ce qui donne, d'après (5):

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et prouve, d'après (2), que $p \in N$.

Or, soit $p \in N$. Il existe donc une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que $p \in E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (pour $k = 1, 2, \ldots$), donc, d'après (5):

$$p \in E_{\varrho_{n_1, n_2, \ldots n_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

Or, de la définition des nombres $\varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ résulte que

$$\varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} > \varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots:$$

il résulte donc de (6) et de la définition de l'ensemble $K\{E_r\}$ que $p \in K\{E_r\}$.

Nous avons donc démontré que $E = N$. Il en résulte la formule (3).

Un système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est dit *régulier* si

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

pour tout système de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$.

Désignons par $A_r(\mathcal{F})$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes réguliers $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont des ensembles de la famille $\mathcal{F}$. On a alors la formule

$$(6) \qquad A_r(\mathcal{F}) \subset K(\mathcal{F}).$$

Cette formule a été établie dans le § 7 du mémoire *„Sur un ensemble non mesurable B"* que nous avons publié avec M. N. Lusin dans le *Journal de Mathématiques*, t. II (1923), p. 65—68. La proposition y est énoncée pour une famille $\mathcal{F}$ des ensembles fermés, mais aucune hypothèse sur la nature de ces ensembles n'intervient pas dans la demonstration.

Supposons maintenant que la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles jouit de la propriété suivante: tout produit de deux ensembles de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. Dans ce cas on a, comme on voit sans peine:

$$A(\mathcal{F}) = A_r(\mathcal{F})$$

et les formules (3) et (6) donnent:

$$A(\mathcal{F}) = K(\mathcal{F}).$$

Pour des telles familles $\mathcal{F}$ *l'étude du crible de M. Lusin est donc équivalente à celle de l'opération* (A).

Über eine topologische Eigenschaft der Ebene.

Von

Casimir Zarankiewicz (Warszawa).

Den Gegenstand dieser Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes, der sich wie auch alles weitere, auf Gebilde in der euklidischen Ebene (Zahlenebene) bezieht.

Satz 1. Voraussetzungen: 1° *Es seien G_1, G_2, G_3 drei fremde beschränkte Gebiete*[1]) *von denen jedes in der unbegrenzten Komponente des Komplements jedes anderen liegt*; 2° K_1, K_2, K_3 *drei fremde Kontinua*; 3° $G_i \,.\, K_j \neq 0$ *für jedes Paar der Indices i, j wo* $i = 1, 2, 3$ *und* $j = 1, 2, 3$.

Behauptung: *Mindestens eines von den Kontinuen K_j zerschneidet*[2]) *mindestens eines der Gebieten G_i.*

Dem Beweise schicken wir einige Bemerkungen und Hilfssätze voraus.

Es seien zwei einfache geschlossene (ohne vielfache Punkte) Kurven C_1 und C_2 gegeben, von denen jede im Aussengebiet der anderen liegt, ferner auf C_1 drei Punkte a_1, b_1, c_1, sowie auf C_2 die Punkte a_2, b_2, c_2. Wenn es möglich ist die Punkte a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 mit zu einander fremden einfachen Bögen (arcs simples) zu verbinden derart, dass abgesehen von den Endpunkten sie im Aussengebiet der beiden Kurven liegen, so werden wir die Anordnung der Punkte $a_1 b_1 c_1$ auf C_1 als invers gegen die Anordnung $a_2 b_2 c_2$ auf C_2 bezeichnen. Im Falle wenn derartige Bögen nicht existieren, so werden wir die Anordnungen $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ als gleich bezeichnen.

[1]) Unter einem Gebiet versteht man eine zusammenhängende Punktmenge mit lauter inneren Punkten.

[2]) Eine abgeschlossene Menge K zerschneidet das Gebiet G, wenn $G - K$ nicht zusammenhängend ist.

