Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen.

Von

J. v. Neumann (Budapest).

1. Herr Hausdoff hat gezeigt, dass der Umfang eines Kreises in abzählbar viele, paarweise elementfremde und kongruente Teilmengen zerlegt werden kann [1]); daraus folgt leicht die Zerlegung des Intervalles (dem der eine Endpunkt zugezählt wird, der andere aber nicht) in abzählbar viele elementfremde und „Zerlegungsgleiche" Teilmengen. Auf dieser Konstruktion beruht der bekannte Nachweis der Existenz einer nach Lebesgue unmessbaren Menge; sowie der Beweis der Unmöglichkeit einer allgemeinen „abzählbar additiven" linearen Maassbestimmung.

Herr Steinhaus hat die Aufgabe gestellt [2]), auch das Intervall (dem etwa beide Endpunkte zugezählt werden mögen) in abzählbar viele, paarweise elementfremde und kongruente Teilmengen zu zerlegen. Herr Mazurkiewicz hat eine verwandte Aufgabe gelöst [3]): die Zerlegung in Kontinuum viele derartige Teilmengen von denen keine das Lebesgue-sche Maas 0 hat. (Ohne die letztere Bedingung ist ja die Zerlegung in Kontinuum viele Teile trivial: jeder kann aus einem einzigen Punkte bestehen. Bei der Zerlegung in abzählbar viele Teile müssen alle sowieso ein Lebesgue-sches äusseres Mass >0 haben: hätte eine das Maas 0, so hätten es wegen der Kongruenz alle, also auch ihre Vereinigungsmenge, das Intervall!) Mit der Mazurkiewicz-schen Konstruktion ist aber das eigentliche Problem noch unerledigt.

[1]) *Grundzüge der Mengenlehre*; Leipzig und Berlin 1914, S. 401—402.

[2]) S. *Fund Math.* t. II, S. 8. Auch W. Sierpiński *Bull. Acad. Polonaise* 1918, p. 141.

[3]) *Fund Math.* t. II (1921), S. 8—14.

Wir werden im folgenden die Steinhaus-sche Aufgabe lösen. Das Zermelo-sche Auswahlprinzip wird dabei in demselben Ausmasse Anwendung finden in dem es bei vielen verwandten Konstruktionen, z. B. bei der Herstellung einer nach Lebesgue unmessbaren Menge erforderlich ist: wir braucheu die simultane Auswahl aus einer Menge paarweise elementfremder Zahlenmengen (Mazurkiewicz braucht zu seiner Konstruktion mehr, nämlich die Wohlordnung des Kontinuums, d. h. die simultane Auswahl aus allen Zahlenmengen überhaupt).

2. Unter einem Intervall wollen wir eine jede Menge I der folgenden vier Typen verstehen:

I enthält alle x mit $a < x < b$,
I enthält alle x mit $a \leqslant x < b$,
I enthält alle x mit $a < x \leqslant b$,
I enthält alle x mit $a \leqslant x \leqslant b$,

Dabei sind a, b irgend zwei feste Zahlen, $a < b$ Wir werden die Steinhaus sche Aufgabe für alle diese Intervalle lösen.

Wir formulieren das Problem noch einmal genau: I sei ein Intervall. Es sollen abzählbar viele Mengen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ angegeben werden, derart dass:

A aus $m \neq n$ $K_m K_n = 0$ folgt.

$B.$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n = I$ ist.

C alle $K_1, K_2, K_3, \ldots$ paarweise kongruent sind.

$C.$ können wir auch so ausdrücken: alle $K_1, K_2, K_3, \ldots$ entstehen aus derselben Menge K (etwa K_1) durch Verschiebung um gewisse Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Bezeichnen wir die Menge $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mit H, so können wir $A.$ und $B.$ so formulieren:

Aus $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$ folgt $x + y \varepsilon I$. Ist umgekehrt $u \varepsilon I$, so gibt es ein einziges Paar x, y mit $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$ und $x + y = u$.

