L'ensemble g_m, $(m = 1, 2, \ldots)$ étant ouvert, on y peut, comme chez M. Stepanoff (p. 267 et 268), faire correspondre une suite infinie de fonctions continues $f_1^m(x)$, $f_2^m(x), \ldots$, jouissant des propriétés suivantes:

1) si $x \in Cg_m$, on a $f_\lambda^m(x) = 0$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots$,
2) $x \in g_m$, il existe au moins un indice l, pour lequel $f_\lambda^m(x) = 1$,
3) $0 \leqslant f_\lambda^m(x) \leqslant 1$ toujours,
4) quelque soit m et x, il existe au plus deux indices λ, tels que $f_\lambda^m(x) \neq 0$.

Rangeons les fonctions $f_\lambda^m(x)$ dans une suite simple:

$$f_1^1(x),\ f_2^1(x),\ f_1^2(x),\ f_3^1(x),\ f_2^2(x),\ f_1^3(x), \ldots,$$

lequelle sera désignée que voici:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ f_5(x),\ f_6(x), \ldots,$$

et formons une suite nouvelle de la manière suivante: si $f_\lambda(x)$ désigne la fonction $f_n^m(x)$ et si g_m désigne l'ensemble $\widetilde{G}_l^k$, posons:

$$h_\lambda(x) \underset{df}{=} (\alpha_k + \alpha_{k+l} + \lambda) \cdot f_\lambda(x) - \lambda - \alpha_k .$$

On démontre, comme chez M. Stepanoff, que

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}}\, h_\lambda(x) = F(x).$$

La limite inférieure est toujours $-\infty$.

Sur les suites des fonctions continues.

Par

G. Goldowsky (Moscou).

M. Stepanoff a démontré qu'une fonction non négative $F(x)$ quelconque de type ul, peut être considérée comme limite supérieure d'une suite simple de fonctions continues.

M. O. Nikodym ayant généralisé ce théorème pour le cas d'une fonction non bornée inférieurement, a posé la question suivante:

Étant données deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement de type ul et lu, existe-t-il une suite simple de fonctions continues

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots,$$

telle que

$$\lim_{n=\infty} \sup f_n(x) = F(x); \quad \lim_{n=\infty} \inf f_n(x) = G(x).$$

J'en donnerai ici une solution affirmative.

I. Démontrons d'abord un lemme préliminaire.

Lemme. Quelles que soient deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement du type ul et lu, il existe toujours une suite simple de fonctions continues

$$h_1(x),\ h_2(x), \ldots,\ h_n(x), \ldots$$

telle que

$$F(x) \geqq \lim \sup h_n(x) \geqq \lim \inf h_n(x) \geqq G(x).$$

Démonstration: $F(x)$ est la limite d'une suite non croissante de fonctions $\varphi_i(x)$ de type l: $\lim_{i=\infty} \varphi_i(x) = F(x)$; $\varphi_i(x) \geqq \varphi_{i+1}(x)$.

$G(x)$ est la limite d'une suite non décroissante de fonctions $\psi_i(x)$ de type u: $\lim_{i=\infty} \psi_i(x) = G(x)$; $\varphi_i(x) \leqslant \psi_{i+1}(x)$.

De l'inégalité
$$F(x) \geqq G(x)$$
il suit que
$$\varphi_i(x) \geqq \psi_i(x).$$

En ce cas, comme l'a démontré M. Hausdorff[1]), on peut construire une fonction continue $h_i(x)$ telle que
$$\varphi_i(x) \geqq h_i(x) \geqq \psi_i(x).$$

La suite
$$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x), \ldots$$
repond aux conditions exigées.

II. **Théorème:** *Quelles que soient les fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement de type ul et lu, il existe toujours une suite de fonctions continues ayant ces fonctions respectivement pour limites supérieure et inférieure.*

Démonstration: Les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ étant données, on peut, selon les résultats de MM. Stepanoff et Nikodym, construire deux suites de fonctions continues
$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad \text{et} \quad g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$
telles que
$$\limsup_{n=\infty} f_n(x) = F(x); \quad \liminf_{n=\infty} g_n(x) = G(x).$$

Désignons par
$$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x), \ldots$$
une suite de fonctions continues telle que:
$$F(x) \geqslant \limsup_{n=\infty} h_n(x) \geqq \liminf_{n=\infty} h_n(x) \geqq G(x).$$

Il est évident que
$$F(x) = \limsup_{n=\infty} F_n(x) \geqq \liminf_{n=\infty} F_n(x) \geqq G(x); \quad F_n(x) = \max[f_n(x), h_n(x)]$$
et que
$$G(x) = \liminf_{n=\infty} G_n(x) \leqq \limsup_{n=\infty} G_n(x) \leqq F(x); \quad G_n(x) = \min[g_n(x), h_n(x)].$$

La suite
$$F_1(x), G_1(x), F_2(x), G_2(x), \ldots, F_n(x), G_n(x), \ldots$$
satisfait aux conditions posées.

[1]) Hausdorff, *Mengenlehre*, 2-me édition, p. 248. M. Hausdorff a démontré ce théorème en supposant que les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ sont finies. Mais cette restriction n'est guère indispensable, la même démonstration étant valable pour les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ non finies.

Sur un ensemble non mesurable, jouissant de la propriété de Baire.

Par

S. Saks (Varsovie).

Dans le vol. IX de ce journal (p. 117) M. N. Lusin a déduit de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ l'existence d'un ensemble linéaire non mesurable (L) qui est de première catégorie par rapport á chaque ensemble parfait.

D'autre part, dans le vol. V des „*Fundamenta*" (p. 184) M. Sierpiński a démontré, à l'aide de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable E, jouissant de la propriété (S) suivante:

(S). Tout sous-ensemble non dénombrable de E est non mesurable (L).

Le but de cette note est de remarquer que *tout ensemble E jouissant de la propriété (S) est de première catégorie par rapport à chaque ensemble parfait* (et parsuite satisfait à la condition de Baire).

Soit, en effet, P un ensemble parfait donné. Comme on sait, on peut poser $P = N + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, où P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles non denses sur P, et N est un ensemble de mesure nulle. Il en résulte que $PE = NE + P_1 E + P_2 E + \ldots$ Or, l'ensemble NE est au plus dénombrable, puisqu'il est de mesure nulle (et, d'après la propriété (S), tout sous-ensemble non dénombrable de E est non mesurable). L'ensemble $P_1E + P_2E + \ldots \subset P_1 + P_2 + \ldots$ étant évidemment de 1[re] catégorie sur P, il en résulte tout de suite que l'ensemble E est de première catégorie sur P, c. q. f. d.