Aus diesen Festsetzungen ausgehend, hat J. R. Kline[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Wenn jede von den drei Kurven C_1, C_2, C_3 *im Aussengebiet der anderen liegt und die Anordnung* $a_1\, b_1\, c_1$ *auf* C_1 *invers zu der Anordnung* $a_2\, b_2\, c_2$ *auf* C_2 *ist, diese aber invers zu* $a_3\, b_3\, c_3$ *auf* C_3, *so sind die Anordnungen* $a_1\, b_1\, c_1$ *und* $a_3\, b_3\, c_3$ *gleich.*

Ist das beschränkte Gebiet G nicht einfachzusammenhängend[2]), so werden wir ein einfachzusammenhängendes Gebiet G^* betrachten, das G enthält und dessen Grenze in der Grenze von G enthalten ist. Zu dem Gebiete G^* rechnen wir nämlich innere Punkte sämtlicher Polygone die ganz im Gebiete G verlaufen. In dieser Weise entsteht die Menge G^*, die offenbar ein Gebiet, und zwar einfachzusammenhängend ist[3]); sie enthält G und ihre Grenze ist in der Grenze von G enthalten Das Gebiet G^* soll die *kleinste einfachzusammenhängende Hülle von* G heissen

Liegt jedes von den beschränkten fremden Gebieten in der unbeschränkten Komponente des Komplementes jedes anderen, so sind offenbar ihre kleinsten einfachzusammenhängenden Hüllen fremd.

Hilfssatz 1. *Wenn die Kontinua* K_i *paarweise fremd sind und keines von ihnen das beschränkte Gebiet* G *zerschneidet, wobei* $K_i - G^* \neq 0$ *dann gibt es Kontinua* K_i^* *derart dass:* 1^0. $K_i \subset K_i^*$; 2^0. $K_i^* - G^* = K_i - G^*$; 3^0. K_i^* *sind paarweise fremd*; 4^0. K_i^* *zerschneidet* G^* *nicht.*

Beweis. Falls K_i das Gebiet G^* nicht zerschneidet, so genügt es $K_i^* = K_i$ zu setzen; nehmen wir also an, dass K_i das Gebiet G^* zerschneidet und es sei

$$G^* - K_i = \sum_{n \geq 1} H_n^{(i)} \tag{1}$$

die Zerlegung der offenen Menge $G^* - K_i$ in zueinander fremde Gebiete.

[1]) J. R. Kline, *A definition of sense on closed curves in non-metrical plane Analysis Situs.* Annals of Mathem. Vol. XIX, s 196, 1918 vergl. auch: *Concerning sense on closed curves in non metrical plane Analysis Situs* ibid. Vol. XXI, p. 115, 1919.

[2]) Das Gebiet heisst einfachzusammenhängend, wenn seine Grenze ein Kontinuum ist.

[3]) anderenfalls seien A und B zwei Komponenten der Grenze von G^* Nach einem Satze von Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre 1914, s. 344) lassen sich A und B mittels eines Polygons, das in G^* liegt, voneinander trennen, was gerade bedeutet, dass im Innern dieses Polygons Punkte der Grenze von G^* liegen. Das ist aber unmöglich, weil das ganze Innere des Polygons nach unserer Festsetzung dem G^* gehört.

Nach Voraussetzung ist $G - K_i$ zusammenhängend; folglich gehört die Menge $G - K_i$ einer einzigen Komponente von $\Sigma H_n^{(i)}$; diese sei mit $H_1^{(i)}$ bezeichnet.

Aus (1) folgt:

$$F(H_n^{(i)}) \subset F(G^*) + K_i\,[1]). \tag{2}$$

Für $n > 1$ haben wir nach (1):

$$H_n^{(i)} \,.\, H_1^{(i)} = H_n^{(i)} \,.\, (G - K_i) = 0. \tag{3}$$

Es sei $x \subset H_n^{(i)}$; wegen $x \subset G^*$ gibt es ein Polygon $P \subset G$, welches den Punkt x im Innern enthält. Nach (3) ist wegen $G - K_i \subset H_1^{(i)}$:

$$P \,.\, H_n^{(i)} = 0. \tag{4}$$

Da aber das Gebiet $H_n^{(i)}$ einen Punkt, nämlich x, mit dem Innern von P gemeinsam hat, so ist es wegen (4) ganz im Innern des Polygons P enthalten und, da weder P noch sein Inneres Punkte von $F(G^*)$ enthält, so ist