Unsere Aufgabe ist also diese:

Es sollen zwei Mengen K und H angegeben werden, sodass aus $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$, $x + y \varepsilon I$ folgt, und umgekehrt zu jedem $u \varepsilon I$ ein einziges Paar x, y mit $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$ und $x + y = u$ existiert. Dabei soll H abzählbar sein.

Wir werden nun den Gang der Überlegungen umkehren, indem wir zuerst H geeignent wählen, und dann dazu ein K aufsuchen, das diesen Bedingungen genügt.

3. Wir werden zeigen: Es gibt zu jedem H, das die weiter unten anzugebenden Eigenschaften besitzt, ein K das die Bedingungen aus 2 erfüllt. Die Eigenschaften die wir von H verlangen, sind diese:

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{a-b}{8}$, sonst ist ε beliebig.

H ist abzählbar. Es hat ein grösstes Element das $> \varepsilon$ und $< 2\varepsilon$ ist, und ein kleinstes Element dass $< -\varepsilon$ und $> -2\varepsilon$ ist. Beide sind Häufungspunkte von H. Alle Elemente von H sind voneinander linear unabhänging: d. h. wenn $x_1, x_2, \ldots, x_m$ irgendwelche paarweise voneinander verschiedene Elemente von H sind, und $a_1, a_2, \ldots, a_m$ beliebige ganze rationale Zahlen, so folgt aus

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = 0$$

immer

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0.$$

(Für unsere Zwecke hätte es genügt, bloss solche lineare Relationen zu betrachten, für die

$$m \leqq 6, \quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m| \leqq 6.$$

ist; dies ist aber unwesentlich).

Damit unser Ziel auch wirklich erreicht sei, wenn wir, wie angekündigt, bewiesen haben werden, dass zu jedem solchen H ein den Bedingungen in 2 genügendes K existiert, dazu müssen wir die Existenz eines solchen H beweisen.

Wir nehmen zunächst an, eine Folge linear unabhängiger Zahlen

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

stünde uns bereits zur Verfügung. Dann sind auch die Zahlen

$$\varrho_1 \xi_1, \varrho_2 \xi_2, \varrho_3 \xi_3, \ldots$$

linear unabhängig, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ irgendwelche rationale Zahlen sind. Setzen wir nun H gleich der Menge

$$\{\varrho_1 \xi_1, \varrho_2 \xi_2, \varrho_3 \xi_3, \ldots\},$$

so ist es jedenfalls abzählbar und hat linear unabhängige Elemente; die übrigen Bedingungen können wir durch geeignete Wahl der $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ erfüllen.

Wir wählen nämlich dieselben folgendermassen:

ϱ_1 wählen wir so, dass $\varepsilon < \varrho_1 \xi_1 < 2\varepsilon$ ist.

ϱ_2 wählen wir so, dass $-\varepsilon > \varrho_2 \xi_2 > -2\varepsilon$ ist.

ϱ_{2n+1} wählen wir so, dass $\varrho_1 \xi_1 - \frac{\varepsilon}{n} < \varrho_{2n+1} \xi_{2n+1} < \varrho_1 \xi_1$ ist $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

ϱ_{2n+2} wählen wir so, dass $\varrho_2 \xi_2 + \frac{\varepsilon}{n} > \varrho_{2n+2} \xi_{2n+2} > \varrho_2 \xi_2$ ist $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Dann sind alle unsere Bedingungen erfüllt.

Es gilt nun noch eine Folge linear unabhängiger Zahlen

$$\xi_1, \xi_1, \xi_3, \ldots$$

anzugeben, dies ist aber leicht; so sind z. B. die Zahlen

$$1, e, e^2, e^3, \ldots$$

wegen der Transzedenz von e linear unabhängig.

