Sur l'ensemble de valeurs qu'une fonction continue prend une infinité de fois.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

M. M. **Mazurkiewicz** et **Sierpiński** ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de nombres réels puisse être regardé comme l'ensemble de toutes les valeurs qu'une fonction continue d'une variable réelle prend une infinité **non dénombrable** de fois [1]).

Dans le même ordre d'idées je donnerai une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de nombres réels soit un ensemble de valeurs qu'une fonction continue d'une variable réelle prend une infinité de fois.

Je démontrerai notamment le

Théorème. *Pour qu'un ensemble de nombres réels E soit un ensemble de valeurs qu'une fonction continue d'une variable réelle prend une infinité de fois, il faut et il suffit que E soit une somme de deux ensembles. dont l'un est un G_δ (ou vide), et l'autre est au plus dénombrable.*

§ 1. **Lemme I** [2]). L'ensemble Γ_ν de toutes les valeurs qu'une fonction continue $f(x)$ prend au moins ν fois est une somme de deux ensembles, dont l'un est ouvert (ou vide) et l'autre au plus dénombrable.

Démonstration: Désignons par P l'ensemble de toutes les valeurs extrémales de la fonction f. L'ensemble P est au plus dénombrable [1]). Soit $x \varepsilon (\Gamma_\nu - P)$. Il y a ν nombres réels $t_1, t_2, \dots, t_\nu$, tels que

$$(1) \qquad f(t_i) = x \quad (i = 1, 2, \dots \nu), \quad x \text{ non } \varepsilon\, P$$

D'après (1), il existe évidemment ν intervalles δ_i $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ disjoints, tels que $t_i \varepsilon \delta_i$ et qu'il existe $t_i', t_i'' \varepsilon \delta_i$ tels que

$$(2) \qquad f(t_i') < f(t_i) = x < f(t_i'').$$

Désignons par α le plus grand des nombres $f(t_i')$ $(i = 1, 2, \dots \nu)$, et pareillement, par β, le plus petit des nombres $f(t_i'')$.

Alors:

$$(3) \qquad f(t_i') \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant f(t_i'') \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots \nu.$$

Or, la fonction f est continue, donc pour chaque nombre η tel que $\alpha < \eta < \beta$ il existe dans tout intervalle δ_i un nombre θ_i, tel que $f(\theta_i) = \eta$. Or, pour $i \neq j$, $\delta_i . \delta_j = 0$, donc aussi $\theta_i \neq \theta_j$, d'où résulte que $\eta \varepsilon \Gamma_\nu$.

Si donc $x \varepsilon \Gamma_\nu - P$, il existe un intervalle (α, β) entourant x, et contenu dans Γ_ν; ainsi, tous les points de l'ensemble Γ_ν, exceptés, au plus, ceux de l'ensemble au plus dénombrable P, sont intérieurs à Γ_ν; Γ_ν est, par suite, une somme d'un ensemble ouvert (ou vide) et d'un ensemble au plus dénombrable, c. q. f. d.

Pour démontrer maintenant la première partie de notre théorème, désignons par G_∞ l'ensemble de toutes les valeurs que la

1) *Fund. Math.* t. VI p. 161, ss. V. aussi: W. **Sierpiński**, *Fund. Math.* t. VIII, p. 370.

2) Cf. G. **Vitali**, *Fund. Math.* t. VIII, p. 176.

1) A. **Schoenflies**, *Bericht* I, p. 159. Cf. W. **Sierpiński**. *C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie* 1912, p. 236 et *Prace matematyczno-fizyczne* t. 27 (1916), p 17, où la proposition est démontrée pour les fonctions quelconques d'une variable réelle. Voici le raisonnement de M. **Sierpiński**.