$$F(H_n^{(i)}) \,.\, F(G^*) = 0.$$

Nach (2) folgt somit

$$F(H_n^{(i)}) \subset K_i \quad \text{für} \quad n > 1. \tag{5}$$

Die Menge $K_i + \sum_{n>1} H_n^{(i)}$, die wir mit K_i^* bezeichnen wollen, ist offenbar wegen (5) ein Kontinuum; sie zerschneidet G^* nicht, denn ihre Komplementärmenge in Bezug auf G^* ist wegen (1) das Gebiet $H_1^{(i)}$. Ferner genügt K_i^* den Bedingungen 1^0 und 2^0. Nach (5) und der Voraussetzung, dass

$$K_{i_1} \,.\, K_{i_2} = 0 \qquad (i_1 \neq i_2) \tag{6}$$

ist, haben wir

$$\textit{entweder} \quad H_n^{(i_1)} \,.\, H_m^{(i_2)} = 0 \quad \textit{oder} \quad H_n^{(i_1)} \subset H_m^{(i_2)}; \tag{7}$$

dieser zweite Fall ist jedoch ausgeschlossen, da sonst $F(H_n^{(i_1)}) \,.\, H_m^{(i_2)} \neq 0$ und also $K_{i_1} \,.\, H_m^{(i_2)} \neq 0$ wäre; wegen (6) und (5) wäre also $K_{i_1} \subset H_m^{(i_2)}$ und um so mehr $K_i \subset G^*$, gegen die Voraussetzung. Nach (7), (5) und (6) haben wir also

$$K_{i_1}^* \,.\, K_{i_2}^* = 0 \qquad (i_1 \neq i_2),$$

wodurch die Bedingung 3^0 erfüllt ist, w. z. b w.

[1]) $F(G)$ bezeichnet die Grenze von G.

Hilfssatz 2. *Sind die abgeschlossenen Mengen K_1 und K_2 fremd und wenn weder K_1 noch K_2 das einfachzusammenhängende beschränkte Gebiet G zerschneidet, so zerschneidet auch ihre Summe $K_1 + K_2$ das Gebiet G nicht.*

Beweis. Die Komplementärmenge von G, die wir durch P bezeichnen, ist nach Brouwer ein Kontinuum. Die abgeschlossenen Mengen $P + K_1$ und $P + K_2$ zerschneiden nach Voraussetzung die Ebene nicht ihr Produkt ist wegen $K_1 . K_2 = 0$ gleich P, also zusammenhängend und unbeschränkt; folglich [1]) zerschneidet die Menge $P + K_1 + K_2$ die Ebene nicht. Da aber ihr Komplement gerade $G - (K_1 + K_2)$ ist, so ist unser Satz bewiesen.

Beweis des Satzes 1. Es werde angenommen, der Satz sei falsch, d. h. keines der Kontinua K_i zerschneidet irgend eines der Gebiete G_i. Betrachten wir die kleinsten einfachzusammenhängenden Hüllen G_i^* der G_i, die nach Voraussetzung 1° *fremd* sind. Aus unserer Annahme folgt nach dem Hilfsatze 1, dass es Kontinua K_j^* gibt derart, dass

(8) $$K_{j_1}^* . K_{j_2}^* = 0 \qquad (j_1 \neq j_2)$$

(9) $$K_j \subset K_j^*$$

(10) K_j^* *zerschneidet keines der* G_i^*.

Es seien R_{ji} Kreislinien, die folgenden Bedingungen genügen:

(11) $$R_{ji} \subset G_i^*$$

(12) *das Innere von* R_{ji} *ist mit* $K_1^* + K_2^* + K_3^*$ *fremd*

(13) $$R_{ji} . K_j^* \neq 0$$

(14) R_{ji} *sind miteinander paarweise fremd.*

Es seien: x ein Punkt von $K_j^* . G_i^*$ der gleichzeitig in der Grenze von $G_i^* - K_j^*$ liegt, U_x ein Kreis mit dem Zentrum x, der ganz im G_i^* liegt, vom Radius $r < \frac{1}{4}$ der Entfernung zwischen x und übrigen K_j^*. Es genügt als R_{ji} den grössten Kreis zu nehmen, der in U_x liegt und dessen Innere mit K_j^* fremd ist.