4. Wir treffen nun die ersten Vorbereitungen, um zu H die angekündigte Menge K herstellen zu können.

Die Menge aller

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m,$$

$x_1 \varepsilon H, x_1 \varepsilon H, \ldots, x_m \varepsilon H$, $a_1, a_2, \ldots a_m$ ganz-rational, bezeichnen wir mit H^*. Wir nennen zwei Zahlen x, y äquivalent, wenn $x - y \varepsilon H^*$ ist; man sieht sofort, dass die typischen Aequivalenz-Eigenschaften vorhanden sind:

I. x ist stets mit x aequivalent.

II. Wenn x mit y aequivalent ist, so ist es auch y mit x.

III. Wenn x mit y und y mit z aequivalent ist, so ist es auch x mit z.

Folglich zerfällt die Menge aller Zahlen in eine Menge von paarweise elementfremden Aequivalenzklassen. Jedes x gehört einer einzigen Aequivalenzklasse an, und x ist mit y dann und nur dann aequivalent, wenn beide derselben angehören. Jede Aequivalenzklasse ist die Menge aller $u + x$, $x \varepsilon H^*$, wenn u ein festes Element von ihr ist, d. h. jede ist mit dem H^* congruent.

Wir betrachten nun die Durchschnitte der Aequivalenzklassen mit I, diejenigen unter ihnen die nicht leer sind, seien die Elemente der Menge M.

Die Elemente von M sind also paarweise elementfremd, und ihre Vereinigungsmenge ist I.

Wir suchen nun ein K, für welches aus $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$ stets $x+y \varepsilon I$ folgt, und jedes $u \varepsilon I$ auf eine einzige Art als $u=x+y$, $x \varepsilon K$, $y \varepsilon H$ dargestellt werden kann. D. h. wir wollen I durch (eine beliebige Anzahl von) Mengen genau überdecken, die paarweise elentfremd sind, und deren jede mit H kongruent ist.

Nach dem, was wir über M wissen, genügt es offenbar, wenn wir dies für jedes Element von M durchführen können: die Überdeckungen der Elemente von M ergeben zusammen eine Überdeckung von I. (Hier wird zum ersten und einzigen Male das Zermelo-sche Auswahlprinzip wesentlich benützt).

Die Elemente von M sind nun Durchnitte von Mengen die mit H^* kongruent sind, mit I; also sind sie kongruent den Durchschnitten von H^* mit Intervallen die mit I kongruent sind. Es genügt folglich die Überdeckung für diese Megen auszuführen.

Wir müssen also zeigen: Wenn I' ein Intervall ist, dessen Länge $> 8\varepsilon$ ist, so kann $H^*\, I'$ durch eine Anzahl von paarweise elementfremde Mengen genau überdeckt werden, die mit H kongruent sind.

5. H ist abzählbar, also ist es auch die Menge aller

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$$

($x_1 \varepsilon H$, $x_2 \varepsilon H, \ldots$, $x_m \varepsilon H$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ganz-rational), H^*. Folglich ist auch $H^*.I'$ abzählbar oder sogar endlich. (Man kann zwar leicht zeigen dass diese Eventualität nie eintritt, dies ist aber für uns unwesentlich). Demnach kommt für die Überdeckung auch bloss eine abzählbare oder endliche Anzahl von mit H kongruenten Mengen in Frage.

Wenn wir die Menge aller $u+x$, $x \varepsilon H$ mit H_u bezeichnen so können wir unsere Aufgabe also auch so formulieren (da H_u die allgemeinste mit G kongruente Menge ist.):

Es gibt eine abzählbare oder endliche Folge von Zahlen

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$$

derart dass

A. für $m \neq n$ stets $H_{u_m} . H_{u_n} = 0$ ist,

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_{u_n} = H^*. I'$,

ist.

