Dies beweisen wir so. Wenn die Reihe $u_1, u_2, u_3, \dots$ abbricht, so ist es jedenfalls wahr. Bricht sie nicht ab, so sei a_{N_n} das erste a_q, dass in $H_{u_1}, H_{u_2}, \dots H_{u_n}$ nicht enthalten ist. Da alle a_q mit $q < N_m$ in $H_{u_1}, H_{u_2}, \dots, H_{u_m}$ enthalten sind, genügt es zu zeigen, dass einmal $p < N_n$ wird.

Nun enthalten $H_{u_1}, H_{u_2}, \dots, H_{u_n}$ alle a_q mit $q < N_n$, $H_{u_{n+1}}$ enthält a_{N_n}; also ist $N_{n+1} > N_n$, d. h. $N_{n+1} \geqslant N_n + 1$. Hieraus folgt insbesondere $N_n \geqslant n$, also z. B. $N_{p+1} > p$, womit alles beweisen ist.

8. Damit ist die Steinhaus'sche Aufgabe restlos gelöst. Wir haben gezeigt:

Jedes Intervall I ist die Vereinigungsmenge abzählbar vieler, paarweise elementfremder und kongruenter Teile. Dabei ist es für die Gültigkeit dieses Satzes unerheblich, ob wir dem Intervalle I beide Endpunkte zuzählen, oder eines, oder gar keins

Mit Hilfe wohlbekannter Überlegungen sieht man ferner, dass diese Mengen alle nach Lebesgue unmessbar sind: ihr (gemeinsames) inneres Maass ist 0, ihr (gemeinsames) äusseres Maass ist > 0.

Sur un ensemble *plan* et fermé dont les points qui sont rectilinéairement accessibles forment un ensemble non mesurable *(B)*.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

§ 1. P. Urysohn[1]) a proposé d'étudier l'ensemble E^0 de tous les points d'un ensemble plan donné E, qui sont rectilinéairement accessibles. On appelle ainsi tout point A de E s'il existe un segment (A, B) rectiligne (ouvert) situé dans le complémentaire de E. P. Urysohn[2]) et M. S. Mazurkiewicz[3]), l'un indépendamment de l'autre, ont démontré que, dans le cas, où E est un ensemble fermé, E^0 est du type (A) de Souslin et de M. Lusin[4]). Dans le cas de 3 dimensions P. Urysohn[5]) et moi[6]), nous avons construit un ensemble fermé E, pour lequel E^0 n'est pas mesurable (B).

[1]) *Fund. Math.* V (1924), p. 337 (problème 29).

[2]) *Koninklijke Akademie Van Wetenschappen Te Amsterdam. Proceedings* Vol. XXVIII, N° 10. Paul Urysohn †. *Sur les points accessibles des ensembles fermés* p. 984—993. (rédigé par M. P. Alexandroff).

[3]) M. Mazurkiewicz a exposé sa démonstration pendant une des séances de la Société Mathématique Polonaise (Section de Varsovie) en 1924 mais il n'a pas publié sa démonstration.

En modifiant convenablement la méthode de M. Mazurkiewicz j'ai resolu le problème pour les ensembles (F_σ) plans.

Pour les ensembles (F_σ) M. Kuratowski a trouvé une méthode très simple (voir *Fund. Math.* VII, p. 256. Une méthode générale pour les ensembles de types différents est développée, par moi (voir [6])). *Fund. Math.* VII, p. 250—258.

[4]) *C. R.* 164. (1917), p. 88. M. Souslin. *Sur une définition des ensembles mesurables B.*

C. R. 164. (1917), p. 91. N. Lusin. *Sur la classification de M. Baire.*

[5]) voir [2]).

[6]) *Fund. Math.* VII (1925). O. Nikodym. *Sur les points rectilinéairement*

Le but du présent travail est la construction d'un ensemble E fermé *plan*, pour lequel E^0 n'est pas mesurable (B). J'ai employé ici la méthode de transformations projectives du plan, méthode qui m'a permis de resoudre quelques problèmes semblables [1]. Il est intéressant de remarquer que les difficultés dans le cas plan sont beaucoup plus grandes que dans le cas des ensembles fermés à $\geqslant 3$ dimensions.

Notations:

1. (x, y) désigne le point dont les coordonnées sont x et y.
2. (A, B) (en parenthèses grasses) désigne le segment ouvert, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points du segment rectiligne, les extrémités A et B excluses. $\langle A, B\rangle$ désigne le segment fermé dont les extrémités sont en A et B.
3. IP désigne l'ensemble composé d'un seul point P.
4. $\langle E\rangle$ désigne ce que devient l'ensemble E, si l'on le *ferme*. C'est donc la somme de E et de sa dérivée.
5. $\widehat{x, y}\,\{\ldots\}$ désigne l'ensemble de tous les points (x, y) dont les coordonnées x, y satisfont à la condition spécifiée entre les accolades $\{\ \}$.
6. $\underset{df}{=}$ signifie: „égal par définiton".
7. Si T est une correspondance univoque, „T pro a" désigne ce qui correspond au a par cette correspondance.
8. $\bar{T}$ désigne la corespondance inverse à T.
9. $co\,E$ désigne le complémentaire de l'ensemble E par rapport à la totalité considérée de points.
10. (E) désigne l'ensemble de tous les points intérieurs de E.
11. $a\,\bar{\epsilon}\,E$ veut dire que l'élément a n'appartient pas à la classe E.

accessibles des ensembles plans. p. 257—8. La démonstration qui s'y rattache se trouve dans les *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie.* XIX. 1926, Classe III. O. Nikodym. *Sur un ensemble fermé (à 3 dimensions), dont les points accessibles forment un ensemble qui n'est pas mesurable (B).* p. 285—293.

[1] *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie.* 1926. O. Nikodym. *Sur un ensemble fermé tel que la somme de toutes les droites qui ne le rencontrent pas est un ensemble non mesurable (B).* p. 39—80. *Fund. Math.* X. 1926. O. Nikodym. *Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles.* p. 116—167.

§ 2. Soit $\{M_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p}\}$, $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p = 0, 1)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ un système d'intervalles fermés, tel que:

a. $M_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p, \nu_{p+1}} \subset M_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p}$, quelques soient les indices,

b. $M_{I'} . M_{I''} = 0$ chaque fois, où I' et I'' [1] sont deux différents groupes d'un même nombre d'indices,

c. la longueur de l'intervalle $M_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p}$ soit $\leqslant \frac{1}{2^{4p}}$.

L'ensemble

$$M \underset{df}{=} \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p = 0, 1} M_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p} \tag{1}$$

est évidemment un ensemble parfait de nombres, et non dense. Définissons l'ensemble de points du plan euclidien (pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires x, y), que voici:

$$\mathfrak{M} \underset{df}{=} \widehat{x, y}\,\{x \epsilon M,\ y \epsilon M\}; \tag{2}$$

envisageons en outre les ensembles:

$$\mathfrak{M}_I^K \underset{df}{=} \widehat{x, y}\,\{x \epsilon M_I,\ y \epsilon M_K\}, \tag{3}$$

où I et K désignent deux groupes arbitraires, composés d'un même nombres d'indices 0. 1. On démontre sans peine que:

$$\mathfrak{M} = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p = 0, 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p = 0, 1}} \mathfrak{M}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p}. \tag{4}$$

Les rectangles fermés $\mathfrak{M}_I^K$, où I et K se composent de p indices, n'ont pas, en vertu de la condition *b.*, de points communs deux à deux. Leurs nombre est égal à 2^{2p} et de plus on a:

$$\mathfrak{M}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p, \nu_{p+1}}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}} \subset \mathfrak{M}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p} \tag{5}$$

quels que soient les indices.

$\mathfrak{M}$ est un ensemble parfait et punctiforme.