Wir bemerken zunächst, dass wegen (12) $R_{ji} - K_j^* \neq 0$, sonst würde K_j^* das Gebiet G_i^* zerschneiden im Widerspruch mit (10;

[1]) Nach einem Satze von B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. V s. 35.

auf jedem R_{ji} existiert somit ein Punkt p_{ji}, welcher zu K_j^* nicht gehört.

Die Summe $K_1^* + K_2^* + K_3^*$ zerschneidet nach dem Hilfssatze 2 keines der G_i^*; folglich lassen sich die Punkte p_{1i}, p_{2i}, p_{3i} paarweise durch einen Streckenzug verbinden, der in G_i^* liegt und mit $K_1^* + K_2^* + K_3^*$ fremd ist. In der Tat, verbinden wir zunächst p_{1i} und p_{2i} sowie p_{2i} und p_{3i} durch Streckenzüge in G_i^*. Es sei q der erste Punkt des Streckenzuges $p_{2i} p_{3i}$ in der Richtung von p_{3i} nach p_{2i}, der gleichzeitig dem Streckenzuge $p_{1i} p_{2i}$ gehört. Wir dürfen annehmen, dass $q \neq p_{2i}$ was eventuell durch eine geringe Abänderung zu erreichen ist. Die Summe $p_{1i} p_{2i} + q p_{3i}$ ist ein Kontinuum, welches $p_{1i} p_{2i} p_{3i}$ enthält. Nun umgeben wir dieses Kontinuum mit einem Polygon Q so nahe, dass im Innern von Q kein Punkt von $K_1^* + K_2^* + K_3^*$ liegt. Schliesslich ändern wir Q so ab, dass wir das Stück vom ersten bis zum letzten Schnittpunkte mit dem Kreise R_{ji} $(i = 1, 2, 3)$ (in einem bestimmten Richtungssinne auf Q gerechnet) durch denjenigen Teilbogen von R_{ji} ersetzen, der Punkte K_j^* enthält. Auf diese Weise ist also eine einfache geschlossene Kurve C_i entstanden, deren Inneres zu $K_1^* + K_2^* + K_3^*$ fremd ist, die in G_i^* liegt und $C_i . K_j^* \neq 0$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ ist.

Es sei $a_{ij} \subset C_i . K_j^*$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$. Da die Punkte a_{ij} auf Kontinuen K_j^* liegen, die miteinander und mit dem Innern von C_i fremd sind, so lassen sie sich auch durch miteinander fremde einfache Bögen (arcs simples) verbinden, die, abgesehen von den Endpunkten, im Äusseren von C_i liegen. Die Kurven C_i liegen aber offenbar ausserhalb einander, da ihre Innern den fremden Gebieten G_i^* gehören; indem wir also die Definition des Umlaufsinnes von J. R. Kline benutzen, können wir sagen, dass die Anordnungen von:

(15) $$a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \quad \textit{und} \quad a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \quad \textit{invers}$$

(16) $$a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \quad \textit{und} \quad a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \quad \textit{invers}$$

(17) $$a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \quad \textit{und} \quad a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \quad \textit{invers}$$

sind.

Das ist jedoch unmöglich, denn (15) und (16) zieht nach dem Satze von J. R. Kline die Gleichheit den Anordnungen von $a_{11}\, a_{12}\, a_{13}$ und $a_{31}\, a_{32}\, a_{33}$ nach sich, w. z. b. w.

Anwendungen.

Wir bezeichnen das Kontinuum K als das **Konvergenzkontinuum** der Menge C, falls in C eine Folge von Kontinuen $\{K_n\}$ existiert, so dass

(18) $$K_n \cdot K_m = 0 \qquad (n \neq m)$$

(19) $$K \cdot K_n = 0$$

(20) $$K = \operatorname{Lim} K_n$$ [1])

Wir sagen, das Kontinuum C zerschneide die Ebene **lokal** im Punkte p, falls es eine Umgebung U_p des Punktes p gibt, derart dass jede Teilumgebung V_p von U_p durch C zerschnitten ist [2]).

