Sur les suites des fonctions continues.

Par

W. Stepanoff (Moscou).

M. Hausdorff[1]) a démontré que l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues est un $(F_{\sigma\delta})$; par suite l'ensemble des points de divergence, comme complémentaire à un ensemble $(F_{\sigma\delta})$, est un $(G_{\delta\sigma})$. C'est MM. Hahn[2]) et Sierpiński[3]) qui ont trouvé indépendamment ce résultat plus précis: chaque ensemble $(F_{\sigma\delta})$ peut être régarde comme l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues.

Dans le présent article je démontre le théorème suivant:

Toute fonction non négative du type ul[4]) *peut être représentée comme l'oscilation limite d'une suite de fonction continues.*

La construction que je propose donne en particulier le résultat de MM. Hahn et Sierpiński. en le généralisant pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Soit

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\dots$$

une suite infinie de fonctions continues, x étant un point variable dans l'espace à n dimensions. L'ensemble des points de divergence de cette suite peut être représenté par l'expression:

$$M=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}E\left\{|f_n(x)-f_{n+p}(x)|>\frac{1}{k}\right\}.$$

[1]) F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig und Berlin 1914, Kap. IX, § 6.

[2]) H. Hahn: Archiv. d. Math. u. Phys. III Reihe 28 p. 34 ss.

[3]) Fundamenta Mathematicae, t. II, p, 41 ss.

[4]) W. H. Joung: *On functions and their associated sets of points.* Proceedings of Lond. Math. Soc. 1913.

L'ensemble des points où la fonction continue $|f_n(x)-f_{n+p}(x)|$ surpasse $\frac{1}{k}$ étant ouvert ainsi qu'une somme dénombrable de tels ensembles, nous en déduisons que l'ensemble M est un $(G_{\delta\sigma})$. Le théorème cité de MM. Hahn et Sierpiński affirme que pour un ensemble arbitraire de ce type il existe une suite de fonctions continues dont il est l'ensemble des points de divergence.

Nous appelerons *oscillation limite* d'une suite infinie de nombres

$$u_1,\ u_2,\ u_3\dots$$

la difference entre la plus grande et la plus petite limite de cette suite

$$\Omega=\overline{\lim}\,u_n-\underline{\lim}\,u_n.$$

D'une manière analogue, étant donnée une suite de fonctions $f_n(x)$, nous appelerons *oscillation limite de cette suite* la fonction

$$\Omega(x)=\overline{\lim}\,f_n(x)-\underline{\lim}\,f_n(x).$$

La fonction $\Omega(x)$ est non négative; dans les points de convergence $\Omega(x)=0$.

L'oscillation limite peut avoir aussi en certains points la valeur infinie positive, si l'une au moins des limites extrêmes est infinie, (quant à la soustration des infinités, nous conviendrons avec M. Baire d'appliquer les règles suivantes:

$$+\infty-(-\infty)=+\infty-a=a-(-\infty)=+\infty;$$
$$+\infty-(+\infty)=0).$$

Analysons la structure de la fonction $\Omega(x)$ dans la cas où les $f_n(x)$ sont continues.

Pour définir $\lim f_n(x)$ nous pouvons procéder de la manière suivante. Désignons par

$$f_{n,\,n+m}(x)=\max\,[f_n(x),f_{n+1}(x),\dots f_{n+m}(x)];$$

cette fonction est continue.

Considérons la limite de la suite non décroissante des fonctions continues

$$F_n(x)=\lim_{m=\infty}f_{n,\,n+m}(x);$$

c'est une fonction de la classe I, sémicontinue inférieurement, c'est-à-dire du type l de M. Young (l. c.).

La suite $F_n(x)$ est non croissante; nous aurons

$$\overline{\lim}\, f_n(x) = \lim_{n=\infty} F_n(x).$$

Nous avons défini $\overline{\lim}\, f_n(x)$ comme la limite d'une suite non croissante de fonctions sémi-continues inférieurement; pas suite c'est une fonction de la classe $\leqslant 2$ et du type ul de M. Young.