§ 3. Étant donné un ensemble $\mathfrak{N}$ de points et un point A du plan, considérons toutes les demi-droites issues de A et passant par

[1] Nous désignerons souvent par une seule lettre un groupe d'indices.

les points de l'ensemble $\mathfrak{N}-IA$, en supposant que cet ensemble n'est pas vide.

Si l'on introduit dans le plan un système des coordonnées polaires (r rayon vecteur, θ azimut), pour lequel le centre est en A, l'ensemble des aximuts θ des points de $\mathfrak{N}-IA$, où $0\leqslant\theta<2\pi$, peut être mesurable au sens de M. Lebesgue; dans ce cas désignons sa mesure par $v(\mathfrak{N},A)$ et appelons ce nombre „*le panorama de l'ensemble $\mathfrak{N}$, vu du point A*". Le nombre $v(\mathfrak{N},A)$, s'il existe, est évidemment indépendant du choix de l'axe principale du système des coordonnées polaires en question. Dans le cas, où $v(\mathfrak{N},A)=0$, convenons de dire que *le panorama de $\mathfrak{N}$ vu du A est nul.*

§ 4. On voit aisément que, quelque soit le point A, le panorama de l'ensemble $\mathfrak{N}$, introduit dans le § 3, existe. Je dis qu'il est nul.

Pour démontrer cela, choisissons une fois pour toujours, un point A_1, différent de A et appartenant à $\mathfrak{N}$ et soit d la distance AA_1. Soit n un nombre naturel, tel que

(6) $$\frac{2}{n}<d,$$

et déterminons le plus petit nombre naturel $l=l(n)$ satisfaisant à la condition:

(7) $$\frac{\sqrt{2}}{2^{4l}}<\frac{1}{n}.$$

Définissons le système $[n]$ de rectangles fermés, comme il suit: Soient

(8) $$\mathfrak{P}_1^1,\ \mathfrak{P}_2^1,\dots$$

tous les différents rectangles $\mathfrak{N}_l^\kappa$ avec l indices en haut et en bas et satisfaisant à la condition:

(9) $$\mathfrak{N}_l^\kappa\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A,\frac{1}{n}\right)\neq 0\ ^{1)}.$$

La suite (8) contient au moins un élément, parce que, en vertu de la condition (c. § 2), le diamètre de l'ensemble $\mathfrak{P}_\nu^1$ est $\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2^{4l}}$,

[1]) $\mathcal{S}(C,\rho)$ désigne l'ensemble de tous les points *intérieurs* du cercle dont le centre est en C et dont le rayon est égal à ρ.

donc, d'après (6), (7), $<\frac{1}{n}<\frac{d}{2}$, et en outre, parce que le point A_1 appartient, d'après (4) à au moins un des rectangles $\mathfrak{N}_l^\kappa$ avec l indices en bas et en haut.

Soient

(10) $$\mathfrak{P}_1^2,\ \mathfrak{P}_2^2,\dots$$

tous les différents rectangles $\mathfrak{N}_{l'}^{\kappa'}$ avec $l+1$ indices en bas et en haut et tels que chacun d'eux soit contenu dans au moins un des rectangles (8), (voir (5)). La suite (10) contient au moins un élément.

Procédons avec la suite (10) de la manière analogue, en cherchant tous les $\mathfrak{N}_{l''}^{\kappa''}$ (à $l+2$ indices), qui soient contenus dans au moins un des rectangles (10), et ainsi de suite. On obtient ainsi une infinité dénombrable de suites $\mathfrak{P}_1^\lambda,\ \mathfrak{P}_2^\lambda,\dots$ $(\lambda=1,2,\dots)$, qui par définition constituent dans leurs totalité le système $[n]=\{\mathfrak{P}_\nu^\lambda\}$.

§ 5. Voici quelques propriétés du système $[n]$:

a'). Les ensembles $\mathfrak{P}_1^\lambda,\ \mathfrak{P}_2^\lambda,\dots$ n'ont pas de points communs deux à deux (voir § 2).

b'). Quelque soit $\mathfrak{P}_\nu^\lambda$, il y existe au moins un ν' tel que $\mathfrak{P}_{\nu'}^{\lambda+1}\subset\mathfrak{P}_\nu^\lambda$.

c'). Étant donné un $\mathfrak{P}_\nu^\lambda$, où $\lambda>1$, il existe au moins un ν', tel que $\mathfrak{P}_\nu^\lambda\subset\mathfrak{P}_{\nu'}^{\lambda-1}$.

d'). Le nombre de valeurs que peut prendre l'indice ν. si l'on fixe λ, est $\leqslant 2^{2(\lambda+l-1)}$, parce que, d'après § 2, le nombre total de rectangles $\mathfrak{N}_l^\kappa$ à $\lambda+l-1$ indices (en bas et en haut) est $2^{2(\lambda+l-1)}$. Le nombre en question est donc $\leqslant\kappa(n).2^{2\lambda}$, où κ ne dépend pas de λ.

e'). Le diamètre de $\mathfrak{P}_\nu^\lambda$ ne surpasse pas $\frac{\sqrt{2}}{2^{4(\lambda+l-1)}}=\frac{\kappa'(n)}{2^{4\lambda}}$, où κ' est indépendant de λ.

Posons

(11) $$\mathfrak{P}^{(n)}\underset{df}{=}\prod_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\nu}\mathfrak{P}_\nu^\lambda,$$

la sommation étant étandue à tous les ν, pour lesquels $\mathfrak{P}_\nu^\lambda\in[n]$.

§ 6. Démontrons que

$$\mathfrak{N}\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A,\frac{2}{n}\right)\subset\mathfrak{P}^{(n)}.$$

Supposons qu'un point B appartienne à

$$\mathfrak{N}\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A, \frac{2}{n}\right).$$

En vertu de (4), pour chaque $\lambda \geqslant 1$ il y existe deux groupes I et K de $l+\lambda-1$ indices, tels que:

$$B \,\epsilon\, \mathfrak{N}_I^K.$$

D'après § 2 (5) il existe deux groupes I' et K' de l indices, tels que $\mathfrak{N}_I^K \subset \mathfrak{N}_{I'}^{K'}$. Mais, le diamètre de $\mathfrak{N}_{I'}^{K'}$ est $\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{4l}}$, donc par conséquent, d'après (7), $< \frac{1}{n}$, il s'ensuit que $\mathfrak{N}_{I'}^{K'}\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A, \frac{1}{n}\right) \neq 0$, ce qui nous donne, en vertu de la condition (9), que $\mathfrak{N}_{I'}^{K'}$ est un des $\mathcal{P}_\nu^1$. Par conséquent $\mathfrak{N}_I^K$ est un des $\mathcal{P}_\nu^\lambda$. On a donc:

$$B \,\epsilon \sum_\nu \mathcal{P}_\nu^\lambda,$$

et cela est vrai pour n'importe quel $\lambda \geqslant 1$. Il s'ensuit d'après (11), que:

$$B \,\epsilon \prod_{\lambda=1}^{\infty} \sum_\nu \mathcal{P}_\nu^\lambda = \mathcal{P}^{(n)}.$$

La relation

(12) $$\mathfrak{N}\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A, \frac{2}{n}\right) \subset \mathcal{P}^{(n)}$$

est ainsi démontré.

