Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité dans un système des axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

Par

S. Weinlös (Lwów).

Le sujet de cette note est la recherche de l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité (groupe I. et IV.) du système (S) des axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions qui a été présenté par M. le Prof. Steinhaus dans son cours sous le titre: „Les fondements de la géométrie" [1]), et qui s'appuie sur le système des axiomes de la même géométrie de Hilbert [2]).

Je prouve d'abord que dans le système (S) l'axiome I 3_1 est dépendant, ensuite je démontre dans le système $(\bar{S}) = (S) - \mathrm{I}\,3_1$, qui est donc équivalent au système (S) — l'indépendance des axiomes: I 1, I 3_2, I 4, I 5, I 6, I 7, I 8 et IV et la dépendance de l'axiome I 2.

Je présente aussi les résultats des recherches sur l'indépendance des axiomes d'ordre (groupe II.) sans démonstrations.

J'accomplis l'agréable devoir de remercier M. A. Lindenbaum de ses précieuses remarques concernant cette note.

Le système des axiomes: (S).

I. Les axiomes de coïncidence.

I 1. *Par deux points différents passe au moins une droite* [3]).

Les concepts „point", „droite", „une droite passe par un point"

[1]) Ce cours a été litographié (en polonais) par le Cercle mathématique et physique de l'Université de Lwów, 1925.

[2]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, VI Aufl. 1923.

[3]) Nous désignons une droite qui passe par les points A, B par „(AB)".

sont des concepts primitifs, c'est-à-dire nous n'en savons rien de plus que ce qu'énoncent les axiomes.

Au lieu de l'expression „une droite a passe par un point A" nous nous servirons aussi des expressions suivantes: „un point A est situé sur la droite a", „le point A est un point de la droite a", „le point A est un point sur la droite a", „la droite a contient le point A". Si un point A est situé sur la droite a et sur la droite b nous dirons que „les droites a, b ont le point A en commun" ou „les droites a, b se coupent dans le point A".

I 2. *Par deux points différents passe tout au plus une droite.*

I 3_1. *Sur une droite sont situés au moins deux points différents.*

I 3_2. *Sur un plan est situé au moins un point.*

Les concepts „plan", „un point est situé sur un plan" sont des concepts primitifs. Au lieu de l'expression „un point A est situé sur un plan α" nous nous servirons aussi des expressions: „un plan α passe par un point A", „un plan α contient un point A". Si le point A est situé sur le plan α et sur le plan β on dit que „les plans α, β ont le point A en commun".

I 4. *Par trois points différents passe au moins un plan.*

I 5. *Par trois points différents non situés sur la même droite passe un plan tout au plus* [1]).

I 6. *Si deux points différents d'une droite sont situés sur un plan, chaque point de cette droite est situé sur ce plan.*

Définition. Si chaque point d'une droite est situé sur un plan, on dit que *cette droite est située sur ce plan.*

I 7. *Si deux plan différents ont un point en commun, ils ont aussi un autre point en commun.*

I 8. *Il y a quatre points différents qui ne sont pas situés sur le même plan.*

II. Les axiomes d'ordre.

II 1. *Si A, B, C sont trois points d'une droite a et B est situé entre A et C, B est situé entre C et A.*

[1]) Dans le cours cité l'axiome I 5 avait été formulé sans le mot „différents", mais cela s'est fait par une erreur qui s'est montrée dans une discussion au séminaire de M. Steinhaus, car la tendence de ce système (S) est de diminuer la force des axiomes.

La relation „B est situé entre A et C“ est une relation primitive.

II 2. *Si A et C sont des points différents d'une droite, il y a sur cette droite un point D tel que C est situé entre A et D.*

II 3_1. *Si A, B, C sont trois points différents d'une droite, au moins l'un d'eux est situé entre les deux autres.*

II 3_2. *Si A, B, C sont trois points*[1]) *d'une droite et B est situe entre A et C, A n'est pas situé entre B et C.*

II 3_3. *Si B est situé entre A et C, les points A, B, C sont différents.*

Définition: A, B étant deux points différents, nous appelons „*segment AB (ou BA)*“ l'ensemble des points situés entre A et B. L'abréviation „ABC“ signifie que B est situé entre A et C.

II 4. *Si A, B, C sont trois points non situés sur la même droite et si une droite l située dans le plan (ABC) coupe le segment AB et ne passe par aucun des points A, B, C, elle coupe aussi un des segments AC, BC.*

Définition: Si trois points différents A, A', O sont situés sur une droite a, on dit que *les points A, A' sont situés sur le même côté de la droite a par rapport au point O* s'il a lieu une des relations: $AA'O$, $OA'A$, $A'AO$, OAA' et aucune des relations: AOA', $A'OA$. *Les points A, A' sont situés sur les côtés contraires de la droite a par rapport au point O* s'il a lieu une des relations: AOA', $A'OA$, et aucune des relations: $AA'O$, $OA'A$, $A'AO$, OAA'.