$F(x)$ est déterminée par le même procédé, si nous posons

(1) $f_{n,\,n+m}(x) = \max\,[f_n(x), f_{n+1}(x) \ldots f_{n+m}(x)] - \min\,[f_n(x), \ldots f_{n+m}(x)]$.

On pourrait déduire des raisonnements de M. Young que l'ensemble $E\{\Omega(x) \geqq \alpha\}$ (α est un nombre positif quelconque) est un (G_δ); nous le démontrerons directement. On trouve aisément:

$$E\{\Omega(x) \geqq \alpha\} = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E\left\{f_{n,\,n+m}(x) > \alpha - \frac{1}{k}\right\}.$$

où $f_{n,\,n+m}$ est définie par l'équation (1).

L'ensemble sous le signe de la somme est un (G); la somme des (G) est aussi un (G); le produit des (G) est un (G_δ), enfin, le produit des (G_δ) est un (G_δ). Nous obtenons ce résultat

L'ensemble des points où l'oscillation limite d'une suite de fonctions continues est $\geqq \alpha$, constitue un (G_δ) [1].

Remarquons qu'un ensemble (G_δ) partout dense est de la seconde catégorie. Donc si la suite des fonctions continues possède l'oscillation limite $\geqq \alpha$ dans un ensemble partout dense, cette oscillation est $\geqq \alpha$ dans un certain ensemble de la deuxième catégorie. Pour cette raison il n'existe, en particulier, aucune suite de fonctions continues qui divergerait seulement aux points d'un ensemble dénombrable partout dense.

Je vais démontrer *qu'un ensemble quelconque H du type (G_δ) étant donné, on peut construire une suite infinie de fonctions continues ayant pour points de divergence seuls les points de cet ensemble; en tout point de cet ensemble l'oscillation limite sera égale à un nombre donné* (p. ex. à l'unité); *dans le complémentaire de H la suite convergera.*

[1]) Dans le raisonnement précédent si nous prenons k à la place de $\alpha - \frac{1}{k}$, nous voyons que l'ensemble $E\{\Omega(x) = \infty\}$ est lui aussi un (G_δ).

L'ensemble H étant donné [1]), nous supposons donnés aussi les ensembles ouverts G_δ dont celui-ci constitue la partie commune:

$$G_1,\ G_2, \ldots$$

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Nous pouvons supposer que chaque ensemble suivant dans cette suite est contenu dans le précédent; s'il n'était pas été ainsi, nous aurions substitué le système donné par le suivant:

$$G_1 = G_1;\quad \widetilde{G}_2 = \widetilde{G}_1 . G_2;\quad \widetilde{G}_3 = \widetilde{G}_2 . \widetilde{G}_3; \ldots\quad \widetilde{G}_n = \widetilde{G}_{n-1} . G_n; \ldots$$

Donc nous avons

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots G_n \supset \ldots$$

Les complémentaires aux ensembles ouverts sont fermés. Nous les désignerons

$$CG_1 = F_1,\quad CG_2 = F_2, \ldots\quad CG_n = F_n, \ldots$$

Il est évident que

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots F_n \subset \ldots$$

Désignons aussi $CH = K$, K est un (F_σ).

Nous allons construire pour chaque ensemble G_k, une suite infinie des fonctions continues $f_n^k(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jouissant des propriétés suivantes:

1°. Si $x \subset F_n$ on a $f_n^k(x) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$;
2°. $0 \leqslant f_n^k(x) \leqslant 1$ pour tous les x;
3°. si $x \subset G_k$, il existe un indice n pour lequel on a $f_n^k(x) = 1$;
4°. pour chaque x et k il existe au plus deux indices n tels que $f_n^k(x) \neq 0$.

Pour construire de telles fonctions décomposons les G_k en sommes d'ensembles

$$G_1 = E_1^1 + E_2^1 + \ldots + E_n^1 + \ldots$$
$$G_2 = E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_n^2 + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_k = E_1^k + E_2^k + \ldots + E_n^k + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

[1]) On peut aussi considérer des fonctions définies dans un intervalle, ce qui exige de légères modifications de nôtre raisonnement.

où les E_n^k sont définis comme il suit:

1) Si, F_k est vide, l'ensemble E_n^k est le somme de deux intervalles fermés: $(-n, -n+1)$ et $(n-1, n)$.