§ 7. Le nombre n est assujetti à satisfaire seulement à la condition $\frac{2}{n} < d$ (voir (6)), où $d = AA_1$. Donc, si l'on prend au lieu de n, un nombre m quelconque, où $m \geqslant n$, on peut suivre le même raisonnement que nous avons fait tout à l'heure et, en obtenant les ensembles analogues $\mathcal{P}_\nu^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ et $\mathcal{P}^{(m)}$, démontrer la relation:

(13) $$\mathfrak{N}\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A, \frac{2}{n}\right) \subset \mathcal{P}^{(m)}.$$

Le point A n'appartient à aucun des ensembles $\mathcal{P}_\nu^\lambda$. En effet, quelque soit $\mathcal{P}_\nu^\lambda$ il existe, d'après (c'. § 5), un ensemble $\mathcal{P}_{\nu'}^1$ tel que $\mathcal{P}_\nu^\lambda \subset \mathcal{P}_{\nu'}^1$. La relation (9), où on doit remplaçer n par m, donne

$$\mathcal{P}_{\nu'}^1\,.\,co\,\mathcal{S}\left(A, \frac{1}{m}\right) \neq 0.$$

Comme le diamètre de $\mathcal{P}_{\nu'}^1$ ne surpasse pas $\frac{\sqrt{2}}{2^{4l(m)}} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{d}{2}$, le point A ne peut pas appartenir à $\mathcal{P}_{\nu'}^1$, d'où il ne peut pas être contenu dans $\mathcal{P}_\nu^\lambda$. Par conséquent $A \,\bar{\epsilon}\, \mathcal{P}^{(m)}$.

En vertu de (13) on a:

(14) $$\mathfrak{N} - IA \subset \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{(n+k)}$$

Il s'ensuit que, pour démontrer que le panorama de $\mathfrak{N}$ vu du point A est nul, il suffit de démontrer que le panorama de $\mathcal{P}^{(m)}$, $(m \geqslant n)$, vu du point A est nul. Le problème est devenu plus facile, parce que $A \,\bar{\epsilon}\, \mathcal{P}^{(m)}$ et parce que $\mathcal{P}^{(m)}$ est fermé.

Fixons m, où $m \geqslant n$, et considérons les ensembles $\mathcal{P}_\nu^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, $\mathcal{P}^{(m)}$ et le nombre $l(m)$ obtenus pour m; considérons de nouveau les points A et A_1 choisis dans § 4. Comme, d'après e'. § 5, le diamètre du rectangle $\mathcal{P}_\nu^\lambda$ est $\leqslant \frac{\kappa'(m)}{2^{4\lambda}}$, on obtient

(15) $$\mathcal{P}_\nu^\lambda \subset \left\langle \mathcal{S}\left(C_\nu^\lambda, \frac{\kappa'}{2^{4\lambda}}\right)\right\rangle,$$

où on a désigné par C_ν^λ le centre du rectangle $\mathcal{P}_\nu^\lambda$. Envisageons les cercles $\mathcal{S}\left(C_\nu^\lambda, \frac{\kappa'}{2^\lambda}\right)$ pour tous les ν et λ considérés. Je dis que l'ensemble

(16) $$\mathcal{P}' \underset{df}{=} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \sum_\nu \left\langle \mathcal{S}\left(C_\nu^\lambda, \frac{\kappa'}{2^\lambda}\right)\right\rangle,$$

où la sommation est étendue à tous les ν, pour lesquels $\mathcal{P}_\nu^\lambda$ appartient à $[m]$, est identique avec $\mathcal{P}^{(m)}$.

§ 8. Démontrons d'abord un lemme qui nous sera utile deux fois dans la suite.

Lemme. Si, pour un point B du plan, on peut trouver une suite infinie d'indices $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s < \ldots$ de sorte que

(17) $$B \,\epsilon \sum_\nu \left\langle \mathcal{S}\left(C_\nu^{\lambda_s}, \frac{\kappa'(m)}{2^{\lambda_s}}\right)\right\rangle, \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

on a nécessairement $B \,\epsilon\, \mathcal{P}^{(m)}$.

Pour démontrer cela, remarquons que la relation (17) montre qu'il y a une suite infinie d'indices ν: $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s, \dots$ telle que

$$B \in \left\langle \mathcal{S}\left(C^{\lambda_s}_{\nu_s}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda_s}}\right)\right\rangle, \qquad (s=1,2,\dots)$$

Donc, la distance de B à l'ensemble $\mathcal{P}^{\lambda_s}_{\nu_s}$ est $\leqslant \frac{\kappa'}{2^{\lambda_s}}$.

Il s'ensuit que la distance de B à $\mathcal{P}^{(m)}$ est $\leqslant \frac{2\kappa'}{2^{\lambda_s}}$ quelque soit s car on a:

$$\mathcal{P}^{(m)} = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu} \mathcal{P}^{\lambda}_{\nu},$$

Il y en résulte que $\mathcal{P}^{(m)} . \mathcal{P}^{\lambda_s}_{\nu_s} \neq 0$, $(s=1,2,3,\dots)$ puisque les propriétés analogues à celles-là, qui ont été énoncé dans § 5, subsistent pour les rectangles fermés, constituant le système $[m]$.

L'ensemble $\mathcal{P}^{(m)}$ étant fermé, il y en résulte que $B \in \mathcal{P}^{(m)}$.

§ 9. En revenant à la démonstration de l'identité $\mathcal{P}' = \mathcal{P}^{(m)}$, remarquons que, si l'on suppose $B' \in \mathcal{P}'$, (voir (16)), le point B' satisfait aux conditions du lemme. Il y en résulte que $B' \in \mathcal{P}^{(m)}$, ce qui nous donne: $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}^{(m)}$. Comme la relation inverse $\mathcal{P}^{(m)} \subset \mathcal{P}'$ est évidente en vertu de (11) [1]) et de (15), l'égalité proposée:

$$\mathcal{P}^{(m)} = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu} \left\langle \mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda}}\right)\right\rangle \tag{18}$$

est démontrée. Nous en tirons la conséquence suivante

$$co\, \mathcal{P}^{(m)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(co \sum_{\nu} \left\langle \mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda}}\right)\right\rangle\right), \tag{19}$$

qui va nous servir un peu plus tard.

§ **10.** Cela posé, fixons les indices ν, λ pour un moment et envisageons un point arbitraire B' situé dans l'ensemble

$$\mathcal{Q}_{\lambda} \underset{df}{=} co \sum_{\nu} \left\langle \mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda}}\right)\right\rangle. \tag{20}$$

[1]) où on doit remplacer n par m.

Le panorama de l'ensemble $\mathcal{P}^{(m)} . \mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}$, vu du point B', (qui assurément n'appartient pas a cet ensemble), est au plus égal à celui de l'ensemble $\mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}$, vu du même point B'. Le dernier panorama ne peut se diminuer lorsqu'on remplace $\mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}$ par le cercle

$$\mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{4\lambda}}\right) \tag{21}$$

et lorsqu'ensuite, au lieu du point B', on prend un point B_0 situé sur la circonférence du cercle $\mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda}}\right)$.

Comme $\frac{\kappa'}{2^{\lambda}} > \frac{\kappa'}{2^{4\lambda}}$, le point B_0 est situé dans l'extérieur du cercle (21), donc le panorama de l'ensemble (21), vu du point B_0, est $< \pi$. Il est égal à la grandeur de l'angle $2\theta_0$, sous lequel on voit le cercle (21) si l'on le regarde, en se plaçant dans le point B_0. On a $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 < \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2^{6\lambda} - 1}}$, d'où $\theta_0 < \frac{1}{2^{\frac{5}{2}\lambda}}$.

Il s'ensuit que le panorama $v(\mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}, B')$ est $< \frac{2}{2^{\frac{5}{2}\lambda}}$.