Définition: Si chaque point de la droite a différent de O appartient à un et un seul côté de la droite a par rapport au point O, nous appelons „*un rayon de la droite a formé par le point O*“ l'ensemble des points situés sur le même côté de la droite a par rapport au point O. On dit que ce rayon issit du point O.

III. Les axiomes de congruence.

III 1_1. *Si sur une droite a sont donnés deux points différents A et B et sur une autre droite a' un point A', il y a sur un rayon choisi arbitrairement formé par A' sur la droite a' au moins un point B' tel que $A'B'$ est congruent à AB, $AB \equiv A'B'$.*

[1]) Pourque les axiomes II 3_2 et II 1 ne s'appuient pas sur l'axiome II 3_3 il faut ajouter dans ces axiomes le mot »différents«.

Cette „autre droite a'“ n'est pas nécessairement différente de a. „La congruence des segments“ est une relation primitive.

III 1_2. $AB \equiv AB$.

III 2. *Si $AB \equiv A'B'$ et $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$.*

III 3. *Si sur la droite l AB et BC sont des segments sans points communs et sur la droite l' $A'B'$ et $B'C'$ sont aussi des segments sans points communs et si en outre: $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C'$, alors $AC \equiv A'C'$.*

Définition: Si deux droites différentes a et b ont exactement un point en commun O et si ce point O forme sur la droite a deux rayons: h, h' et sur la droite b les rayons k, k', nous appelons chacun des systèmes des rayons: (h, k), (h, k'), (h', k), (h', k') „*un angle*“ que nous désignons: $\sphericalangle(h, k)$ ou $\sphericalangle(k; h)$, $\sphericalangle(h, k')$ etc.

Les rayons s'appellent „*côtés de l'angle*“. On dit que $\sphericalangle(h, k)$ *est situé sur un plan*, si chaque point de ses côtés h, k est situé dans ce plan.

Définition: Deux points différents A, B d'un plan α non situés sur la droite a située sur le plan α *sont situés sur le même côté du plan α par rapport à la droite a*, si aucun des segments déterminés par les points A, B n'est coupé par la droite a. Nous appelons l'ensemble des points d'un même côté du plan α par rapport à la droite a „*côté du plan α par rapport à la droite a*“.

III 4_1. *S'il y a sur le plan α un angle (h, k) et dans un autre plan α' sur une droite l' un point O et un des rayons formés par ce point p. ex. h' — il y a sur le plan α' sur le côté donné par rapport à la droite l' un et un seul rayon k' issu du point O et tel que:*
$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

III 4_2. $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$.

Définition: Nous désignons par $\sphericalangle ABC$ ou $\sphericalangle CBA$ l'angle dont les côtés sont: le rayon formé par le point B sur une droite passant par les points B, A notamment celui qui contient le point A, et le rayon formé par le point B sur une droite passant par les points B, C celui qui contient le point C.

III 6 [1]). *Si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ et $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, alors $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.*

[1]) J'omets l'ax. III 5: „Les relations: $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$, $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ impliquent la relation: $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$“, parce qu'il ré-

IV. L'axiome de la parallélité.

Si sur un plan α sont situés un point A et une droite l non passant par ce point, il passe par A tout au plus une droite qui n'a pas de points communs avec la droite l et qui est située dans le plan α.

Définition: Nous appelons deux droites qui n'ont pas de points communs et sont situées dans le même plan — des *„parallèles"*.

V. L'axiome de la continuité.

Les points d'une droite ne se laissent pas partager en deux catégories non vides de façon qu' entre les points appartenants à la même catégorie soient situés seulement les points de la même catégorie et entre les points de catégories différentes, les points de l'une et de l'autre.

Définition: „Partager les points d'une droite en deux catégories" signifie: déterminer deux ensembles de points de façon que chaque point de la droite appartient à un et un seul ensemble.

Remarque: Je comprends tous les axiomes dans lesquels l'existence de divers éléments n'est pas exigée explicitement — comme abrégé des propositions conditionnelles; p. ex. III 4_2: *„S'il existe un angle $\sphericalangle(h,k)$ on a $\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(h,k)$"*. Dans le système complèt cet antécédent est superflu.

La dépendance de l'axiome I 3_1 des axiomes: I 1, I 2, I 4, I 6, I 8, II 2, II 3_2, IV.

Lemme 1.

Il y a trois points différents qui ne sont pas situés sur la même droite.