2) Si $F_k = CG_k$ n'est pas vide, E_1^k désigne l'ensemble des points de G_k, dont la distance de F_k est $\geqslant 1/2$; E_n^k, pour $n > 1$, désigne l'ensemble des points de G_k, dont la distance de F_k est $\leqslant \frac{1}{n}$ et $\geqslant \frac{1}{n+1}$.

Chaque ensemble E_n^k, s'il n'est pas vide, se compose de segments (finis ou non) ou de points isolés.

Nous définissons la fonction $f_n^k(x)$ de la manière suivante:

$f_n^k(x) = 1$ sur l'ensemble E_n^k; de deux côtés de chaque ségment (ou point) $f_n^k(x)$ varie linéairement de 1 jusqu'à 0 sur les segments de longeur $\frac{1}{2n(n+1)}$; dans tous les autres points de l'axe x nous posons $f_n^k(x) = 0$ [1]) Si E_n^k est vide, posons $f_n^k(x) = 0$ partout. La suite $f_1^k(x)$, $f_2^k(x$ .... possède les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° énoncées plus haut.

Nous pouvons construire maintenant la suite de fonctions qui ne diverge que dans H, ayant en chaque points de cet ensemble l'oscillation limite égale à 1. Ordonnons la suite double des fonctions $f_n^k(x)$ en une suite simple par la méthode des diagonales, c'est-à-dire nous poserons:

$$f_1^1(x) = f_1(x);\ f_2^1(x) = f_2(x).\ f_1^2(x) = f_3(x);\ f_3^1(x) = f_4(x),\ f_2^2(x) = f_5(x)...$$

en général $f_n^k(x) = f_{\frac{(n+k-1)(n+k-2)}{2}+k}(x)$.

[1]) Dans l'espace limité, à un nombre quelconque de dimensions E_n^k se compose de continus ou de points; nous désignerons par C_n^k la frontière de E_n^k, par $\widetilde{C}_n^k$ l'ensemble des points dont la distance de C_n^k est égale à $\frac{1}{2n(n+1)}$ et nous définirons $f_n^k(x)$ de la manière suivante: $f_n^k(x) = 1$ dans E_n^k; $f_n^k(x)$ varie d'une manière continue de 1 à 0 entre C_n^k et $\widetilde{C}_n^k$, c'est-à-dire, pour les points x dont la distance de E_n^k est $\leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$. En désignant par d la distance de x à C_n^k et par d' la distance de x à $\widetilde{C}_n^k$, nous pouvons p. ex. poser dans ce domaine: $f_n^k(x) = \frac{d'}{d+d'}$; enfin $f_n^k(x) = 0$, si la distance de x à E_n^k est $\geqq \frac{1}{2n(n+1)}$.

La suite $f_n(x)$ a la propriété enoncée: elle converge vers 0 dans K et elle diverge dans H ayant en tout point de ce dernier l'oscillation limite $= 1$.

En effet, soit $x \subset H$. Cela signifie, que $x \subset G_1$, $x \subset G_2$,... $x \subset G_k$.

Dans la suite $f_n^k(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ deux fonctions au plus ont au point x la valeur différente de zéro, cette valeur étant l'unite pour une fonction. Dans la suite double une infinité de fonctions a la valeur 0 et une infinité la valeur 1; nulle valeur ne surpasse l'unité. Donc l'oscillation limite au point x est égale à 1.

Soit en second lieu $x \subset K$; alors x n'appartient qu a un nombre fini d'ensembles G_k, soit $G_1, G_2, \ldots, G_l$ $(l \geqq 0)$. Dans chaque de l premières lignes du Tableau double il ne se trouve que deux fonctions au plus dont la valeur au point x est différente de zéro; donc le tableau entier en contient un nombre fini, donc la suite converge en ce point vers 0.

