# Zum verallgemeinerten Phragmén-Brouwer'schen Satz.

Von

Paul Alexandroff (Moskau).

(Auszug aus einem Brief an S. Mazurkiewicz).

Die Lektüre des Aufsatzes, den Sie im Bande IX der „Fundamenta" gemeinsam mit Herrn Straszewicz publiziert haben, regt mich zu einigen Ueberlegungen an, die ich mir gestatte, Ihnen hiermit mitzuteilen.

1) Der Satz I (§ 5 Ihrer Arbeit, Seite 206) ist ein Spezialfall eines von Herrn Alexander beim Beweise seines bekannten Dualitätssatzes bewiesenen Hilfssatzes (Trans. Amer. Math. Soc., 23, (1922), S. 342, corollary $W^i$). In der Tat lautet der Alexandersche Hilfssatz folgendermaßen:

> Wenn $A_1$ und $A_2$ zwei abgeschlossene [1]) Teilmengen des $R^n$ sind und $\Gamma^r$ ein außerhalb von $A_1+A_2$ gelegener geschlossener $r$-dimensionaler Komplex ist, der sowohl in $R^n-A_1$ als auch in $R^n-A_2$ homolog Null ist (mod 2); wenn überdies die (infolge der soeben gemachten Voraussetzung existierenden) in $R^n-A_1$ bzw. in $R^n-A_2$ liegenden durch $\Gamma^r$ (mod. 2) begrenzten Komplexe $K_1^{r+1}$ und $K_2^{r+1}$ so gewählt werden können, daß der geschlossene Komplex $\Gamma^{r+1}=K_1^{r+1}+K_2^{r+1}$ (mod. 2) in $R^n-A_1 . A_2$ homolog Null ist, so ist $\Gamma^r$ in $R^n-(A_1+A_2)$ homolog Null.

(NB: alle Homologien sind (mod. 2) zu verstehen) [2]).

[1]) abgeschlossen immer im *absoluten* Sinne: = beschränkt und abgeschlossen. (Alexander betrachtet den sphärischen Raum).

[2]) Terminologie — wie bei Alexander, loc. cit. (die Bettischen Zahlen hier um 1 kleiner als bei Alexander).



Nun braucht man in Ihrem Falle nur $n=3$ und $r=0$ zu setzen und für $\Gamma^r=\Gamma^0$ das Punktepaar $(a, b)$ zu nehmen: da weder $A_1$ noch $A_2$ die Punkte $a$ und $b$ trennt, so ist $\Gamma^0$ sowohl in $R^n-A_1$ als auch in $R^n-A_2$ homolog Null, d. h. $a$ und $b$ sind in $R^n-A_1$ mit einem Streckenzug $K_1^1$ und in $R^n-A_2$ mit einem Streckenzug $K_2^1$ verbindbar. Der geschlossene eindimensionale Komplex $\Gamma^1= =K_1^1+K_2^1$ (mod. 2) ist aber auf Grund Ihrer Voraussetzungen („$A_1$ $A_2$ n'est pas enlaçable") nicht nur homolog, sondern sogar homotop Null, sodaß die Voraussetzungen des Alexanderschen Hilfssatzes reichlich erfüllt sind und folglich $\Gamma^0$ in $R^n-(A_1+A_2)$ homolog Null ist. Letzteres heißt aber nichts anderes, als daß $a$ und $b$ in $R^n-(A_1+A_2)$ mit einem Streckenzug verbunden werden können.

2) Es wäre vielleicht interessant, auch Ihren Satz II (§ 13 Ihrer Arbeit, S. 210) mit analogen, mit Hilfe der Alexanderschen Methoden leicht beweisbaren Eigenschaften des $n$-dimensionalen Raumes zu vergleichen.

Es gilt zunächst folgender (meines Wissens neuer) Satz

*A. Es seien $A_1$ und $A_2$ zwei abgeschlossene Teilmengen des $R^n$ und $r$ eine der Bedingung $0 \leqslant r \leqslant n-2$ genügende ganze Zahl. Wenn sowohl die $r$-te als auch $r+1$-te Bettische Zahl von $R^n-A_1$ und von $R^n-A_2$ gleich Null sind, die $r+1$-te Bettische Zahl von $R^n-A_1 . A_2$ dagegen von Null verschieden ist, so ist auch die $r$-te Bettische Zahl von $R^n-(A_1+A_2)$ von Null verschieden; (d. h. es gibt in $R^n-(A_1+A_2)$ geschlossene $r$-dimensionale Komplexe, die daselbst nicht homolog Null sind).*

Wenn man $r$ gleich Null setzt, erhält man folgenden Spezialfall.