Soit

$$(S) \qquad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2). \quad (a_3, b_3), \dots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles. Soit $f(x)$ une fonction donnée d'une variable réelle, m — un des maxima de la fonction $f(x)$. On voit sans peine qu'il existe un intervalle de la suite (S), soit (a_n, b_n), tel que la fonction $f(x)$ atteint à l'intérieur de (a_n, b_n) (au moins une fois) la valeur m et ne prend à l'intérieur de (a_n, b_n) aucune valeur $> m$. Faisons maintenant correspondre à tout maximum m de $f(x)$ le plus petit indice n, pour lequel l'intervalle (a_n, b_n) jouit de ces propriétés. On voit sans peine qu'aux maxima différents de $f(x)$ correspondront ainsi des indices différents, d'où résulte que l'ensemble de tous les maxima de la fonction $f(x)$ est effectivement énumérable.

fonction continue $f(x)$ prend une infinité de fois [1]). Nous avons évidemment:

$$G_\infty = \prod_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu. \tag{4}$$

Or, en vertu de notre lemme, $\Gamma_\nu = H_\nu + Q_\nu$, où l'ensemble H_ν est ouvert et l'ensemble Q_ν est au plus dénombrable. D'après (4), on a:

$$G_\infty = \prod_{\nu=1}^{\infty} (H_\nu + Q_\nu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} H_\nu + H,$$

où $H \subset Q_1 + Q_2 + \dots$; donc H est dénombrable.

L'ensemble G_∞ est, par conséquent, une somme d'un G_δ et d'un ensemble au plus dénombrable.

Remarque. Nous avons supposé dans l'énoncé de notre théorème que la fonction considérée soit continue. Or, on voit facilement que tout le raisonnement précédent subsiste si l'on suppose seulement que $f(x)$ remplie la condition de Darboux, c.-à-d. qu'elle prend chaque valeur intermédiaire entre deux quelconques de ses valeurs.

§ 2. Pour établir la proposition réciproque, nous prouverons d'abord deux lemmes préliminaires.

Lemme II. Chaque ensemble linéaire G_δ est la somme d'un ensemble dénombrable P et du produit d'une suite monotone des ensembles ouverts $\{G_n\}$ vérifiant les conditions suivantes:

1° chaque G_n est la somme d'une suite d'intervalles ouverts et disjoints $\{\delta_n^k\}$ de longueurs $\leqslant \frac{1}{2^n}$;

2° pour tout $n \geqslant 0$: $\bar{\delta}_{n+1}^k \subset G_n$ [2]).

Démonstration: Soit donné un ensemble G_δ, H. Posons:

$$H = \prod_{1}^{\infty} H_n,$$

$\{H_n\}$ désignant une suite non-croissante d'ensembles ouverts. Soit encore:

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_n^k,$$

[1]) L'ensemble G_∞ a été étudié déjà par M. Vitali (l. c. p. 181), aussi par M. Banach. *Fund. Math.* t. VII, p. 229 (corollaire 1).

[2]) δ désignant un intervalle ouvert (c.-à.-d. les extrémités exclues), $\bar{\delta}$ désigne sa fermeture.

où $\{d_n^k\}$ (pour n fixe) forment une suite d'intervalles ouverts et disjoints.

Désignons, pour chaque d_n^k, par P_n^k un ensemble de points situé dans d_n^k et ayant ses seuls points limites aux extrémités de d_n^k; on peut évidemment choisir les ensembles P_n^k de manière que les longueurs des intervalles contigus à P_n^k dans d_n^k soient de longueur $\leqslant \frac{1}{2^n}$.

Posons:

$$P_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_n^k, \qquad P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Chaque ensemble P_n étant fermé dans G_n correspondant, les ensembles

$$G_n = H_n - P_n$$

sont aussi des ensembles ouverts et la relation évidente

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} G_n + P.H,$$

fournit la décomposition demandée de l'ensemble H.

Lemme 3. Etant donnée une suite d'ensembles ouverts et bornés $\{G_n\}$ vérifiant les conditions 1° et 2° du lemme précédent,

il existe toujours dans $(0, 1)$ une fonction continue $y = f(x)$, telle que $\prod_1^\infty G_n$ soit l'ensemble des valeurs y qu'elle admet une infinité de fois.

Démonstration. On peut supposer évidemment que tous les ensembles δ_n sont situés dans $(0, 1)$.

Nous allons construire par l'induction dans $(0, 1)$ une suite de fonctions continues $\{f_n(x)\}$.

Soit, dans ce but, $f_1(x)$ la fonction linéaire telle que $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$.

Supposons que $f_n(x)$ soit déterminée et vérifie la condition (C) suivante:

(C) pour chaque k l'ensemble de points x, où $f_n(x) \varepsilon \delta_n^k$ [1]), *est somme de 3^{n-1} intervalles disjoints et dans chacun de ces intervalles*

[1]) nous conservons les notations de l'énoncé du lemme precédent relatives aux ensembles G_n et aux intervalles δ_n^k.