Nous allons établir maintenant le théorème suivant:

Etant donnée une fonction quelconque non négative $F(x)$ du type ul de M. Young (c'est à dire la limite d'une suite non croissante de limites de suites non décroissantes de fonctions continues), *il est possible de construire une suite de fonctions continues telle, que $F(x)$ exprime l'oscillation limite de cette suite.*

Montrons d'abord que l'ensemble des points où $F(x) \geqq \alpha$ est un (G_δ). $F(x)$ comme fonction du type ul est la limite d'une suite non croissante de fonctions F_k sémi-continues inférieurement. Pour une telle fonction l'ensemble $E\{F_k(x) \leqq \alpha\}$ est fermé, l'ensemble où $F_k(x) > \alpha$, est ouvert, (G); l'ensemble

$$E\{F_k(x) \geqq \alpha\} = \prod_{p=1}^{\infty} E\left\{F_k(x) > \alpha - \frac{1}{p}\right\},$$

c'est à dire, il est un (G_δ); enfin

$$E\{F(x) \geqq \alpha\} = \prod_{k=1}^{\infty} E\{F_k(x) \geqq \alpha\}$$

étant un produit de (G_δ), est lui aussi un (G_δ).

Toute fonction est complétement déterminée par la connaissance des ensembles de points $E\{F(x) \geqq \alpha_k\}$, α_k formant un ensemble dénombrable partout dense de nombres, p. ex. l'ensemble de tous les nombres rationnels. En effet, α étant un nombre irrationnel et $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \ldots$ une suite croissante de nombres rationnels ayant pour limite α, nous déterminerons sans ambigüité l'ensemble où $F(x) \geqq \alpha$ par la formule

$$E\{F(x) \geqq \alpha\} = \prod_{k=1}^{\infty} E\{F(x) \geqq \alpha_{k_n}\}.$$

Donc, soit $F(x)$ la fonction non négative donnée. du type ul. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_k, \dots$ tous les nombres positifs rationnels rangés dans une suite simple. Désignons par H_k l'ensemble des points où $F(x) \geqq \alpha_k$. Il est évident que $H^k \subset H^l$ si $\alpha_k > \alpha_l$. Nous supposons donné avec chaque ensemble H^k un système déterminé d'ensembles ouverts, dont H^k est la partie commune: soit

$$G_1^k, \; G_2^k, \dots \; G_n^k, \dots$$

D'après une remarque faite plus haut nous povons supposer toujours que l'on a $G_n^k \supset G_{n+1}^k$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Je vais montrer qu'il est possible de substituer aux ensembles G_n^k d'autres jouissant pour tout n de la propriété suivante: $G_n^k \subset G_n^l$ pour $\alpha_k > \alpha_l$, les H^λ correspondants restants sans changements. Nous opérons de la manière suivante.

La première ligne dans notre tableau d'ensembles à double entrée $\{G_n^k\}$ reste sans changement: $\widetilde{G}_n^1 = G_n^1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Admettons que j premières lignes sont déjà transformées $(j \geqq 1)$; montrons quels ensembles nous placerons à la $j+1^{\text{me}}$ ligne.

Trois cas sont à distinguer:

1°. Soit $\alpha_{j+1} > \alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots j)$ et soit α_i le plus grand des nombres α_k; nous poserons:

$$\widetilde{G}_n^{j+1} = G_n^{j+1} \cdot \widetilde{G}_n^i.$$

Montrons que dans ce cas le produit des G_n^{j+1} donne le même ensemble G_δ^{j+1}. En effet

$$\prod_n \widetilde{G}_n^{j+1} = \prod_n G_n^{j+1} \cdot \prod_n \widetilde{G}_n^i = H^{j+1} \cdot H^i = H^{j+1} \quad \text{car } H^{j+1} \subset H^i.$$

2°. $\alpha_{j+1} < \alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots j)$; soit α_i le plus petit des nombres α_k. Je pose: $\widetilde{G}_n^{j+1} = G_n^{j+1} + \widetilde{G}_n^i$. J'affirme que dans ce cas nous avons aussi $\prod \widetilde{G}_n^{j+1} = H^{j+1}$.

En effet soit $x \subset H^{j+1}$, alors $x \subset G_n^{j+1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $x \subset \widetilde{G}_n^{j+1}$ pour tout n, donc $x \subset \prod_n \widetilde{G}_n^{j+1}$.

