# Sur un problème relatif à un théorème de Vitali.

Par

Tibor Radó (Szeged, Hongrie).

(Extrait d'une lettre à M. Sierpiński).

Monsieur le professeur,

Je me permets de vous communiquer, avec quelques détails préliminaires, le problème auquel vous avez bien voulu vous intéresser. Dans son cours, de l'année dernière, M. F. Riesz a présenté le théorème connu de Vitali sous la forme élémentaire suivante. Soit, sur une droite, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ un système fini d'intervalles et soit $E$ l'ensemble recouvert par ces intervalles. *On peut extraire du système un système partiel d'intervalles non-empiétants, soit* $\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \dots, \Delta_{n_k}$, *tel que*

$$(1) \qquad m\Delta_{n_1} + \dots + m\Delta_{n_k} \geqq \tfrac{1}{3} mE.$$

À ce propos, je me suis demandé si le facteur $\frac{1}{3}$ est exact; la réponse est facile. On voit d'abord immédiatement que le facteur $\frac{1}{3}$ ne saurait être élevé au-delà de $\frac{1}{2}$ et puis on démontre que $\frac{1}{2}$ est bon — de la manière suivante, par exemple. Évidemment, il est légitime d'admettre que le système $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ est tel que tout intervalle $\Delta_k$ contient un certain point $\xi_k$ *intérieur* à $\Delta_k$ et *extérieur* aux autres intervalles du système. Ces points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sont distincts par définition et l'on peut supposer que la notation ait été choisie de façon à avoir

$$(2) \qquad \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m.$$

Soient $\Delta_k$, $\Delta_{k+h}$, $(h \geqq 2)$, deux intervalles du système; on aura $\xi_k < \xi_{k+1} < \xi_{k+h}$. Le point $\xi_{k+1}$ étant extérieur à $\Delta_k$ aussi bien qu'à $\Delta_{k+h}$, il résulte que $\Delta_k$ est situé à gauche et $\Delta_{k+h}$ est situé à droite de $\xi_{k+1}$. Par conséquent, *les intervalles* $\Delta_k$ *et* $\Delta_{k+h}$ *sont sans points*



*communs, pourvu que* $h \geqq 2$. En particulier (les notations étant choisies conformément à (2)), les intervalles d'indice pair forment un système partiel d'intervalles non-empiétants, et les intervalles d'indice impair de même. La somme des longueurs totales $l_p$, $l_i$ de ces systèmes partiels est $\geqq mE$, puisque ces deux systèmes partiels, pris à la fois, recouvrent l'ensemble $E$; donc, l'une au moins des quantités $l_p$, $l_i$ est au moins égale à $\frac{1}{2} mE$. Il est ainsi démontré — et d'une manière essentiellement topologique — que $\frac{1}{2}$ est le meilleur facteur que l'on peut substituer, dans (1), à $\frac{1}{3}$. Tout ceci n'est pas nouveau; comme je l'apprends de M. Saks, le facteur $\frac{1}{2}$ lui était connu; d'ailleurs, comme me le fit observer M. F. Riesz, la démonstration que je viens d'indiquer est au fond identique à certains raisonnements de Denjoy, relatifs à la théorie des dérivées. La démonstration vaut tout de même, je pense, la peine d'être signalée explicitement, puisque'elle repose sur un tout autre principe que la démonstration habituelle pour le facteur $\frac{1}{3}$.

J'arrive à présent au problème en question. Considérons, par analogie, dans le plan $xy$ un système fini de carrés $q_1, q_2, \dots, q_m$, à côtés parallèles aux axes $x, y$, et soit $E$ l'ensemble recouvert par ces carrés. On peut extraire du système proposé un système partiel de carrés non-empiétants, soit $q_{n_1}, \dots, q_{n_k}$, tel que

$$(3) \qquad mq_{n_1} + \dots + mq_{n_k} \geqq (\tfrac{1}{3})^2 mE$$

($m$ désignant à présent la mesure superficielle). *Quel est le meilleur facteur que l'on peut substituer, dans* (3), *au facteur* $(\frac{1}{3})^2$? tel est le problème que je me permets de proposer aux lecteurs des *Fundamenta*. Pour les applications du théorème de Vitali le facteur $(\frac{1}{3})^2$ vaut tout autant que le meilleur facteur probable $(\frac{1}{2})^2$ (pourvu que $(\frac{1}{2})^2$ soit effectivement le meilleur facteur). Si le problème semble mériter de l'intérêt, c'est à cause des faits topologiques importants dont paraît dépendre sa solution.

Szeged, le 20 septembre 1927.