Um diese Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ herstellen zu können, müssen wir aber noch einen Hilfssatz beweisen

6. Dieser Hilfsatz lautet so:

Es sei $x \varepsilon H^*.I'$, aber x sei weder die (eventuelle) kleinste, noch die (eventuelle) grösste Zahl aus $H^*.I'$; und $u_1, u_2, \ldots, u_m$ irgendwelche Zahlen. x gehöre keinem der $H_{u_1}, H_{u_2}, \ldots, H_{u_m}$ an. Es gibt dann ein v, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

A. Es ist $x \varepsilon H_v$.

B. H_v ist eine Teilmenge von $H^*.I'$.

C. Es ist $H_v . H_{u_1} = H_v . H_{u_2} = \ldots = H_v . H_{u_m} = 0$.

Wir beweisen diesen Hilfssatz, indem wir zeigen: den Bedingungen *A.*, *B.* genügen unendlich viele v, die Bedingung *C.* verletzen unter diesen hingegen nur endlich viele. Hieraus folgt dann die Behauptung.

Den ersten Teil beweisen wir so:

Die Elemente von H seien etwa $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, η_1 sei das kleinste, η_2 das grösste. *A.* ist erfüllt, wenn $v = x - \eta_n$ ist. Die Elemente von H_v sind dann die $x - \eta_n + \eta_p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$; also gehören alle zu H^*. Folglich ist *B.* auch erfüllt, sobald alle zu I' gehören, d. h. wenn

$$a' < x - \eta_n + \eta_1, \quad b' > x - \eta_n + \eta_2$$

ist. (a', b' seien die Endpunkte von I', nach Annahme ist $b' - a' > 8\varepsilon$).

Dies bedeutet:

$$x - b' + \eta_2 < \eta_n < x - a' + \eta_1.$$

η_n ist also in ein Intervall von der Länge

$$(x - a' + \eta_1) - (x - b' + \eta_2) = b' - a' - (\eta_2 - \eta_1) > 8\varepsilon - 4\varepsilon > \eta_2 - \eta_1$$

eingeschlossen.

Wegen

$$x - b' + \eta_2 < 0 + \eta_2 = \eta_2, \quad x - a' + \eta_1 > 0 + \eta_1 = \eta_1,$$

hat aber dieses Intervall mit

$$\eta_1 < y < \eta_2$$

gemeinsame Punkte; und da seine Länge $> \eta_2 - \eta_1$ ist, so liegt η_1 oder η_2 in seinem Inneren. Da beide Zahlen Häufungspunkte von H sind, so liegen unendlich viele η_m in unserem Intervalle, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Den zweiten Teil beweisen wir so:

Wir werden zeigen, dass nur für endlich viele n

$$H_{x-\eta_n}\times H_{u_1}\neq 0, \quad \text{oder} \quad H_{x-\eta_n}\times H_{u_2}\neq 0, \ldots \quad \text{oder} \quad H_{x-\eta_n}\times H_{u_m}\neq 0$$

ist, denn es ist für höchstens zwei verschiedene n

$$H_{x-\eta_n}\times H_u\neq 0 \quad (x \text{ gehört dem } H_u \text{ nicht an}).$$

Es sei nämlich

$$H_{x-\eta_p}\times H_u\neq 0,$$
$$H_{x-\eta_q}\times H_u\neq 0,$$
$$H_{x-\eta_r}\times H_u\neq 0,$$

dann ist zu zeigen: p, q, r können unmöglich alle voneinander verschieden sein, d. h. aus $p\neq q$, $p\neq r$ folgt $q=r$.

Aus unserer Annahme folgt nämlich:

$$x-\eta_p+\eta_\alpha=u+\eta_{\alpha'}$$
$$x-\eta_q+\eta_\beta=u+\eta_{\beta'}$$
$$x-\eta_r+\eta_\gamma=u+\eta_{\gamma'},$$

d. h.

$$\eta_p+\eta_{\alpha'}-\eta_\alpha=\eta_q+\eta_{\beta'}-\eta_\beta=\eta_r+\eta_\gamma-\eta_{\gamma'}=x-u$$

d. h.

