de fois, donc l'égalité (4), et, par conséquent, l'égalité (2) ne sont remplies qu'en un nombre fini de points x.

Notre lemme est ainsi démontré complètement.

§ 3. Soit maintenant E un ensemble linéaire qui est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble dénombrable. Désignons, pour tout entier n, par E_n la partie de cet ensemble contenue dans l'intervalle $(n, n+1)$. En vertu du lemme 2, on peut poser

$$E_n = H_n + P_n,$$

P_n étant un ensemble dénombrable et H_n le produit d'une suite d'ensembles ouverts satisfaisant aux conditions (1⁰, 2⁰) dudit lemme.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie sur l'axe des x de manière suivante:

1⁰ dans tout intervalle de la forme $(3n, 3n+1)$, $f(x)$ soit une fonction continue et telle que $f(3n)=n$, $f(3n+1)=n+1$, $n \leqslant f(x) \leqslant n+1$ et que H_n soit l'ensemble de toutes les valeurs que $f(x)$ prend une infinité de fois dans $(3n, n+1)$. Une telle fonction existe en vertu du lemme précédent;

2⁰ dans tout intervalle $(3n+1, 3n+2)$ $f(x)$ soit une fonction monotone, $f(3n+1)=n+1$, $f(3n+2)=n$, et telle que l'ensemble dénombrable P_n soit l'ensemble de toutes les valeurs qu'elle admet dans les sous-intervalles de $(3n+1, 3n+2)$ où elle est constante;

3⁰ ensuite, dans tout intervalle $(3n+2, 3n+3)$ $f(x)$ soit une fonction linéaire telle que $f(3n+2)=n$, $f(3n+3)=n+1$.

La fonction $f(x)$ ainsi définie, est évidemment continue; l'ensemble de valeurs qu'elle prend une infinité de fois coïncide avec l'ensemble E. La seconde partie du théorème annoncé dans le § 1 est donc démontrée.

Remarque sur une classe d'ensembles ordonnés.

Par

Samuel Steckel (Białystok, Pologne).

Le but de cette Note est d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que tout sous-ensemble d'un ensemble ordonné donné ait soit un élément premier soit un élément dernier. Nous démontrerons le suivant

Théorème[1]. *Pour que tout sous-ensemble non-vide d'un ensemble ordonné donné M ait soit un élément premier, soit un élément dernier, il faut et il suffit qu'on puisse présenter l'ensemble M comme une somme ordonnée de deux ensembles P et R (sans éléments communs): $M = P + R$, où P est un ensemble bien ordonné (ou vide) et R — un ensemble ordonné inversement au bon ordre (ou vide).*

Démonstration. Il est évident que notre condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est aussi nécessaire, considérons un ensemble quelconque M, dont tout sous-ensemble non-vide a soit un élément premier, soit un élément dernier. Pour tout élément x de M désignons par $A(x)$ l'ensemble formé de x et de tous les éléments de M qui précédent x. Soit P l'ensemble de tous les éléments x de M, tels que l'ensemble $A(x)$ est bien ordonné; posons: $R = M - P$. On voit sans peine que la décomposition de l'ensemble M: $M = P + R$ est une coupure et que l'ensemble P est bien ordonné (ou vide). De plus, x étant un élément arbitraire de R, l'ensemble de tous les éléments de R qui précédent x n'est pas bien ordonné, car dans le cas contraire $A(x)$ serait bien ordonné aussi et x appartiendrait à P. Or, je dis que tout sous-ensemble non-vide de R a un élément dernier. En effet, admettons qu'il existe un sous-ensemble non-vide Z

[1]) Je viens d'apprendre que ce théorème a été trouvé par M. Lindenbaum en 1926, mais n'a pas été publié.

de R sans élément dernier. Envisageons un élément arbitraire x de Z. Comme l'ensemble de tous les éléments de R qui précèdent x n'est pas bien ordonné, il contient un sous-ensemble non vide Y sans élément premier. Si l'on pose: $X = Y + Z$, on obtient un sous-ensemble non vide X de M qui n'a pas ni l'élément premier ni l'élément dernier, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que l'ensemble R est ordonné inversement au bon ordre (s'il n'est pas vide), et notre démonstration est achevée.

Remarquons que dans le cas, où P est sans élément dernier et Q — sans élément premier, la décomposition de l'ensemble M: $M = P + Q$ est déterminée d'une façon univoque.

Remarque de M. Tarski. En appliquant un raisonnement de M. Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, I Aufl., Leipzig 1914, p. 53), on peut établir le suivant:

Théorème: *On peut présenter tout ensemble ordonné M comme une somme ordonnée de trois ensembles (sans éléments communs) P, Q et R: $M = P + Q + R$, de façon que P soit un ensemble bien ordonné, Q — un ensemble sans élément premier et sans élément dernier et R — un ensemble ordonne inversement au bon ordre (les cas: $P = 0$, $Q = 0'$ et $R = 0$ ne sont pas exclus; si $Q \neq 0$, la décomposition de l'ensemble M est déterminée d'une façon univoque).*

Si l'on suppose que tout sous-ensemble non-vide de M a soit un élément premier, soit un élément dernier, on doit évidemment poser: $Q = 0$. Le théorème de M. Steckel présente ainsi un cas particulier du théorème précédent.

Sur les nombre de dimensions.

Par

Maurice Fréchet (Strasbourg).

Les lignes suivantes concernant certaines remarques inédites ont été extraites d'un ouvrage de l'auteur qui doit être prochainement imprimé.

Remarques sur l'addition des nombres de dimensions. On peut considérer la définition — équivalente à celle d'Urysohn — du nombre de dimensions due à M. Menger comme basée sur une définition de la soustraction ou même plus particulièrement de l'opération $NE - 1$ ou $NE \quad NR_1$, en appelant NE le nombre de dimensions, au sens de M. Menger, de l'ensemble E. La définition récurrente déduit en effet, par une certaine opération géométrique d'un ensemble E tel que $NE = n$, un ensemble F dont on convient que $NF = n - 1$, soit $NF = NE - NR_1$. Il serait intéressant de comparer dF et $dE + 1$, c'est à dire de comparer les ensembles E et $[[F, R_1]]$.

Il y a lieu à cette occasion de rectifier une assertion d'Urysohn [1]) d'après laquelle notre définition du nombre de dimensions et la sienne ne sont en aucune relation simple.

Soit, en effet, un ensemble G tel qu'il existe un nombre n pour lequel $n \leqq dG < n + 1$. Alors G est homéomorphe à un ensemble E, sans intérieur, de points de l'espace R_{n+1} à $n + 1$ dimensions et E contient un ensemble e_n homéomorphe à R_n. D'après le théorème d'Urysohn (l. c.), § 4, p. 81, on a $NE \leqq n$ et d'après son théorème § 4, p. 67, $n = Ne_n \leqq NE$. Donc $NG = n$. Ainsi $n = NG \leqq \leqq dG < NG + 1 = n + 1$. On peut dire que *pour tout ensemble G comparable aux espaces à un nombre entier de dimensions le nombre*

[1]) *Fund. Math.* t. VII, p. 77, note [1]).