Hilfssatz 3. *Wenn das Gebiet G von unendlich vielen der Kontinua K_n, mit $\lim K_n = K$, zerschnitten wird, so wird G durch $K + \Sigma K_n$ in unendlich viele Gebiete zerschnitten.*

Beweis. Die Menge $J = K + \Sigma K_n$ ist abgeschlossen, ihr Komplement in Bezug auf G ist offen, also eine Gebietssumme. Es genügt also zu beweisen, dass die Anzahl der Komponenten von $G - J$ unendlich ist. Nehmen wir an, dass $\sum\limits_{n=1}^{n=i_1} K_n$ das Gebiet G in j Gebiete H_l $(l = 1, 2, \ldots j)$ zerschneidet (j nehmen wir als endlich an, sonst wäre der Satz bereits bewiesen). Wir zeigen, dass $\sum\limits_{n=1}^{n=i_2} K_n$, wo $i_2 > i_1$ und K_{i_2} das Gebiet G zerschneidet, in G mindestens $j+1$ Gebiete bestimmt.

Unter den Gebieten H_l gibt es sicher eines, es heisse H_1, welches die Summe M unendlichvieler derjenigen Mengen $K_n \cdot G$ $(n > i_1)$ enthält, die G zerschneiden. Da $F(H_l) \subset F(G) + \sum\limits_{n=1}^{n=i_1} K_n$, so sind die Mengen $H_l + F(H_l)$ für $l > 1$ fremd zu M, also ist die abgeschlossene Menge $P = \sum\limits_{l=2}^{l=j} H_l + F(H_l)$ fremd zu einer gewissen Komponente K'_{i_2} von $K_{i_2} \cdot G$, welche G zerschneidet und zu M gehört Die Menge K'_{i_2} bestimmt in G mindestens zwei Gebiete S und T; wegen $P \cdot K'_{i_2} = 0$ folgern [3]) wir hieraus, dass $S - P \neq 0$ und $T - P \neq 0$. Die Menge $\sum\limits_{n=1}^{n=i_2} K_n$ bestimmt also in G mindestens die Gebiete $H_2, H_3, \ldots, H_l$ und $S - P$. $T - P$ deren Anzahl $j+1$ ist, w. z. b. w.

[1]) Vergl. C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. IX, p. 127.

[2]) C. Zarankiewicz, *Sur les coupures locales faites par des continus*, Bull. Acad. d. Scienc., Cracovie, 1927 (Mai).

[3]) weil anderenfalls wäre es z. B.: $S \subset P$ woher wegen Abgeschlossenheit von $P: S + F(S) \subset P$ und demnach wegen $F(S) \cdot K'_{i_2} \neq 0$, auch $P \cdot K'_{i_2} \neq 0$.

Satz 2. *Auf dem Konvergenzkontinuum K von $\{K_n\}$ kann es höchstens zwei Punkte geben in welchen $K + \Sigma K_n$ die Ebene nicht in unendlich viele Gebiete lokal zerschneidet* [1]).

Beweis. Nehmen wir an, p und q seien derartige Punkte des Konvergenzkontinuum K in welchen $K + \Sigma K_n$ die Ebene nicht in unendlich viele Gebiete lokal zerschneidet. Es gibt also genügend kleine Umgebungen U_p und U_q von p resp. q, die höchstens in endlichviele Gebiete zerschnitten werden; das bedeutet aber wegen des Hilfssatzes 3, dass höchstens endlichviele von den K_n die Umgebungen U_p und U_q zerschneiden. Indem wir also von endlichviele K_n absehen, erhalten wir eine Menge $\sum\limits_{n=n_0}^{n=\infty} K_n$, so dass U_p und U_q von keinem der K_n $(n > n_0)$ zerschnitten werden.

Es sei x ein beliebiger Punkt von K, verschieden von p und q, und U_x eine Umgebung von x. Wegen $q \neq x \neq p$ dürfen wir annehmen, dass U_p. U_q, U_x ausserhalb einander liegen.