$$\eta_p+\eta_{\alpha'}+\eta_\beta-\eta_q-\eta_{\beta'}-\eta_\alpha=0$$
$$\eta_p+\eta_{\alpha'}+\eta_\gamma-\eta_r-\eta_{\gamma'}-\eta_\alpha=0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente von H muss sowohl $-\eta_q$, wie auch $-\eta_r$ durch je ein Glied mit $+$ Zeichen kompensiert werden; d. h. es muss

$$q=p \quad \text{oder} \quad \alpha' \quad \text{oder} \quad \beta,$$
$$r=p \quad \text{oder} \quad \alpha' \quad \text{oder} \quad \gamma$$

sein. Nun ist $q=p$ oder $r=p$ wegen $p\neq q$, $r\neq p$ unmöglich; Aus $q=\beta$ oder $r=\gamma$ würde

$$x=u+\eta_\beta \quad \text{oder} \quad x=u+\eta_{\gamma'},$$

d. h. $x\,\varepsilon\,H_u$ folgen, entgegen der Annahme. Also muss $q=\alpha'$ und $r=\alpha'$ sein, d. h. $q=r$, wie behauptet wurde

Damit ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

7. Wir gehen nun zur Definition der Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ über.

Dabei erinnern wir daran: η_1 ist das kleinste η_2 das grösste Element der Menge $H=\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\}$. Wir zählen auch $H^*.I'$ irgendwie ab, seine Elemente seien

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots$$

Wenn $H^*.I'$ ein kleinstes Element f und ein grösstes Element g hat, so setzen wir: $u_1=f-\eta_1$, $u_2=g-\eta_2$. Wenn es ein kleinstes Element f hat, aber kein grösstes, so sei: $u_1=f-\eta_1$; und wenn es ein grösstes Element g hat, aber kein kleinstes, so sei: $u_1=g-\eta_2$. Da f, g zu H^* gehören, gehören auch u_1, u_2 dazu, und folglich alle Punkte von H_{u_1}, H_{u_2}; ferner ist es klar, dass H_{u_1}, H_{u_2} ganz in I' liegen und keine gemeinsame Punkte haben (wenn beide definiert sind), weil die Länge von I' grösser als 8ε ist, und H ganz zwischen -2ε und 2ε liegt.

Also verletzen H_{u_1}, H_{u_2} (oder H_{u_1} allein) die für die $H_{u_1}, H_{u_2}, H_{u_3}, \ldots$ aufgestellten Bedingungen nicht: sie sind Teile von $H^*.I'$ und elementfremd; und sie enthalten dabei das kleinste und grösste Element von $H^*.I'$, falls solche überhaupt existieren.

Nachdem dies geschehen ist, müssen wir die u_n für $n\geqq 3$ bzw. $n\geqq 2$ bzw. $n\geqq 1$ definieren (je nach dem ob ein kleinstes und ein grösstes Element in $H^*.I'$ existirt, oder nur ein kleinstes, oder nur ein grösstes, oder keines von beiden). Dies geschieht so:

$u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ seien bereits bekannt. Wen $H_{u_1}+H_{u_2}+\ldots+H_{u_{n-1}}$ die Menge $H^*.I'$ bereits erschöpft, so sehen wir von der Definition von u_n, u_{n+1}, $u_{n+2}\ldots$ ab. Ist dies aber nicht der Fall, so sei a_p das erste Element von $H^*.I'$ dass nicht zu $H_{u_1}+H_{u_2}+\ldots+H_{u_{n-1}}$ gehört.

Wir wissen nun, dass es ein v gibt, so dass $a_p\,\varepsilon\,H_v$ ist, H_v Teil von $H^*.I'$ ist, und H_v mit allen H_{u_1}, $H_{u_2}, \ldots$ $H_{u_{n-1}}$ elementfremd ist. Jedes solche v ist offenbar gleich $a_p-\eta_q$, wir wählen das mit möglichst kleinem q. Dieses sei u_n.

Damit ist die (eventuell abbrechende) Reihe $u_1 . u_2 . u_3 \ldots$ definiert und wir müssen noch zeigen, dass sie unseren Bedingungen genügt.