En vertu de d'. § 5, le nombre d'ensembles $\mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}$ pour λ fixe et ν variable ne dépasse pas $\kappa(m) . 2^{2\lambda}$, donc

$$v\left(\sum_{\nu} \mathcal{P}^{\lambda}_{\nu}, B'\right) < \frac{2\kappa}{2^{\frac{\lambda}{2}}},$$

d'où, en vertu de la relation (11), où on doit remplacer n par m, on obtient

$$v(\mathcal{P}^{(m)}, B') < \frac{2\kappa}{2^{\frac{\lambda}{2}}}, \tag{22}$$

et cela est vrai pour tous point B' appartenant à $\mathcal{Q}_{\lambda}$ (voir (20)) et pour $\lambda = 1, 2, \dots$

On sait que $A \,\overline{\in}\, \mathcal{P}^{(m)}$, donc, en vertu du lemme § 8, il existe un μ tel que, pour tous les λ supérieurs à μ, on a

$$A \in co \sum_{\nu} \left\langle \mathcal{S}\left(C^{\lambda}_{\nu}, \frac{\kappa'}{2^{\lambda}}\right)\right\rangle = \mathcal{Q}_{\lambda}.$$

Par conséquent

$$v(\mathcal{P}^{(m)}, A) < \frac{2\kappa}{2^{\frac{\lambda}{2}}} \qquad \text{quelque soit } \lambda > \nu,$$

donc

$$v(\mathcal{P}^{(m)}, A) = 0.$$

La relation (14):

$$\mathfrak{N} - \boldsymbol{I}A \subset \sum_{m \geq n}^{\infty} \mathcal{P}^{(m)}$$

nous donne

$$v(\mathfrak{N}, A) \leqslant \sum_{m \geq n}^{\infty} v(\mathcal{P}^{(m)}, A),$$

donc enfin:

(23) $$v(\mathfrak{N}, A) = 0,$$

ce que nous avons eu à démontrer.

§ 11. Envisageons de nouveau notre ensemble M de nombres parfait et non dense, introduit dans le § 2. On y peut choisir un ensemble N qui est un ensemble (A) mais non mesurable (B) [1]. $N \subset M$. Soit

$$\{N''_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}, \quad (i_1, i_2, \dots i_k = 1, 2, \dots) \quad (\kappa = 1, 2, \dots)$$

un des systèmes déterminants de l'ensembles N, système composé d'intervalles fermés [2]) et tels que

1) $mes\ N''_{i_1, i_2, \dots, i_k} \leqslant \frac{1}{k}$.

2) $N''_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} \subset N''_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

Désignons par $N'_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ l'intervalle fermé que l'on obtient en augmentant $N''_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ de deux côtés d'un intervalle de longueur $\frac{1}{2k+1}$.

Désignons par $N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ l'intervalle fermé que l'on obtient en

[1]) En ce qui concerne l'existence des ensembles (A) non mesurables (B) voir p. ex. le travail de M. N. Lusin *Sur les ensembles analytiques. Fund. Math.* X p. 76—77.

Un de tels ensembles étant donné, on peut, pour obtenir l'ensemble N dont il s'agit, appliquer p. ex. la méthode exposé dans mon travail cité plus haut (*Comptes rend. das séances de la soc. des sc. et des lettr. de Varsovie*, p. 55.

[2]) On apelle ainsi chaque système d'ensembles $\{\gamma_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}\}$, $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k = 1, 2, 3, \dots)$, $(\kappa = 1, 2, \dots)$ pour lequel:

$$N = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots} \gamma_{\nu_1} \cdot \gamma_{\nu_1, \nu_2} \cdot \gamma_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots},$$

la sommation étant étendue à toutes les suites infinies de nombres naturels.

augmentant $N''_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ de deux cotés d'un intérvalle de longueur $\frac{1}{2\kappa}$. On trouve aisément:

(24) $$N_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} \subset (N'_{i_1, i_2, \dots, i_k}) \subset N'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset (N_{i_1, i_2, \dots, i_k}).$$

De plus on démontre aisément que chaqun de deux systèmes

$$\{N_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}, \quad \{N'_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$$

peut être considéré comme système déterminant de l'ensemble N. On a aussi toujours

(25) $$N'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot M \neq 0, \quad N_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot M \neq 0.$$

La longueur de l'intervalle $N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ est $\leqslant \frac{1}{k} + \frac{2}{2k} = \frac{2}{k}$ donc elle ne surpasse pas 2 et tend uniformément vers 0 lorsque le nombre k d'indices croît indéfiniment.

D'autre part, si l'on considère l'ensemble parfait N, on peut facilement construire deux systèmes d'intervalles fermés:

$$\{P_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}, \quad \{P'_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$$
$$(i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1') $P_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} \subset (P'_{i_1, i_2, \dots, i_k}) \subset P'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset (P_{i_1, i_2, \dots, i_k})$,

2') $mes\ P_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ne surpasse pas un nombre fixe et tend uniformément vers 0 quand k croît indéfiniment,

3') $P'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot M \neq 0$ quels que soient les indices.

4') $P_{I'} \cdot P_{I''} = 0$ chaque fois, où I' et I'' sont deux différents groupes d'un même nombre d'indices.

Pour constuire de tels systèmes, on peut procéder de la manière suivante. Choisissons une suite infinie

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n <$$

de nombres appartenant à M et envisageons les nombres b_n, b'_n, c_n, c'_n de sorte qu'on ait:

$$b_n < c_n < a_n < c'_n < b'_n < b_{n+1} < c_{n+1} < a_{n+1}. \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Posons

$$P_n \underset{df}{=} \langle b_n, b'_n \rangle, \quad P'_n = \langle c_n, c'_n \rangle.$$

Comme $(c_n, c'_n).M \neq 0$ et, comme M est parfait, on peut procéder d'une manière analogue, en choisissant une suite infinie de points de l'ensemble $(c_n, c'_n).M$ et en choisissant convenablement, comme plus haut, des intervalles fermés, situés dans (c_n, c'_n) et ainsi de suite.

§ 12. Définissons maintenant les rectangles fermés suivants

$$\mathscr{H}'_I = \widehat{x, y}\,\{x \in N'_I,\ y \in P'_I\} \tag{26}$$

$$\mathscr{H}_I = \widehat{x, y}\,\{x \in N_I,\ y \in P_I\} \tag{27}$$

Les premiers rectangles ne vont jouer qu'un rôle tout-à-fait auxiliaire, tandis que c'est le système (27) dans lequel nous allons choisir un système partiel, qui va jouer un rôle important dans la suite

Des propriétés des systèmes $\{N'_I\}, \{N_I\}, \{P'_I\}, \{P_I\}$ on déduit les propriétés suivantes de rectangles $\mathscr{H}'_I$, $\mathscr{H}_I$.

1'') $\mathscr{H}_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}} \subset (\mathscr{H}'_{i_1, i_2, \dots, i_k}) \subset \mathscr{H}'_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset (\mathscr{H}_{i_1, i_2, \dots, i_k})$.

2'') le diamètre de $\mathscr{H}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ reste inférieur à un nombre fixe et tend uniformément vers O quand κ tend vers l'infini.

3'') $\mathscr{H}'_{i_1, i_2, \dots, i_k}.\mathfrak{M} \neq 0$; $\mathfrak{M}$ désigne ici l'ensemble parfait plan introduit plus haut (§ 2).

4'') $\mathscr{H}_{I'}.\mathscr{H}_{I''} = 0$ chaque fois, où I' et I'' représentent deux différents cortèges d'un même nombre d'indices.

Si l'on pose

$$\mathscr{H} \underset{df}{=} \sum_{i_1, i_2, \dots} \mathscr{H}'_{i_1}.\mathscr{H}'_{i_1, i_2} \dots, \tag{28}$$

on trouve, d'après ce qui précède, que l'identité (28) se conserve si l'on y remplace les $\mathscr{H}'_I$ par $\mathscr{H}_I$ ou bien par $(\mathscr{H}'_I)$ ou par $(\mathscr{H}_I)$.

On trouve, en s'appuyant sur la propriété 1'') et 4'') que

$$\mathscr{H} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots} \mathscr{H}_{i_1, i_2, \dots, i_k}. \tag{29}$$

Cette relation subsiste aussi, lorsqu'on y remplace les $\mathscr{H}$ par des $(\mathscr{H})$, $(\mathscr{H}')$ ou $\mathscr{H}'$ respectifs.