$f_n(x)$ est linéaire, non-constante, en admettant à leurs extrémités les valeurs égales resp. aux extrémités de δ_n^k.

Soient (a_i^k, b_i^k) [1] $(i = 1, 2, \dots, 3^{n-1})$ ces intervalles. Pour déterminer la fonction $f_{n+1}(x)$, on partagera chaque (a_i^k, b_i^k) en trois parties égales (a_i^k, c_i^k), (c_i^k, d_i^k) (d_i^k, b_i^k) et on définira $f_{n+1}(x)$ dans (a_i^k, b_i^k) de manière à vérifier la conditions suivantes:

1° $f_{n+1}(a_i^k) = f_n(a_i^k)$; $f_{n+1}(b_i^k) = f_n(b_i^k)$;

2° dans chacun des trois sous-intervalles (a_i^k, c_i^k), (c_i^k, d_i^k), (d_i^k, b_i^k), $f_{n+1}(x)$ est linéaire;

3° aux points c_i^k, d_i^k $f_{n+1}(x)$ admet les valeurs égales resp. aux extrémités de l'intervalle δ_n^k.

La fonction est ainsi définie dans tous les intervalles (a_i^k, b_i^k) $(i = 1, 2, \dots, 3^{n-1};\ k = 1, 2, \dots)$, c.-à-d. en tout point x où $f_n(x) \,\varepsilon\, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n^k$. On posera en chaque autre point, par définition:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x).$$

On voit de suite que la fonction $f_{n+1}(x)$ satisfait aussi à la condition (C) si l'on y remplace n par $n+1$. La suite $\{f_n(x)\}$ est donc définie complètement.

Il est aisé à voir que les fonctions $\{f_n(x)\}$ ainsi définies jouissent encore des propriétés suivantes:

(C_1) *si, en un point x, $f_m(x) \,\varepsilon\, CG_m$, on a alors, pour chaque $n \geqslant m$:*

$$f_n(x) = f_m(x);$$

(C_2) *si, en un point x, $f_m(x) \,\varepsilon\, \delta_m^k$, on a alors, pour chaque $n \geqslant m$:*

$$f_n(x) \,\varepsilon\, \delta_m^k.$$

On a donc, pour chaque x et $n \geqslant m$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \max_k \mathit{mes}\,(\delta_m^k) \leqslant \frac{1}{2^m},$$

car, en vertu de la condition 1° du lemme 2, les longueurs des intervalles δ_m^k ne dépassent jamais $\frac{1}{2^m}$.

Les fonctions $f_n(x)$ tendent donc uniformément vers une fonction continue $f(x)$. Nous prouverons que $f(x)$ vérifie les conditions de notre lemme.

[1]) nous omettons, pour simplifier l'écriture, l'indice n.

Soit, dans ce but:

$$y_0 \,\varepsilon\, G_m,$$

donc, pour un indice k:

$$y_0 \,\varepsilon\, \delta_m^k.$$

En vertu des propositions (C) et (C_2), il existe donc un système de 3^{m-1} intervalles disjoints, tel que dans chacun d'eux toute fonction $f_n(x)$, pour $n \geqslant m$, admet une fois au moins la valeur y_0. Il s'en suit que la fonction limite $f(x)$ admet la valeur y_0 au moins 3^{m-1} fois dans $(0, 1)$. Donc, si

$$y \,\varepsilon\, \prod_{n=1}^{\infty} G_n$$

la valeur y est admise par $f(x)$ une infinité de fois.

Supposons maintenant qu'inversement

$$y_0 \,\varepsilon\, C \prod_{n=1}^{\infty} G_n,$$

c.-à.-d. que pour une certaine valeur m

(1) $$y_0 \,\varepsilon\, CG_m,$$

et considérons l'ensemble des valeurs x vérifiant l'égalité

(2) $$f(x) = y_0 \,\varepsilon\, CG_m.$$

Nous prouverons d'abord que (2) entraîne

(3) $$f_{m+1}(x) \,\varepsilon\, CG_{m+1}.$$

En effet, dans le cas contraire, $f_{m+1}(x) \,\varepsilon\, CG_{m+1}$, et il existerait un intervalle ouvert $d_{m+1}^k \subset G_{m+1}$ tel que

$$f_{m+1}(x) \,\varepsilon\, \delta_{m+1}^k;$$

donc, on aurait, en vertu de (C_2) et de la condition 2° du lemme précédent

$$f(x) \,\varepsilon\, \delta_{m+1}^k \subset G_m$$

ce qui serait contradictoire avec (2).