D'autre part, si $x \subset CH^{j+1}$, alors $x \subset CH^i$; donc il existe un nombre N_1 tel que $x \subset CG_n^{j+1}$ pour $n > N_1$, et il existe un nombre N_2 tel que pour $n > N_2$ on a $x \subset C\widetilde{G}_n^i$; en désignant par N le plus grand des nombres N_1 et N_2 nous avons: $x \subset C\widetilde{G}_n^{j+1}$ pour $n > N$, donc $x \subset C(\prod_n \widetilde{G}_n^{j+1})$.

3°. α_{j+1} est compris entre le plus grand et le plus petit des nombres α_k $(k = 1, 2, \dots j)$. Soient les deux nombres α_p et α_q immédiatement voisins de α_{j+1} parmis les α_k, de sorte que $\alpha_p < \alpha_{j+1} < \alpha_q$. Dans ce cas nous définissons $\widetilde{G}_n^{j+1} = G_n^{j+1} \cdot \widetilde{G}_n^p + \widetilde{G}_n^q$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$. En tenant compte que dans le cas actuel $H^p \supset H^{j+1} \supset H^q$, nous prouverons par des raisonnements analogues aux précédents que dans ce cas nous avons aussi $\prod_n \widetilde{G}_n^{j+1} = H^{j+1}$.

Ainsi nous pouvons supposer toujours les ensembles G_n^k donnés d'une telle manière que $G_n^k \subset G_n^l$ dès que $\alpha_k > \alpha_l$.

Après ces préparatifs nous pouvons construire la suite énoncée des fonctions. Dans ce but nous choisissons dans le tableau double $\{G_n^\lambda\}$ la suite suivante:

$$G_1^1, \; G_2^1, \; G_2^2, \; G_3^1, \; G_3^2, \; G_3^3, \dots \; G_n^1, \; G_n^2, \dots \; G_n^n, \; G_{n+1}^1, \dots$$

que nous désignerons parfois simplement par

$$g_1, \; g_2, \dots \; g_m, \dots$$

Pour tout ensemble g_m $(= G_i^l)$ nous construirons par le procédé décrit plus haut la suite infinie des fonctions continues $f_n^m(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ jouissant des propriétés suivantes: toutes ces fonctions sont nulles en dehors de g_m; elles sont $\geqslant 0$ et $\leqq \alpha_k$; en chaque point de g_m deux au plus de ces fonctions sont différentes de 0 et l'une au moins prend la valeur α_k.

Rangeons la suite double $f_n^m(x)$ en une suite simple en posant

$$f_1^1(x) = f_1(x); \quad f_2^1(x) = f_2(x), \quad f_1^2(x) = f_3(x), \dots$$

et en général

$$f_n^m(x) = f_{1/2(m+n-1)(m+n-2)+m}(x).$$

La suite $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$ possède la propriété énoncée: son oscillation limite en un point x est $\geqslant \alpha_k$ si $x \subset H^k$ et est $< \alpha_k$ si $x \subset CH^k$.

En effet, soit en premier lieu $x \subset H^k$, alors $x \subset G_1^k \cdot G_2^k \cdot G_3^k \dots$; de cette ligne une infinité d'ensembles fait part de la suite $\{g_m\}$, à savoir les ensembles $G^k_k, G^k_{k+1}, \dots$; $m_1, m_2, \dots$ soient leurs places dans la suite g_m. Dans la suite des fonctions $f^{m_i}_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$ une au moins prend au point x la valeur α_k et un nombre infini prend la valeur 0. Donc dans la suite $f_n(x)$ il se trouve une infinité de fonctions avec la valeur α_k au point x (l'indice i prenant les valeurs $1, 2, 3, \dots$) et une infinité avec la valeur 0, donc $\Omega(x) \geqq \alpha_k$.