$\mathscr{H}$ est donc en ensemble G_δ), dont la projection orthogonale sur l'axe de x coïncide avec l'ensemble

$$\widehat{x, y}\,\{y = 0,\ x \in N\}.$$

De plus on a

$$\mathscr{H} \subset \mathfrak{M}. \tag{30}$$

§ 13. Fixons pour un moment le groupe $J = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ et envisageons les rectangles $\mathscr{H}'_J$ et $\mathscr{H}_J$. On sait, d'après 1) § 11, (24), 2') § 11, (26) et (27), que la somme $\Sigma\, \mathscr{H}_I$ est un ensemble borné. On peut, donc, tracer un cercle $\mathscr{C}$ fermé, contenant dans son intérieur tous les $\mathscr{H}_I$, quelque soit le groupe I Envisageons le domaine $\mathfrak{D}_J$ fermé, limité par la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ et par la frontière de $\mathscr{H}_J$. Soit $P \in \mathfrak{D}_J$. Nous avons démontré que le panorama de l'ensemble $\mathfrak{M}$, vu d'un n'importe quel point, est nul. A plus forte raison, le panorama de $\mathfrak{M}.\mathscr{H}'_J$ vu du point P est nul. Donc. on peut tous les rayons issus du P et passant par les points de $\mathfrak{M}.\mathscr{H}'_J$ faire enfermer dans un système d'angles fermés (c'est à-dire: étant des domaines fermés), de sorte que la mesure angulaire de la somme de ces angles soit inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$, donné à l'avance. Comme $P \bar{\epsilon}\, \mathfrak{M}.\mathscr{H}'_J$, le système d'angles en question peut être toujours supposé fini. On en déduit facilement, par l'application du théorème de Heine-Borel, qu'il existe un système fini de cercles *ouverts*: $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \dots, \mathscr{O}_p$, tel que:

1) $\mathfrak{M}.\mathscr{H}'_J \subset \mathscr{O}_1 + \mathscr{O}_2 + \dots + \mathscr{O}_p$.

2) $\langle \mathscr{O}_1 + \mathscr{O}_2 + \dots + \mathscr{O}_p \rangle \subset (\mathscr{H}_J)$.

3) le panorama de l'ensemble $\mathscr{O}_1 + \dots \mathscr{O}_p$, vu du point P, soit plus petit que 2ε.

Cela est possible parce que $\mathscr{H}'_J \subset (\mathscr{H}_J)$.

Le nombre de ces cercles étant fini, on voit qu'il existe un cercle $\mathscr{P}$ de centre P et de rayon suffisamment petit, de sorte que, si $Q \in \mathscr{P}$, le panorama de l'ensemble $\mathscr{O}_1 + \dots \mathscr{O}_p$, vu du point Q, est $< 3\varepsilon$. Maintenant, faisons varier la position du point P dans $\mathfrak{D}_J$ et fixons ε. Chaque point P_0 du domaine fermé $\mathfrak{D}_J$ se trouvera ainsi entouré d'un cercle $\mathscr{P}_0$ de sorte qu'on peut former un système fini de cercles $\mathscr{O}_1^0, \mathscr{O}_2^0, \dots$ ouverts (dépendant de P_0) jouissant des propriétés 1), 2) et tel que, quelque soit le point Q_0 pris dans le cercle $\mathscr{P}_0$, le panorama de $\sum_k \mathscr{O}_k^0$, vu du point Q_0, soit $< 3\varepsilon$.

Le domaine fermé $\mathfrak{D}_J$ est ainsi couvert tout entier par un système de cercles. Le théorème de Heine-Borel nous permet de remplacer ce système par un système ne comprenant qu'un nombre fini de cercles:

$$\mathcal{K}^{(1)},\ \mathcal{K}^{(2)},\ldots,\ \mathcal{K}^{(q)}$$

dont les centres sont p. ex.:

$$P^{(1)},\ P^{(2)},\ldots,\ P^{(q)}.$$

Soit $\mathcal{A}_1^{(\delta)}$, $\mathcal{A}_2^{(\delta)},\ldots$, le système fini de cercles ouverts couvrant l'ensemble $\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J$, contenus (ses frontières comprises) dans $(\mathcal{H}_J)$ et tels que le panorama de $\mathcal{A}_1^{(\delta)}+\mathcal{A}_2^{(\delta)}+\ldots$, vu de chaque point de $\mathcal{K}^{(\delta)}$, est $<3\varepsilon$.

Comme

$$\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J\subset\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^{(\delta)}\qquad \text{pour } \delta=1,2,\ldots$$

on a aussi

$$\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J\subset\prod_{\delta}\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^{(\delta)}.$$

Le deuxième membre de cette inclusion est un ensemble ouvert. Comme $\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J$ est fermé, il existe un nombre fini de cercles ouverts

$$\mathcal{A}_1^J,\ \mathcal{A}_2^J,\ldots,$$

compris dans $\prod_{\delta}\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^{(\delta)}$ et enfermant l'ensemble fermé $\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J$. Quelque soit δ et le point P pris dans le cercle $\mathcal{K}^{(\delta)}$, le panorama de l'ensemble $\mathcal{A}_1^J+\mathcal{A}_2^J+\ldots$, vu du point P, est au plus égal au panorama, vu du même point, de l'ensemble $\mathcal{A}_1^{(\delta)}+\mathcal{A}_2^{(\delta)}+\ldots$ Il s'ensuit que, quelque soit de point P, pris dans $\mathcal{D}_J$, le panorama de l'ensemble $\mathcal{A}_1^J+\mathcal{A}_2^J+\ldots$, vu du point P, est $<4\varepsilon$.

On peut remarquer que pour le système $\{\mathcal{A}_{\varkappa}^J\}$ la propriété ci-dessus subsiste non seulement pour les points de $\mathcal{D}_J$ mais aussi pour tous les points P n'appartenant pas à $(\mathcal{H}_J)$, parce que, si l'on s'éloigne de l'ensemble $\mathcal{M}\,\mathcal{H}'_J$, son panorama ne peut pas s'augmenter.

En résumant, on a:

1) $\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J\subset\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^J$, où $\mathcal{A}_{\varkappa}^J$ sont des cercles ouverts en nombre fini;

2) $\langle\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^J\rangle\subset(\mathcal{H}_J)$;

3) si $P\,\epsilon\,co(\mathcal{H}_J)$, le panorama de l'ensemble $\sum_{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^J$, vu du P est $<4\epsilon$.

Cela est vrai, quelque soit le groupe d'indices J.

En vertu de la propriéte 1'), la distance d_J de l'ensemble fermé $\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J$ à la frontière de l'ensemble ouvert $\sum_k\mathcal{A}_k^J$, est >0. Par conséquent chaque ensemble $\mathcal{E}$, dont le diamètre est $<d_J$ et pour lequel $\mathcal{E}.\mathcal{M}.\mathcal{H}'_J\neq 0$, est situé tout entièrement dans $\sum_k\mathcal{A}_k^J$. En vertu de 2'') § 12, on peut trouver un nombre naturel s, tel que tous les ensembles $\mathcal{H}_{J,J_1}$, où J_1 désigne un groupe quelconque de s indices, sont situés dans $\sum_k\mathcal{A}_k^J$. Nous avons ainsi démontré le lemme suivant.

Lemme: Le groupe J et le nombre $\varepsilon'>0$ étant donnés, on peut trouver un nombre naturel s tel que, quelque soit P appartenant à $co\mathcal{H}_J$, le panorama de l'ensemble

$$\sum_{J_1}\mathcal{H}_{J,J_1}$$

vu du point P est $<\varepsilon'$, la sommation ci-dessus étant étendue à tous les groupes J_1 de s indices.