*$A_0$. Es seien $A_1$ und $A_2$ zwei abgeschlossene Mengen von denen keine den $R^n$ zerlegt. Wenn sowohl in $R^n-A_1$, als auch in $R^n-A_2$ jedes geschlossene Polygon homolog Null ist, wobei es wenigstens ein geschlossenes Polygon gibt, welches in $R^n-A_1 . A_2$ nicht homolog Null ist, so zerlegt die Menge $A_1+A_2$ den $R^n$.*

Beweis des Satzes *A*.

Es sei $\Gamma^{r+1} \subset R^n-A_1 . A_2$ ein geschlossener $r+1$-dimensionaler Komplex, der in $R^n-A_1 A_2$ nicht homolog Null ist. Da $\Gamma^{r+1}$ sowohl in $R^n-A_1$, als auch in $R^n-A_2$ homolog Null ist, so ist $\Gamma^{r+1} . A_1 \neq \neq 0 \neq \Gamma^{r+1} . A_2$.

Man unterziehe jetzt $\Gamma^{r+1}$ einer so feinen Simplizialzerlegung $\zeta$, daß kein Simplex dieser Zerlegung gleichzeitig mit $A_1$ und $A_2$ gegemeinsame Punkte hat. Die Gesamtheit aller zu $A_1$ nicht fremder

Simplexe von $\Gamma^{r+1}$ bildet dann einen Komplex $K_1^{r+1}$, die Gesamtheit aller übrigen Simplexe von $\Gamma^{r+1}$ einen Komplex $K_2^{r+1}$. Die gemeinsame Begrenzung (mod. 2) der Komplexe $K_1^{r+1}$ und $K_2^{r+1}$ ist sodann ein geschlossener Komplex $\Gamma^r$. Da $\Gamma^r$ zu $K_1^{r+1}$ gehört, so ist $\Gamma^r . A_2 = 0$. Es ist aber auch $\Gamma^r . A_1 = 0$. In der Tat, wenn $T^r$ ein zu $A_1$ nicht fremder Simplex von $\Gamma^r$ wäre, so würden sämtliche an $T^r$ anchließende $r+1$-dimensionale Simplexe von $\Gamma^{r+1}$ (deren Anzahl *gerade* ist, da $\Gamma^{r+1}$ geschlossen ist) zu $K_1^{r+1}$ gehören, so daß $T^r$ (als gemeinsame Seite von einer geraden Anzahl von Simplexen aus $K_1^{r+1}$) unmöglich zur Begrenzung von $K_1^{r+1}$ angehören könnte.

$\Gamma^r$ liegt also in $R^n - (A_1 + A_2)$. Ich behaupte, daß $\Gamma^r$ in $R^n - (A_1 + A_2)$ nicht homolog Null sein kann.

Es sei in der Tat

$$\Gamma^r \sim 0 \qquad (\text{in } R^n - (A_1 + A_2)).$$

Es gibt dann einen $r+1$-dimensionalen, in $R^n - (A_1 + A_2)$ gelegenen Komplex $Q^{r+1}$, dessen Begrenzung (mod. 2) mit $\Gamma^r$ identisch ist: in Zeichen

$$Q^{r+1} \to \Gamma^r \qquad (\text{mod. } 2).$$

Nun ist aber jeder der geschlossenen Komplexe

$$\Gamma_1^{r+1} = Q^{r+1} + K_1^{r+1} \qquad (\text{mod. } 2)$$

und

$$\Gamma_2^{r+1} = Q^{r+1} + K_2^{r+1} \qquad (\text{mod. } 2)$$

in $R^n - A_1 . A_2$ homolog Null (weil ja $\Gamma_1^{r+1} . A_2 = \Gamma_2^{r+1} . A_1 = 0$ ist), also ist auch

$$\Gamma_1^{r+1} + \Gamma_2^{r+1} \qquad (\text{mod. } 2)$$

homolog Null in $R^n - A_1 A_2$. Letzteres ist aber unmöglich, weil

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1^{r+1} + \Gamma_2^{r+1} &= Q^{r+1} + K_1^{r+1} + Q^{r+1} + K_2^{r+1} = \\ &= K_1^{r+1} + K_2^{r+} = \Gamma^{r+1} \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 2)$$

ist.