Soit en second lieu le point x n'appartenant pas à H^k; cela signifie que $F(x) = \alpha < \alpha_k$. Prenons un nombre rationnel α_r satisfaisant aux inégalités $\alpha < \alpha_r < \alpha_k$. Il s'ensuit de la définition des ensembles H^i que x n'appartient ni à H^r ni à l'ensemble quelconque H^i pour $\alpha_i > \alpha_r$; x n'appartenant pas à H_r il s'ensuit qu'il n'appartient pas à H^r pour $n > N$, où N est un nombre suffisamment grand. Grace à la construction des ensembles G aux deux indices, x n'appartient non plus a aucun ensemble G^i_n pour $n > N$ et $\alpha_i > \alpha_r$. Il n'entre dans le système g_m qu'un nombre fini d'ensembles G^i_n avec $n \leqq N$, donc x ne peut appartenir qu à un nombre fini d'ensembles G^i_n avec $\alpha_i > \alpha_r$. Dans chaque ligne des fonctions f à deux indices, correspondant à un tel G^i_n, ces fonctions prennent deux fois au plus des valeurs >0 et $\leq \alpha_i$. Donc un nombre fini de fonctions $f_n(x)$ a au point x la valeur $> \alpha_r$. Par suite $\overline{\lim}\, f_n(x) = \Omega(x) \leqq \alpha_r < \alpha_k$.

Le théorème est démontré.

Il s'ensuit en particulier de notre construction qu'*une fonction arbitraire du type* $\boldsymbol{ul}$ *non négative peut être représentée comme la limite supérieure d'une suite infinie de fonctions continues.*

Nous pouvons prendre en particulier une fonction $F(x)$ du type $\boldsymbol{ul}$ de sorte que l'ensemble $E\{F(x) > 0\} = \sum\limits_k E\{F(x) > \alpha_k\}$ soit un ensemble $G_{\delta\sigma}$ arbitraire; le complémentaire de cet ensemble est un $(F_{\delta\sigma})$ arbitraire. La suite $f_n(x)$ converge dans ce dernier, et nous revenons au théorème de MM. Hahn et Sierpiński, généralisé pour un nombre quelconque de dimensions.

Note de M. Otton Nikodym (à Cracovie).

La méthode développée ci-dessus par M. Stepanoff permet de démontrer le théorème suivant:

Quelle que soit la fonction $F(x)$ *finie ou non du type* $\boldsymbol{ul}$ *de M. Young il existe une suite de fonctions finies et continues telle que sa limite supérieure est identique à* $F(x)$ [1].

En effet, soient $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ tous les nombres rationnels rangés dans une suite (sans répétitions). Posons $\alpha_1 = +\infty$, $\alpha_2 = -\infty$ et envisageons les ensembles:

$$H^k = E\{F(x) \geqslant \alpha_k\}, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

où $F(x)$ est une fonction donnée d'avance, finie [2]) et du type $\boldsymbol{ul}$. On a $H^1 = 0$ (ensemble vide), $H^2 = 1$ (ensemble de tous les points, où l'on considère les fonctions). H^k étant un (G_δ), il existe une suite d'ensembles ouverts $G^k_1 \supset G^k_2 \supset \dots$, telle que $H^k = \prod\limits_{\lambda=1}^{\infty} G^k_\lambda$, $(k = 1, 2, \dots)$.

En imitant le procédé de M. Stepanoff, définissons:

$$\widetilde{G}^1_\lambda \underset{\overline{df}}{=} G^1_\lambda, \quad G^2_\lambda \underset{\overline{df}}{=} G^2_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots);$$

les ensembles $\widetilde{G}^i_\lambda$ étant supposés définis pour $i \leqslant j$, où $j \geqslant 2$ et pour $\lambda = 1, 2, \dots$, définissons les ensembles G^{j+1}_λ comme il suit: Soient α_p et α_q, où $p \leqslant j$, $q \leqslant j$, ceux de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ qui sont immédiatement voisins de α_{j+1} de sorte qu'on ait: $\alpha_p < \alpha_{j+1} < \alpha_q$.