Dass aus $m<n$ $H_{u_m}.H_{u_n}=0$ folgt, also auch aus $m\neq n$, sahen wir bei der Definition; und auch $\sum_{n=1}^{\infty} H_{u_n}=H^*.I'$ ist leicht einzusehen. Denn jedes H_{u_n} ist Teil von $H^*.I'$ (vgl. die Definition), also muss nur beweisen werden: jedes a_p von $H^*.I'$ gehört einem H_{u_n} an.

Dies beweisen wir so. Wenn die Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ abbricht, so ist es jedenfalls wahr. Bricht sie nicht ab, so sei a_{N_n} das erste a_q, dass in $H_{u_1}, H_{u_2}, \ldots H_{u_n}$ nicht enthalten ist. Da alle a_q mit $q < N_m$ in $H_{u_1}, H_{u_2}, \ldots, H_{u_m}$ enthalten sind, genügt es zu zeigen, dass einmal $p < N_n$ wird.

Nun enthalten $H_{u_1}, H_{u_2}, \ldots, H_{u_n}$ alle a_q mit $q < N_n$, $H_{u_{n+1}}$ enthält a_{N_n}; also ist $N_{n+1} > N_n$, d. h. $N_{n+1} \geqslant N_n + 1$. Hieraus folgt insbesondere $N_n \geqslant n$, also z. B. $N_{p+1} > p$, womit alles beweisen ist.

8. Damit ist die Steinhaus'sche Aufgabe restlos gelöst. Wir haben gezeigt:

Jedes Intervall I ist die Vereinigungsmenge abzählbar vieler, paarweise elementfremder und kongruenter Teile. Dabei ist es für die Gültigkeit dieses Satzes unerheblich, ob wir dem Intervalle I beide Endpunkte zuzählen, oder eines, oder gar keins

Mit Hilfe wohlbekannter Überlegungen sieht man ferner, dass diese Mengen alle nach Lebesgue unmessbar sind: ihr (gemeinsames) inneres Maas ist 0, ihr (gemeinsames) äusseres Maas ist > 0.

Sur un ensemble *plan* et fermé dont les points qui sont rectilinéairement accessibles forment un ensemble non mesurable *(B)*.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

§ 1. P. Urysohn[1]) a proposé d'étudier l'ensemble E^0 de tous les points d'un ensemble plan donné E, qui sont rectilinéairement accessibles. On appelle ainsi tout point A de E s'il existe un segment (A, B) rectiligne (ouvert) situé dans le complémentaire de E. P. Urysohn[2]) et M. S. Mazurkiewicz[3]), l'un indépendamment de l'autre, ont démontré que, dans le cas, où E est un ensemble fermé, E^0 est du type (A) de Souslin et de M. Lusin[4]). Dans le cas de 3 dimensions P. Urysohn[5]) et moi[6]), nous avons construit un ensemble fermé E, pour lequel E^0 n'est pas mesurable (B).

[1]) *Fund. Math.* V (1924), p. 337 (problème 29).

[2]) *Koninklijke Akademie Van Wetenschappen Te Amsterdam. Proceedings* Vol. XXVIII, N° 10. Paul Urysohn †. *Sur les points accessibles des ensembles fermés* p. 984—993. (rédigé par M. P. Alexandroff).

[3]) M. Mazurkiewicz a exposé sa démonstration pendant une des séances de la Société Mathématique Polonaise (Section de Varsovie) en 1924 mais il n'a pas publié sa démonstration.

En modifiant convenablement la méthode de M. Mazurkiewicz j'ai resolu le problème pour les ensembles (F_σ) plans.

Pour les ensembles (F_σ) M. Kuratowski a trouvé une méthode très simple (voir *Fund. Math.* VII, p. 256. Une méthode générale pour les ensembles de types différents est développée, par moi (voir [6])). *Fund. Math.* VII, p. 250—258.

[4]) *C. R.* 164. (1917), p. 88. M. Souslin. *Sur une définition des ensembles mesurables B.*

C. R. 164. (1917), p. 91. N. Lusin. *Sur la classification de M. Baire.*

[5]) voir [2]).

[6]) *Fund. Math.* VII (1925). O. Nikodym. *Sur les points rectilinéairement*