3) Ich gestatte mir noch folgende letzte Bemerkung zu machen. Das besondere Interesse des Janiszewski'schen Zerlegungssatzes besteht, meines Erachtens, darin, daß Janiszewski in seinen Voraussetzungen nur innere Eigenschaften der Durchschnittsmenge $A_1 . A_2$ betrachtete. (Dasselbe gilt natürlich auch von dem, für diesen ganzen Fragenkreis grundlegenden Phragmén-Brouwerschen Satz: die Eigenschaft der Menge $A_1 . A_2$ leer zu sein, ist ja auch eine innere Eigenschaft!).



Schon vor einigen Jahren wurde es mir klar, daß der Janiszewskische Satz nur ein Glied in der Kette von allgemeinen Additionssätzen ist, die mit dem Phragmén-Brouwerschen Satze beginnt und die ich deshalb als die Kette der *verallgemeinerten Phragmén-Brouwerschen* Sätze bezeichne. Ich habe mich auch selbst bemüht, weitere Glieder in dieser Kette aufzufinden, bzw. schon vorhandene von nicht inneren, nicht invarianten Voraussetzungen zu befreien (ich möchte in diesem Zusammenhange nur den Additionssatz für eindimensionale abgeschlossene Mengen erwähnen, den ich in meiner Arbeit *„Ueber kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven“* (Math. Ann., 96, S. 523) bewiesen habe). Um ein Analogon des Janiszewskischen Satzes für den $n$ dimensionalen Raum zu gewinnen, fehlten zunächst die den Bettischen Zahlen analogen Invarianten allgemeiner abgeschlossener Mengen. Diese Lücke wurde durch Einführung des Begriffes der Bettischen Zahlen für eine beliebige abgeschlossene Menge (in meiner Note *„Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque“*, Comptes Rendus, Paris 184, S. 317, séance du 7 février 1927) ausgefüllt. Mit Hilfe dieses Begriffes konnte man die Verallgemeinerung der ersten Hälfte[1]) des Janiszewskischen Satzes in der Gestalt des folgenden Satzes erhalten:

Die zweite Verallgemeinerung des Phragmén-Brouwerschen Satzes:

*Wenn $\Gamma^r \sim 0$ (in $R^n - A_1$ und in $R^n - A_2$) ist und die $n-r-2$-te Bettische Zahl von $A_1 A_2$ Null ist, so ist $\Gamma^r \sim 0$ auch in $R^n - (A_1 + A_2)$.*

Spezialfälle dieses Satzes sind:

1) Der verallgemeinerte erste Janiszewskische Satz ($r=0$):

*Wenn weder $A_1$ noch $A_2$ den $R^n$ zerlegt und die $n-2$-te Bettische Zahl von $A_1 A_2$ Null ist, so zerlegt auch $A_1 + A_2$ den $R^n$ nicht.* (Wenn man im letzteren Satze $n = 2$ setzt und bemerkt, daß die nullte Bettische Zahl einer abgeschlossenen Menge gleich der Komponentenzahl dieser Menge (im Falle wenn die Menge nur endlich viele Komponenten hat) und gleich $\infty$ ist (bei Mengen mit unen-

[1]) Unter der *ersten* Hälfte des Janiszewskischen Satzes (bzw. unter dem ersten Janiszewskischen Satze) verstehe ich die Behauptung, daß unter gewissen Bedingungen $A_1 + A_2$ den Raum *nicht* zerlegt.

dlich viele Komponenten), so erhält man die erste Hälfte des klassischen Janiszewskischen Satzes).

2) *Wenn* $\Gamma^r \sim 0$ (in $R^r - A_1$ und $R^n - A_2$) *und* $\dim A_1 . A_2 \leqslant n-3$ *ist, so ist* $\Gamma^r \sim 0$ (in $R^n - (A_1 + A_2)$). Insbesondere $(r = 0)$:

3) (Die erste Verallgemeinerung des Pragmén-Brouwerschen Satzes): *Wenn weder* $A_1$ *noch* $A_2$ *den* $R^n$ *zerlegt und* $\dim A_1 . A_2 = 0$ *ist, so zerlegt auch* $A_1 + A_2$ *den Raum* $R^n$ *nicht.* (Für $n = 2$ bekommt man den klassischen Phragmén-Brouwerschen Satz).