Posons

$$\widetilde{G}^{j+1}_\lambda \underset{\overline{df}}{=} G^{j+1}_\lambda . \ \widetilde{G}^p_\lambda + \widetilde{G}^q_\lambda .$$

On trouve:

$$1^\circ \qquad H^k = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \widetilde{G}^k_\lambda, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

$$2^\circ \qquad \widetilde{G}^k_1 \supset \widetilde{G}^k_2 \supset \dots, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

$$3^\circ \qquad \text{si } \alpha_s < \alpha_t, \text{ on a } \widetilde{G}^s_\lambda \supset \widetilde{G}^t_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots)$$

Désignons par

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, \dots$$

les ensembles,

$$\widetilde{G}^{2+1}_1, \widetilde{G}^{2+1}_2, \widetilde{G}^{2+2}_2, \widetilde{G}^{2+1}_3, \widetilde{G}^{2+2}_3, \widetilde{G}^{2+3}_3, \dots$$

[1]) On n'envisage ici que des fonctions réelles d'une variable réelle x définies dans l'ensemble de tous les nombres réels, mais le point de vue peut être pris plus général.

[2]) On voit aisément qu'il suffit de démontrer le théorème pour le cas où $F(x)$ est supposé fini.

L'ensemble g_m, $(m=1, 2, \ldots)$ étant ouvert, on y peut, comme chez M. Stepanoff (p. 267 et 268), faire correspondre une suite infinie de fonctions continues $f_1^m(x)$, $f_2^m(x), \ldots$, jouissant des propriétés suivantes:

1) si $x \epsilon Cg_m$, on a $f_\lambda^m(x)=0$ pour $\lambda=1, 2, \ldots$,
2) $x \epsilon g_m$, il existe au moins un indice l, pour lequel $f_\lambda^m(x)=1$,
3) $0 \leqslant f_\lambda^m(x) \leqslant 1$ toujours,
4) quelque soit m et x, il existe au plus deux indices λ, tels que $f_\lambda^m(x) \neq 0$.

Rangeons les fonctions $f_\lambda^m(x)$ dans une suite simple:

$$f_1^1(x),\ f_2^1(x),\ f_1^2(x),\ f_3^1(x),\ f_2^2(x),\ f_1^3(x), \ldots,$$

lequelle sera désignée que voici:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ f_5(x),\ f_6(x), \ldots,$$

et formons une suite nouvelle de la manière suivante: si $f_\lambda(x)$ désigne la fonction $f_n^m(x)$ et si g_m désigne l'ensemble $\widetilde{G}_l^k$, posons:

$$h_\lambda(x) \underset{df}{=} (\alpha_k + \alpha_k + \lambda) . f_\lambda(x) - \lambda - \alpha_k .$$

On démontre, comme chez M. Stepanoff, que

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}}\, h_\lambda(x) = F(x).$$

La limite inférieure est toujours $-\infty$.

Sur les suites des fonctions continues.

Par

G. Goldowsky (Moscou).

M. Stepanoff a démontré qu'une fonction non négative $F(x)$ quelconque de type ***ul***, peut être considérée comme limite supérieure d'une suite simple de fonctions continues.

M. O. Nikodym ayant généralisé ce théorème pour le cas d'une fonction non bornée inférieurement, a posé la question suivante:

Étant données deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement de type ***ul*** *et* ***lu***, *existe-t-il une suite simple de fonctions continues*

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots,$$

telle que

$$\lim_{n=\infty} \sup f_n(x) = F(x); \quad \lim_{n=\infty} \inf f_n(x) = G(x).$$

J'en donnerai ici une solution affirmative.

I. Démontrons d'abord un lemme préliminaire.

Lemme. Quelles que soient deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqq G(x)$, respectivement du type ***ul*** et ***lu***, il existe toujours une suite simple de fonctions continues

$$h_1(x),\ h_2(x), \ldots,\ h_n(x), \ldots$$

telle que

$$F(x) \geqq \lim \sup h_n(x) \geqq \lim \inf h_n(x) \geqq G(x).$$

Démonstration: $F(x)$ est la limite d'une suite non croissante de fonctions $\varphi_i(x)$ de type l: $\lim\limits_{i=\infty} \varphi_i(x) = F(x)$; $\varphi_i(x) \geqq \varphi_{i+1}(x)$.

$G(x)$ est la limite d'une suite non décroissante de fonctions $\psi_i(x)$ de type u: $\lim\limits_{i=\infty} \psi_i(x) = G(x)$; $\varphi_i(x) \leqslant \psi_{i+1}(x)$.