§ 14. Nous allons appliquer le lemme ci-dessus à la construction d'un système auxiliaire de rectangles. Choisissons une suite infinie de nombres:

$$\frac{\pi}{4}<\phi_1<\phi_2<\ldots<\frac{\pi}{2},\tag{31}$$

où

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n=\frac{\pi}{2}.\tag{32}$$

Commençons par la suite infinie:

$$\mathcal{H}(1),\ \mathcal{H}(2),\ldots,\ \mathcal{H}(s_1),\ldots\ ^{1)}.$$

Déterminons pour s_1 le nombre naturel $t(s_1)$ de manière à ce que, quelque soit le point P appartenant à $co\,\mathcal{H}(s_1)$, le panorama de l'ensemble

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{t(s_1)}=1,2,\ldots}\mathcal{H}(s_1,\nu_1,\ldots,\nu_{t(s_1)}),$$

vu du point P, soit $<\dfrac{\phi_2-\phi_1}{2^{s_1+1}}$.

[1]) C'est pour éviter des lourdes cortèges d'indices qu'on fait ici la convention d'écrivre $\mathcal{H}(J)$ au lieu de $\mathcal{H}_J$.

Ayant ainsi déterminé les $t(s_1)$, $(s_1 = 1, 2, \ldots)$, on obtient pour le panorama de l'ensemble

$$\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{t(s_1)}} \mathscr{H}(s_1, \nu_1, \ldots, \nu_{t(s_1)})$$

un nombre inférieur à $\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=\frac{\phi_2-\phi_1}{2}$, chaque fois, où le centre P de la projection se trouve dans l'ensemble

$$co \sum_{s_1=1}^{\infty} \mathscr{H}_{s_1}.$$

Rangeons tous les groupes $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(s_1)})$ de $t(s_1)$ indices, dans une suite simplement infinie:

$$J(s_1, 1), \quad J(s_1, 1), \ldots$$

Envisageons les rectangles $\mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2))$, $(s_2 = 1\ 2\ldots)$ et, en y appliquant le lemme du § 13, déterminons pour chaque s_1 et s_2 un nombre $t(s_1, s_2)$ naturel, de manière à ce que le panorama de l'ensemble

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(s_1, s_2)}} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(s_1, s_2)})$$

soit plus petit que $\frac{\phi_3-\phi_2}{2^{s_1+s_2+1}}$, si $P \in co\, \mathscr{H}(s_1, J(s_1\, s_2))$.

Comme

$$\sum_{s_2=1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \frac{\phi_3-\phi_2}{2^{s_1+s_2+1}} = \frac{\phi_3-\phi_2}{2},$$

on obtient pour le panorama de l'ensemble:

$$\sum_{s_2=1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(s_1, s_2)}} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \nu_1, \ldots, \nu_{t(s_1, s_2)})$$

un nombre inférieur à $\frac{\phi_3-\phi_2}{2}$ chaque fois, où le centre P de la projection est situé dans

$$co \sum_{s_2=1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2)).$$

On peut prolonger ce procédé indéfiniment et voilà comment se présente le n-ième pas de la construction. Ayant obtenu les rectangles

$$\mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_1), \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_n)),$$

où les $J(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ désignent des groupes d'indices, on détermine pour chaque groupe $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ un nombre naturel $t = t(s_1, s_2, \ldots s_n)$, tel que le panorama de l'ensemble:

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t = 1, 2, \ldots} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_n), \nu_1, \ldots, \nu_t)$$

soit $< \frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_n+1}}$, lorsque le centre P de la projection est situé dans $co\, \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_n))$.

Si

$$P \in co \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=2}^{\infty} \ldots \sum_{s_n=1}^{\infty} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_n)),$$

le panorama de l'ensemble

$$\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=2}^{\infty} \ldots \sum_{s_n=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{t(s_1, \ldots, s_n)}} \mathscr{H}(s_1, \ldots, J(s_1, s_n), \nu_1, \ldots, \nu_t),$$

vu du point P, est $< \frac{\phi_{n-1}-\phi_n}{2}$.

On range maintenant tous les groupes $\nu_1, \ldots, \nu_t$ de $t = t(s_1, \ldots, s_n)$ indices dans une suite infinie que nous désignerons par:

$$J(s_1, s_2, \ldots, s_n, 1), \quad J(s_1, s_2, \ldots, s_n, 2), \ldots,$$

ce qui nous permet de faire le $n+1^{\text{ème}}$ pas.

§ 15. Ayant obtenu ainsi un système infini de rectangles:

$$\{\mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2), \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_k))\}$$
$$(s_1, s_2, \ldots, s_k = 1, 2, \ldots), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

changeons les notations pour simplifier l'écriture, en posant:

$$\mathscr{H}_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \underset{df}{=} \mathscr{H}(s_1, J(s_1, s_2, \ldots, J(s_1, s_2, \ldots, s_k)),$$

pour tous les s et k.

Les rectangles fermés $\mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_k}$ possèdent évidemment des propriétés suivantes:

α) $\mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1}} \subset (\mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_k})$,

β) le panorama de l'ensemble:

$$\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{k+1}=1}^{\infty} \mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}},$$

vu d'un point quelconque P appartenant à

$$co \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=1}^{\infty} \mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_k},$$

est $< \dfrac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2}$,

γ) $\sum_{k=1}^{\infty} co \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \mathscr{K}_{s_1, s_2, \ldots, s_k} = co \mathscr{K}$,

δ) $\mathscr{K} = \sum_{s_1, s_2, \ldots} (\mathscr{K}_{s_1}) \cdot (\mathscr{K}_{s_1, s_2}) \ldots$

§ 16. Cela posé, envisageons la correspondance Δ qui fait correspondre, d'une manière générale, au point (ξ, η) du plan la droite

$$x - \eta y - \xi = 0, \tag{33}$$

où x, y désignent les variables. Chaque point P du plan possède sa droite correspondante $\Delta\, pro\, P$, qui coupe nécessairement l'axe x. Inversement, à la droite $Ax + By + C = 0$, où $A \neq 0$, c'est-à-dire, à une droite coupant l'axe x, correspond par la transformation inverse Δ le point $\xi = -\dfrac{C}{A}$, $\eta = -\dfrac{B}{A}$. Si le point se déplace sur une droite l, la droite correspondante par Δ, engendre un faisceau de droites ou bien passant par un point (que nous désignerons par $\Delta\, pro\, l$), ou bien elle engendre un faisceau de droites parallèles deux à deux.

La dernière circonstance ne se présente que dans le cas, où l'équation de la droite est $y = \text{const.}$

Si donc l est une droite coupant l'axe x, la correspondance Δ (ou, plus précisément, une autre correspondance qui s'y déduit) fait correspondre à l un point L que nous désignerons $\Delta\, pro\, l$, ce point étant défini comme le sommet du faisceau des droites qui correspondent, par Δ, aux points de la droite l. Si l est parallèle à l'axe x ou si elle coïncide avec elle, il n'y existe aucun point qui pourrait être désigné par $\Delta\, pro\, l$. La correspondance inverse $\breve{\Delta}$ fait aussi correspondre des droites aux points. Si p est un point arbitraire dont les coordonnées sont (x, y), la droite $\breve{\Delta}\, pro\, p$ est, d'après (33):

$$x - \eta y - \xi = 0, \tag{34}$$

où ξ, η sont des variables [1]. $\breve{\Delta}\, pro\, p$ n'est jamais parallèle à l'axe x.