Nun aber hat in der letzten Zeit Herr Vietoris den von Brouwer herrührenden Begriff der Zyklosis für den $n$-dimensionalen Fall verallgemeinert[1]. Die auf Grund dieser Verallgemeinerung entstehenden Zahlen (die von Herrn Vietoris als die 1-te, 2-te usw. $n$-te Zusammenhangszahlen bezeichnet werden) nenne ich die *Brouwerschen Zahlen einer abgeschlossenen Menge* und beweise sodann den folgenden Satz (den Beweis habe ich diesen Sommer in meiner Vorlesung „Topologie der Euklidischen Räume" (Universität Göttingen) vorgetragen und werde ihn demnächst publizieren):

**Allgemeiner Dualitätssatz.** *Die r-te Brouwersche Zahl einer abgeschlossenen Menge* $F \subset R^n$ *ist gleich der* $n - r - 1$*-ten Bettischen Zahl von* $R^n - F$.

Unabhängig davon habe ich bewiesen („*Sur la décomposition de l'espace par des ensembles fermés*", Comptes Rendus. 184, S. 425, 21 février 1927), dass die Anzahl der zusammenhängenden Gebiete in die $F$ den $R^n$ zerlegt mit der $n-1$-ten Bettischen Zahl von $F$ (in meinem Sinne) übereinstimmt, woraus insbesondere folgt, daß für abgeschlossene Teilmengen des $R^n$ die $n-1$-te Brouwersche Zahl mit der $n-1$-ten Bettischen Zahl identisch ist. Es scheint aus manchen Gründen plausibel zu sein, daß auch allgemein die Brouwerschen Zahlen mit den entsprechenden Bettischen Zahlen identisch sind, es ist mir aber bis jetzt noch nicht gelungen, diese Vermutung zu beweisen; das einzige, was ich im allgemeinen Falle bewiesen habe, ist die Ungleichung $\beta^r(F) \leqslant p^r(F)$ (wobei durch $\beta$ die Brouwerschen und durch $p$ die Bettischen Zahlen bezeichnet werden).

Selbstverständlich ist in den bis jetzt bewiesenen Sätzen bereits die topologische Invarianz (in bezug auf homöomorphe Abbildungen

[1]) **Math. Ann., Bd. 97.**



*der Menge* $F$) der Zahlen $p^r(R^n - F)$ enthalten (insbesondere also die Invarianz der Komponentenzahl von $R^n - F$).

Der soeben ausgesprochene Dualitätssatz erlaubt ohne weiteres dem Satze $A$ die folgende Gestalt zu geben:

*B. Wenn* $A_1 + A_2 \subset R^n$ und $\beta^r(A_1) = \beta^r(A_2) = \beta^{r+1}(A_1) = \beta^{r+1}(A_2) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant n-2$ *ist,* $\beta^r(A_1 . A_2)$ *aber von Null verschieden ist, so ist auch* $\beta^{r+1}(A_1 + A_2) \neq 0$.

Insbesondere $(r = n - 2)$:

$B_0$. *Wenn keine der Mengen* $A_1$ *und* $A_2$ *den* $R^n$ *zerlegt und* $\beta^{n-2}(A_1) = \beta^{n-2}(A_2) = 0$, *jedoch* $\beta^{n-2}(A_1 . A_2) \neq 0$ *ist, so zerlegt* $A_1 + A_2$ *den* $R^n$ oder auch (was dasselbe ist):

Der verallgemeinerte zweite Janiszewskische Satz:

*Wenn keine der beiden Mengen* $A_1$ *und* $A_2$ *den* $R^n$ *zerlegt und jedes geschlossene Polygon sowohl in* $R^n - A_1$ *als auch in* $R^n - A_2$ *homolog Null ist, so zerlegt* $A_1 + A_2$ *den Raum dann und nur dann, wenn* $\beta^{n-2}(A_1 . A_2) \neq 0$ *ist.*

Letztere Behauptung ergibt sich daraus, *daß man auch allgemein in den Voraussetzungen der zweiten Verallgemeinerung des Phragmén-Brouwerschen Satzes die Bedingung* $p^{n-r-2}(A_1 . A_2) = 0$ *durch* $\beta^{n-r-2}(A_1 . A_2) = 0$ *ersetzen kann,* was, solange man nicht weiß, daß $p^{n-r-2} = \beta^{n-r-2}$ ist, eine Verschärfung dieses Satzes bildet.

2 September 1927 **Cassis s. mer.**