La relation (3) ainsi prouvée, on en déduit en vertu de (C_1)

(4) $$f(x) = f_{m+1}(x) = y_0$$

pour tous les points x satisfaisant à (2).

Or, toute fonction $f_n(x)$ admet chaque valeur un nombre fini de fois, donc l'égalité (4), et, par conséquent, l'égalité (2) ne sont remplies qu'en un nombre fini de points x.

Notre lemme est ainsi démontré complètement.

§ 3. Soit maintenant E un ensemble linéaire qui est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble dénombrable. Désignons, pour tout entier n, par E_n la partie de cet ensemble contenue dans l'intervalle $(n, n+1)$. En vertu du lemme 2, on peut poser

$$E_n = H_n + P_n,$$

P_n étant un ensemble dénombrable et H_n le produit d'une suite d'ensembles ouverts satisfaisant aux conditions (1°, 2°) dudit lemme.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie sur l'axe des x de manière suivante:

1° dans tout intervalle de la forme $(3n, 3n+1)$, $f(x)$ soit une fonction continue et telle que $f(3n)=n$, $f(3n+1)=n+1$, $n \leqslant f(x) \leqslant n+1$ et que H_n soit l'ensemble de toutes les valeurs que $f(x)$ prend une infinité de fois dans $(3n, n+1)$. Une telle fonction existe en vertu du lemme précédent;

2° dans tout intervalle $(3n+1, 3n+2)$ $f(x)$ soit une fonction monotone, $f(3n+1) = n+1$, $f(3n+2) = n$, et telle que l'ensemble dénombrable P_n soit l'ensemble de toutes les valeurs qu'elle admet dans les sous-intervalles de $(3n+1, 3n+2)$ où elle est constante;

3° ensuite, dans tout intervalle $(3n+2, 3n+3)$ $f(x)$ soit une fonction linéaire telle que $f(3n+2) = n$, $f(3n+3) = n+1$.

La fonction $f(x)$ ainsi définie, est évidemment continue; l'ensemble de valeurs qu'elle prend une infinité de fois coïncide avec l'ensemble E. La seconde partie du théorème annoncé dans le § 1 est donc démontrée.

Remarque sur une classe d'ensembles ordonnés.

Par

Samuel Steckel (Białystok, Pologne).

Le but de cette Note est d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que tout sous-ensemble d'un ensemble ordonné donné ait soit un élément premier soit un élément dernier. Nous démontrerons le suivant

Théorème [1]. *Pour que tout sous-ensemble non-vide d'un ensemble ordonné donné M ait soit un élément premier, soit un élément dernier, il faut et il suffit qu'on puisse présenter l'ensemble M comme une somme ordonnée de deux ensembles P et R (sans éléments communs): $M = P + R$, où P est un ensemble bien ordonné (ou vide) et R — un ensemble ordonné inversement au bon ordre (ou vide).*

Démonstration. Il est évident que notre condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est aussi nécessaire, considérons un ensemble quelconque M, dont tout sous-ensemble non-vide a soit un élément premier, soit un élément dernier. Pour tout élément x de M désignons par $A(x)$ l'ensemble formé de x et de tous les éléments de M qui précédent x. Soit P l'ensemble de tous les éléments x de M, tels que l'ensemble $A(x)$ est bien ordonné; posons: $R = M - P$. On voit sans peine que la décomposition de l'ensemble M: $M = P + R$ est une coupure et que l'ensemble P est bien ordonné (ou vide). De plus, x étant un élément arbitraire de R, l'ensemble de tous les éléments de R qui précédent x n'est pas bien ordonné, car dans le cas contraire $A(x)$ serait bien ordonné aussi et x appartiendrait à P. Or, je dis que tout sous-ensemble non-vide de R a un élément dernier. En effet, admettons qu'il existe un sous-ensemble non-vide Z

[1]) Je viens d'apprendre que ce théorème a été trouvé par M. Lindenbaum en 1926, mais n'a pas été publié.