De l'inégalité
$$F(x) \geqq G(x)$$
il suit que
$$\varphi_i(x) \geqq \psi_i(x).$$

En ce cas, comme l'a démontré M. Hausdorff[1]), on peut construire une fonction continue $h_i(x)$ telle que
$$\varphi_i(x) \geqq h_i(x) \geqq \psi_i(x).$$

La suite
$$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x), \ldots$$
repond aux conditions exigées.

II. **Théorème:** *Quelles que soient les fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement de type ul et lu, il existe toujours une suite de fonctions continues ayant ces fonctions respectivement pour limites supérieure et inférieure.*

Démonstration: Les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ étant données, on peut, selon les résultats de MM. Stepanoff et Nikodym, construire deux suites de fonctions continues
$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad \text{et} \quad g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$
telles que
$$\limsup_{n=\infty} f_n(x) = F(x); \quad \liminf_{n=\infty} g_n(x) = G(x).$$

Désignons par
$$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x), \ldots$$
une suite de fonctions continues telle que:
$$F(x) \geqq \limsup_{n=\infty} h_n(x) \geqq \liminf_{n=\infty} h_n(x) \geqq G(x).$$

Il est évident que
$$F(x) = \limsup_{n=\infty} F_n(x) \geqq \liminf_{n=\infty} F_n(x) \geqq G(x); \quad F_n(x) = \max[f_n(x), h_n(x)]$$
et que
$$G(x) = \liminf_{n=\infty} G_n(x) \leqq \limsup_{n=\infty} G_n(x) \leqq F(x); \quad G_n(x) = \min[g_n(x), h_n(x)].$$

La suite
$$F_1(x), G_1(x), F_2(x), G_2(x), \ldots, F_n(x), G_n(x), \ldots$$
satisfait aux conditions posées.

[1]) Hausdorff, *Mengenlehre*, 2-me édition, p. 248. M. Hausdorff a démontré ce théorème en supposant que les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ sont finies. Mais cette restriction n'est guère indispensable, la même démonstration étant valable pour les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ non finies.

# Sur un ensemble non mesurable, jouissant de la propriété de Baire.

Par

S. Saks (Varsovie).

Dans le vol. IX de ce journal (p. 117) M. N. Lusin a déduit de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ l'existence d'un ensemble linéaire non mesurable $(L)$ qui est de première catégorie par rapport á chaque ensemble parfait.

D'autre part, dans le vol. V des „*Fundamenta*" (p. 184) M. Sierpiński a démontré, à l'aide de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable $E$, jouissant de la propriété $(S)$ suivante:

*$(S)$. Tout sous-ensemble non dénombrable de $E$ est non mesurable $(L)$.*

Le but de cette note est de remarquer que *tout ensemble $E$ jouissant de la propriété $(S)$ est de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait* (et parsuite satisfait à la condition de Baire).

Soit, en effet, $P$ un ensemble parfait donné. Comme on sait, on peut poser $P = N + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, où $P_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles non denses sur $P$, et $N$ est un ensemble de mesure nulle. Il en résulte que $PE = NE + P_1 E + P_2 E + \ldots$ Or, l'ensemble $NE$ est au plus dénombrable, puisqu'il est de mesure nulle (et, d'après la propriété $(S)$, tout sous-ensemble non dénombrable de $E$ est non mesurable). L'ensemble $P_1 E + P_2 E + \ldots \subset P_1 + P_2 + \ldots$ étant évidemment de 1[re] catégorie sur $P$, il en résulte tout de suite que l'ensemble $E$ est de première catégorie sur $P$, c. q. f. d.