Die Folge $\{K_n\}$ $n > n_0$ zerlegen wir in Gruppen zu je drei Gliedern. Wegen (20) ist für genügend grosses $n_1 > n_0$

(21) $$\begin{aligned} K_n \cdot U_p &\neq 0 \\ K_n \cdot U_x &\neq 0 \qquad \text{für} \quad n > n_1 \\ K_n \cdot U_q &\neq 0. \end{aligned}$$

Nach (18) und (21) erfüllt jede Gruppe von drei der Kontinuen K_n die Voraussetzungen des Satzes 1, also muss mindestens eines der Kontinuen einer solchen Gruppe mindestens eines der Gebiete U_p, U_q, U_x zerschneiden und weil dies weder für U_p noch für U_q (wie oben angenommen) der Fall ist, so muss also mindestens ein Kontinuum jeder Gruppe das Gebiet U_x zerschneiden.

In der Folge $\{K_n\}_{n > n_1}$ existieren somit unendlich viele Kontinua, die U_x zerschneiden. Nach dem Hilfssatze 3 wird U_x durch $K + \Sigma K_n$ in unendlich viele Gebiete zerschnitten und da U_x eine beliebige Umgebung von x war, so folgt, dass $K + \Sigma K_n$ die Ebene im Punkte x lokal in unendlichviele Gebiete zerschneidet, w. z. b. w.

[1]) Dieser Satz ist die Lösung eines mir von Herrn B. Knaster gestellten Problems.

Es sei bemerkt, dass es Konvergenzkontinua gibt von der Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte $K + \Sigma K_n$ die Ebene lokal in unendlich viele Gebiete zerschneidet, wie auch solche, wo es einen, bzw. zwei Ausnahmepunkte gibt.

Ein Beispiel für den ersten Fall bietet das Kontinuum ($x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant +1$) mit K_n $\left(y = \sin\frac{1}{x},\ \frac{1}{(k+2)\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k\pi}\right.$ wo $\left.k = 1 + 3n \text{ ist}\right)$; für den zweiten Fall, das Kontinuum ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) mit $K_n\left(y = \sin\frac{1}{x},\ \frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k\pi} \text{ wo } k = 2n \text{ ist}\right)$; hier ist nur $(0, 0)$ ein Ausnahmepunkt.

Der dritte Fall tritt ein für das Kontinuum ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) mit $K_n\left(x = \frac{1}{n},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right)$; hier sind $(0, 0)$ und $(0, 1)$ zwei Ausnahmepunkte.

Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Soit $f(x)$ la fonction possédant la période $b - a$. Soit

$$a \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \xi_i \leqslant x_i \leqslant \ldots \xi_n \leqslant b \quad (x_0 = a,\ x_n = b)$$

une subdivision de ab. M. Denjoy[1]) dit que $f(x)$ est *intégrable au sens (B)* et que l'intégrale

$$(B)\int_a^b f(x)\,dx$$

a pour valeur I, si, lorsque le pas ω de la subdivision x_i tend vers zéro, la mesure de l'ensemble des t vérifiant les relations

$$| I - \varphi(t) | = | I - \Sigma(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i + t) | > R,$$
$$0 < t < b - a,$$

tend vers zéro, quel que soit le nombre positif R indépendant de ω.

M. Denjoy a démontré que toute fonction sommable est intégrable (B). Notre bût est de montrer, que *toute fonction*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\, d_\alpha$$

conjuguée à une fonction sommable $f(x)$ de période 2π est aussi intégrable (B). On sait que parmis ces fonctions $g(x)$ il y en de telles, qui ne sont sommables dans aucun intervalle.

Nous avons établi ailleurs[2]) l'inégalité

$$\text{Mes}\{ | g(x) | > R \} < \frac{C}{R}\int_0^{2\pi} | f(x) | \, dx, \tag{1}$$

[1]) *Sur l'intégration riemanienne*, Comptes Rendus, t. 169, p. 219.

[2]) Fundamenta Mathematicae, t. VII, p. 25.