On voit que Δ est une correspondance biunivoque. Mais, si l'on considère Δ comme une transformation qui fait correspondre aux droites des points, on trouve, que cette transformation est aussi bi-univoque, si l'on exclut les droites $y = const.$

§ 17. Revenons maintenant aux ensembles $\mathscr{K}_l$ que nous avons construits plus haut. Si l'on y applique la transformation Δ, on obtient des ensembles de droites:

$$\Delta\, pro\, \mathscr{K}_l.$$

En considérant les droites comme des ensembles de points, faisons la somme des droites de l'ensemble $\Delta\, pro\, (\mathscr{K}_l)$ et désignons par $\mathscr{E}_l$ l'ensemble de points ainsi obtenu. Je dis que $\mathscr{E}_l$ est un ensemble ouvert.

En effet, soit $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, P_n, \ldots$ une suite infinie de points telle que $\lim \overline{P}_n = \overline{P}_0$, où $\overline{P}_0 \in \mathscr{E}_1$. Il suffit de démontrer qu'à partir d'un certain indice, tous les $\overline{P}_n$ appartiennent à $\mathscr{E}_l$. Choisissons dans $\Delta\, pro\, (\mathscr{K}_l)$ une droite $\overline{l}_0$ passant par $\overline{P}_0$ et coupant l'axe x. Une telle droite existe nécessairement, puisque $\overline{P} \in \mathscr{E}_l$. Posons:

$$p_n \underset{df}{=} \breve{\Delta}\, pro\, \overline{P}_n, \quad p_0 \underset{df}{=} \breve{\Delta}\, pro\, \overline{P}_0, \quad L_0 \underset{df}{=} \breve{\Delta}\, pro\, \overline{l}_0. \tag{35}$$

Si $\overline{P}_n = (\overline{x}_n, \overline{y}_n)$, $P_0 = (\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, on trouve pour les droites p_n et p_a respectivement les équations: (comp. (34))

$$\overline{x}_n - y\,\overline{y}_n - x = 0 \tag{36}$$

$$\overline{x}_0 - y\,\overline{y}_0 - x = 0, \tag{37}$$

où x et y sont des variables.

[1]) Δ n'est pas aucune correspondance polaire: c'est une corrélation — comme le disent les géomètres, que l'on obtient par une combinaison convenable d'une transformation polaire et d'une transformation homographique.

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point L_0. On obtient pour $\overline{l_0}$ l'équation

$$x - y_0 y - x_0 = 0,$$

par conséquent on trouve:

(38) $$\bar{x}_0 - y_0 \bar{y}_0 - x_0 = 0.$$

Envisageons le point L_n: $(x_n = \bar{x}_n - y_0 \bar{y}_n;\ y_n = y_0)$ situé, en vertu de (36), sur la droite p_n. On a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}_0 - y_0 \bar{y}_0 = x_0$$

(en vertu de (38))

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$

parce que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{P}_n = \overline{P}_0$. Les points L_n tendent donc vers L_0. L'ensemble $(\mathcal{H}_l)$ étant un ensemble ouvert, il existe un nombre μ, tel que la relation $n > \mu$ entraîne: $L_n \epsilon (\mathcal{H}_l)$. Par conséquent, on a pour $n > \mu$:

$$\Delta\, pro\, L_n \,\epsilon\, \Delta\, pro\, (\mathcal{H}_l).$$

D'autre part, comme la droite p_n passe par L_n, le point $\overline{P}_n$ est situé sur la droite $\Delta\, pro\, L_n$ et par conséquent: $\overline{P}_n \,\epsilon\, \mathcal{E}_l$ pour $n > \mu$.

Nous avons ainsi démontré que $\mathcal{E}_l$ est un ensemble ouvert:

§ 18. Faisons encore une remarque. Dans le § 14. nous avons introduit les nombres ϕ_n où $\frac{\pi}{4} < \phi_n < \frac{\pi}{2}$. Considérons le faisceau de droites parallèles:

(39) $$y = -x \,.\, \mathrm{tang}\, \phi_n + c,$$

où c est un paramètre variable. On démontre sans peine qu'à ce faisceau correspond, par Δ, l'ensemble de points remplissant toute la droite

$$y = \mathrm{cotg}\, \phi_n.$$

Cela nous montre que, si $n \to \infty$, la droite correspondant au faisceau (39) s'approche indéfiniment de l'axe x, en restant toujours dans la région $\widehat{xy}\,\{y > 0\}$.

§ 19. Nos préparatifs achevés, définissons l'ensemble de points:

(40) $$\mathcal{E} \overline{\overline{\mathrm{df}}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k = 1, 2, \ldots} \widehat{xy}\,\{y > \mathrm{cotg}\, \phi_k\} \,.\, \mathcal{E}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}$$

Je dis que l'ensemble $co\mathcal{E}$ possède les propriétés éxigées au commencement de ce travail en ce qui concerne l'accessibilité de points.

En effet, $\mathcal{E}_l$ est un ensemble ouvert, comme nous l'avons démonté dans § 17. L'ensemble $\mathcal{E}$, comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts, est aussi ouvert lui-même. Par conséquent $co\mathcal{E}$ est fermé.

La définition (40) nous donne, d'après la remarque faite dans le § 18:

(41) $$\mathcal{E} \subset \widehat{xy}\,\{y > 0\},$$

donc l'axe x est contenue toute entière dans $co\mathcal{E}$ et il y en est de même pour l'ensemble $xy\,\{y \leqslant 0\}$, qui est $\subset co\,\mathcal{E}$.

§ 20. Soit $(x', 0)$ un point de l'axe x ét tel que

(42) $$x' \,\epsilon\, N,$$

où N c'est précisément l'ensemble (A) introduit dans § 11. Je dis que le point $(x', 0)$ est rectilinéairement accessible dans $\mathcal{E}$.

En effet, dans le § 12 nous avons trouvé que $\mathcal{H}$ est un ensemble (G_δ), dont la projection orthogonale sur l'axe x coïncide avec l'ensemble $\widehat{x,y}\,\{y = 0,\ x \,\epsilon\, N\}$. Par conséquent il existe un point P de l'ensemble $\mathcal{H}$, de sorte que $(x', 0)$ est la projection orthogonale sur l'axe x, du point P. Soit p l'ensemble de tous les points de la droite $\Delta\, pro\, P$, situés dans $\widehat{x,y}\,\{y > 0\}$. En vertu de δ) § 15, il existe une suite infinie d'indices $s_1, s_2, \ldots$, telle que:

$$P \,\epsilon\, (\mathcal{H}_{s_1}) \,.\, (\mathcal{H}_{s_1, s_2}) \ldots$$

Par conséquent:

$$\Delta\, pro\, P \,\epsilon\, \Delta\, pro\, (\mathcal{H}_{s_1}) \,.\, \Delta\, pro\, (\mathcal{H}_{s_1, s_2}) \ldots,$$

d'où

(43) $$p \subset \mathcal{E}_{s_1} \,.\, \mathcal{E}_{s_1, s_2} \,.\, \mathcal{E}_{s_1, s_2, s_3} \ldots$$

Les ensembles $\mathcal{E}_{s_1}$, $\mathcal{E}_{s_1, s_2}, \ldots$; introduits dans le § 17, satisfont aux relations:

$$\mathcal{E}_{s_1} \supset \mathcal{E}_{s_1, s_2} \supset \ldots$$

parce que, d'après α) § 15, on a

$$(\mathcal{H}_{s_1}) \supset (\mathcal{H}_{s_1, s_2}) \supset \ldots$$

Il s'ensuit que

$$p.\widehat{xy}\{y>\operatorname{cotg}\phi_k\}\subset\mathcal{E}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_k}.\widehat{xy}\{y>\operatorname{cotg}\phi_k\},$$

d'où on obtient:

$$p\subset\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_k}.\widehat{xy}\{y>\operatorname{cotg}\phi_k\}\subset\mathcal{E}.$$

Il reste à prouver que $\Delta\, pro\, P$ coupe l'axe x précisément dans le point $(x',0)$. Ceci est évident, parce que, d'après § 16 (34) $\breve{\Delta}\, pro\,(x',0)$ est identique avec la droite $x=x'$. Comme P est placé sur la droite $x=x'$, la droite correspondante $\Delta\, pro\, P$ passe par le point $\Delta\, pro\,(\breve{\Delta}\, pro\,(x',0))$, c'est-à-dire par le point $(x',0)$.

