférieur ou égal à chacun des deux nombres précédents. Le nombre local de dimensions de A en E, pour être local devrait donc être inférieur ou égal aux nombres de dimensions de tous les voisinages de A sur E. S'il existe parmi les voisinages de A sur E — et ce sera le cas des figures simples — un voisinage dont le nombre de dimensions soit inférieur ou égal à celui de tous les voisinages de A sur E, ce sera tout naturellement par définition le nombre local de dimensions de E en A.

Comparons, d'une façon générale, *le nombre local de dimensions de E en A avec le nombre local de dimensions d'un ensemble F en un point B*. Nous dirons que le premier est au plus égal au second et *nous écrivons*

$$d_A E \leqq d_B F$$

si, quel que soit un voisinage V_B de B sur F, il existe un voisinage de A sur E dont le nombre de dimensions est inférieur ou égal à celui de V_B.

Il en résultera la définition de l'égalité et de l'inégalité de deux nombres locaux de dimensions.

En particulier, un ensemble sera homogène au point de vue du nombre de dimensions s'il a en chacun de ses points le même nombre local de dimensions. C'est par exemple ce qui a lieu pour R_n et pour tous les espaces importants considérés par les analystes. Alors un ensemble E est homogène à un nombre entier n de dimensions locales si en chacun de ses points A le nombre local de ses dimensions est égal au nombre local de dimensions de l'espace R_n.

Autrement dit: à tout „intervalle" I_B de R_n, de centre B, correspond un voisinage V_A de A sur E tel que V_A soit homéomorphe à une partie P de I_B, B étant le transformé de A; et à tout voisinage W_A de A sur E correspond un intervalle J_B de R_n, de centre B, tet que J_B soit homéomorphe à une partie Q de W_A, A étant le transformé de B.

En prenant pour W_A qui est arbitraire, V_A, on voit que V_A est homéomorphe à une partie d'un „intervalle" K_B de R_n de centre B et comme K_B est homéomorphe à I_B, on voit que V_A est homéomorphe à une partie de I_B (avec correspondance de A et de B).

Finalement, à tout intervalle I_B de R_n correspond un voisinage V_A de A sur E, tel que chacun soit homéomorphe à une partie de l'autre et avec correspondance de A et B.

Ainsi, d'après notre définition générale, si un ensemble E est homogène à n dimensions, à chaque point A de E correspond un voisinage qui a le même nombre de dimensions que l'un quelconque des voisinages d'un point quelconque de R_n.

Cette fois, on voit qu'avec ce mode de définition la circonférence et la droite sont deux ensembles homogènes à un même nombre de dimensions locales; de même, pour le plan et le cercle, de même pour les surfaces de la sphère et du tore; etc.

Sur une question concernant les ensembles analytiques plans.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est la solution d'une question qui m'a été posée par M. N. Lusin.

P étant un ensemble plan donné, désignons par $g(P)$ l'ensemble de tous les points (a, b) du plan qui sont points de condensation de l'ensemble

$$P \,.\, \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x=a] \text{ [1]},$$

et désignons par $\mu(P)$ l'ensemble de tous les points (a, b) de l'ensemble P, tels que

$$P \,.\, \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[x=a,\ y<b]=0 \text{ [2]}.$$

M. Lusin demande *quelle est la nature des ensemble $g(P)$ et $\mu(g(P))$ dans le cas, où P est un ensemble (A)?*

Nous prouverons que:

I. Si P est un ensemble (A) plan, $g(P)$ est un ensemble (A) (plan).

II. Si P est un ensemble (A) plan, $\mu(P)$ est une différence de deux ensembles (A) (plans).

De I et II résulte tout de suite que

III. Si P est un ensemble (A) plan, $\mu(g(P))$ est une différence de deux ensembles (A) (plans).

[1]) $\underset{x,y}{\mathrm{E}}[C(x,y)]$ désigne l'ensemble de tous les points (x, y) du plan satisfaisant à la condition $C(x,y)$.

[2]) Selon M. Mazurkiewicz (*Fund. Math.* t. X, p. 172) on pourrait dire que $\mu(P)$ est l'ensemble des y *minima* de l'ensemble P.