Nous avons ainsi démontré que chaque point de l'ensemble $\widehat{x,y}\{y=0,\ x\epsilon N\}$ est rectilinéairement accessible dans $\mathcal{E}$, et nous savons que $\widehat{x,y}\{y=0,\ x\epsilon N\}\subset co\,\mathcal{E}$.

§ 21. Nous allons démontrer que les seuls points de l'axe x qui sont rectilinéairement accessibles dans $\mathcal{E}$, sont les points de l'ensemble $\widehat{x,y}\{y=0,\ x\epsilon N\}$.

Supposons, en effet, que le point $A=(x'',0)$ soit rectilinéairement accessible dans $\mathcal{E}$ et soit (A,B) un segment rectiligne situé entièrement dans $\mathcal{E}$.

D'après (41) on a:

(44) $$(A,B)\subset\widehat{xy}\{y>0\},$$

donc, la droite p' portant ce segment, coupe l'axe x dans le point A,

Posons

(45) $$P'=\breve{\Delta}\, pro\, p'.$$

Je veux démontrer d'abord que $P'\epsilon\mathcal{H}$. Pour démontrer cela, supposons qu'on ait $P'\bar{\epsilon}\mathcal{H}$.

D'après (44) et en vertu des remarques, faites dans § 18, il existe un nombre ν_0, tel que pour chaque $\nu>\nu_0$, la droite $y=\operatorname{cotg}\phi_\nu$ coupe (A,B).

Comme $P'\bar{\epsilon}\mathcal{H}$, la relation γ) § 15:

$$co\,\mathcal{H}=\sum_{k=1}^{\infty}co\sum_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_k}\mathcal{H}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_k},$$

entraîne l'existence d'un nombre γ tel que:

$$P'\epsilon\, co\sum_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma}\mathcal{H}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma},$$

et comme on a, d'après a) § 15: $\mathcal{H}_{I,\nu}\subset\mathcal{H}_I$, quels que soient I et ν, on peut toujours choisir γ de manière à ce qu'on ait:

(46) $$\gamma>\nu_0,$$

En vertu de β) § 15, le panorama de l'ensemble

(47) $$\sum_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma,\iota_{\gamma+1}}\mathcal{H}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma,\iota_{\gamma+1}}$$

vu du point P est $<\dfrac{\phi_{\gamma+1}-\phi_\gamma}{2}$. On détermine le panorama en envisageant des rayons issus de P et passant par les points de l'ensemble en question.

Par conséquent, si on n'envisage que des rayons situés sur des droites $y=ax+b$, pour lesquelles:

$$-\operatorname{tg}\phi_{\gamma+1}\leqslant a\leqslant-\operatorname{tg}\phi_\gamma,$$

on obtient un faisceau de rayons issus de P et passant par des points de l'ensemble (47), de sorte que la mesure de l'ensemble d'azimuts de ces rayons est inférieure à la moitié de la grandeur $\phi_{\gamma+1}-\phi_\gamma$ de l'angle engendré par les droites:

$$y=-\operatorname{tg}\phi_\gamma.x\quad\text{et}\quad y=-\operatorname{tg}\phi_{\gamma+1}.x.$$

On en déduit qu'il y existe nécessairement une droite l:

(48) $$y=-\operatorname{tg}\phi.x+b,\qquad(\phi_\gamma\leqslant\phi\leqslant\phi_{\gamma+1})$$

passant par P et n'ayant pas de points communs avec l'ensemble (47).

Envisageons le point

$$L\underset{df}{=}\Delta\, pro\, l,$$

et désignons par (x_0,y_0) ses coordonnées.

Comme l ne coupe pas (47), le point L n'appartient pas à aucune droite de l'ensemble de droites:

$$\Delta\, pro\sum_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma,\iota_{\gamma+1}}\mathcal{H}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_\gamma,\iota_{\gamma+1}}=\sum_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_{\gamma+1}}(\Delta\, pro\,\mathcal{H}_{\iota_1,\iota_2,\dots,\iota_{\gamma+1}}),$$

c'est-à-dire, L n'appartient pas à:

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_{\gamma+1}} \mathscr{E}_{s_1, s_2, \ldots, s_{\gamma+1}}.$$

Il s'ensuit que

$$L \bar{\epsilon} \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \mathscr{E}_{s_1, s_2, \ldots, s_k}$$

pour $k \geqslant \gamma + 1$; parce qu'on a toujours $\mathscr{E}_{l, \nu} \subset \mathscr{E}_l$.

Par conséquent:

$$L \bar{\epsilon} \sum_{k \geq \gamma+1}^{\infty} \Big(\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \mathscr{E}_{s_1, s_2, \ldots, s_k} . \widehat{xy} \{y > \operatorname{cotg} \phi_k\} \Big). \tag{49}$$

Mais les relations (48) entraînent:

$$\operatorname{cotg} \phi_{\gamma+1} \leqslant y_0 \leqslant \operatorname{cotg} \phi_{\gamma}, \tag{50}$$

ce qui nous donne:

$$L \bar{\epsilon} \sum_{k=1}^{\gamma} \Big(\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \mathscr{E}_{s_1, s_2, \ldots, s_k} . \widehat{xy} \{y > \operatorname{cotg} \phi_k\} \Big). \tag{51}$$

Les relations (49) et (51) donnent, en vertu de (40):

$$L \bar{\epsilon} \mathscr{E}. \tag{52}$$

D'autre part, les relations (50) et $L = \Delta\, pro\, l$ prouvent que $L \epsilon (A, B)$, puisque la droite $y = \operatorname{cotg} \phi_\gamma$ coupe le segment (A, B). La supposition: $P' \bar{\epsilon} \mathscr{H}$ nous a conduit au résultat que, malgré que $(A, B) \subset \mathscr{E}$, il y existe sur (A, B) un point n'appartenant pas à $\mathscr{E}$.

La relation

$$P' \epsilon \mathscr{H}$$

est ainsi démontré. Soit $(x_1'', 0)$ la projection orthogonale du point P' sur l'axe x. On a $x_1'' \epsilon N$. Mais la transformation Δ fait correspondre à la droite $x = x_1''$ le point $(x_1'', 0)$; par conséquent $p' = \Delta\, pro P'$ c'est une droite passant par $(x_1'', 0)$. Il s'ensuit que $x_1'' = x''$, d'où, comme $x_1'' \epsilon N$, on obtient que le point A appartient à $\widehat{x, y} \{y = 0,\ x \epsilon N\}$.

En résumé, nous avons démontré que, si un point de l'axe x est accessible rectilinéairement dans $\mathscr{E}$, ce point appartient nécessairement à

$$\widehat{x, y} \{y = 0,\ x \epsilon N\},$$

où N est l'ensemble choisi non mesurable (B), du type (A).

Si l'on désigne par $\mathscr{E}^0$ l'ensemble de tous les points de $co\, \mathscr{E}$ qui sont rectilinéairement accessibles du côté du complémentaire de cet ensemble, $\mathscr{E}^0$ n'est pas mesurable (B). En effet, s'il était mesurable (B), l'ensemble

$$\mathscr{E}^0 . \widehat{xy} \{y = 0\}$$

serait mesurable (B), ce qui n'est pas vrai, parce que

$$\mathscr{E}^0 . \widehat{x, y} \{y = 0\} = \widehat{x, y} \{y = 0,\ x \epsilon N\}$$

et N n'est pas mesurable (B).

Paris 1926.