D'après l'axiome I 8, il y a quatre points différents: A, B, C, D qui ne sont pas situés sur le même plan. Considérons trois quelconques d'entre eux, p. ex A, B, C. Je dis qu'ils ne sont pas situés sur la même droite. Car s'ils étaient situés sur la même droite, un plan α passant par les points A, B, D (qui existe en vertu de l'ax. I 4) passerait — suivant l'ax. I 6 — aussi par le point C, contrairement à l'axiome I 8.

sulte du système (S) — III 5. Pour le démontrer il suffit de changer un peu la démonstration de la dépendance de l'ax. III 5 du système des axiomes de Hilbert présentée par M. A. Rosenthal (Math. Ann., 71). (v. cours cité, p. 72).

Lemme 2.

X étant un point quelconque, il y a toujours deux points différents P_1, P_2 tels que $P_1 \neq X \neq P_2$ et que les points P_1, P_2, X ne sont pas situés sur une même droite.

Prenons trois points différents: A, B, C non situés sur la même droite. (C'est le lemme 1 qui nous apprend leur existence). Si $X = A$ resp. B, on posera $P_1 = B$ resp. A, $P_2 = C$. Lorsque $B \neq X \neq A$ et les points A, B, X ne sont pas situés sur la même droite, le lemme est prouvé. Dans le cas contraire je dis que les points A, C, X ne sont plus situés sur une même droite. Car dans ce cas il passe par les points A, B, X une droite a_1; s'il existait une droite a_2 qui passe par A, C, X elle aurait deux points différents A, X en commun avec a_1, les droites a_1, a_2 auraient donc (I 2) tous les points communs et les points A, B, C seraient situés sur la même droite, contrairement à la supposition.

Considérons maintenant une droite quelconque a:

Il y a trois cas possibles:

1°) Sur la droite a il n'y a aucun point,
2°) Sur la droite a il existe exactement un point: X,
3°) Sur la droite a il y a au moins deux points différents.

Dans le cas 3°) notre théorème est vrai.

Dans le cas 1°) menons par trois points différents: A, B, C non situés sur la même droite [1]) un plan α (I 4). La droite a est située dans le plan α, car ne contenant aucun point elle est située dans chaque plan [2]).

Considérons les droites (AB) et (BC) (I 1) situées — suivant l'ax. I 6 — dans le plan α. Les droites (AB) et (BC), situées dans le même plan que la droite a, passant toutes les deux par le point B et étant différentes, ne peuvent pas — en vertu de l'ax. IV — toutes les deux être parallèles à la droite a; par conséquent au moins une d'elles coupe la droite a dans un point: X.

S'il existe sur la droite a un point Y différent de X, le théorème est vrai. Le cas cependant où le point X est le point unique de la droite a. se réduit au cas deuxième.

Dans ce cas envisageons deux points différents: A, B tels que

[1]) Le lemme 1. montre leur existence.

[2]) Parce que „une droite l est située sur un plan α" signifie: *„si la droite l contient un point, ce point est situé sur le plan α"*. — Cette proposition (conditionnelle) est dans notre cas vraie, car son antécédent n'y est pas vérifié.

14*

les points A, B, X ne soient situés sur la même droite [1]) et menons par A, B, X ($A \neq X \neq B$) un plan α (I 4). La droite a contenant seulement le point X, est située dans ce plan. Dans le plan α considérons les droites (AB) et (AM), M étant un point qui satisfait à la relation: BXM.

(Le point M existe sur la droite (BX), en vertu de l'ax. II 2).

Lemme 3.

Les droites (AB) et (AM) sont différentes.

En effet, dans le cas contraire le point M serait situé sur la droite (AB), les droites AB et BX auraient donc deux points différents: B, M en commun ($M \neq B$ suivant l'ax. II 3_3, car on a: BXM), ce qui prouverait — en vertu de l'ax. I 2 — que les points A, B, X seraient situés sur la même droite, contrairement à la supposition.

Par conséquent, les droites (AB) et (AM) ne peuvent pas — d'après l'ax. IV — toutes les deux être parallèles à la droite a, au moins une d'elles coupe donc la droite a dans un point Y.

Je dis que les points X, Y sont différents.

Si les points X, Y étaient identiques, le point X serait situé ou sur la droite (AB) ce qui nie la supposition, ou bien sur la droite (AM), d'où les droites (AM) et (BM) auraient deux points différents communs: M, X ($M \neq X$ d'après l'ax. II 3_3), elles seraient donc (I 2) identiques, d'où les droites (AB) et (AM) seraient identiques contrairement au lemme 3.

Nous avons donc dans tous les cas sur chaque droite deux points différents. C. Q. F. D.

Remarque: Au lieu de l'ax. I 2, il suffit pour cette démonstration une proposition suivante: „*Si deux droites ont deux points différents communs, elles ont tous les points communs*", ce qui résulte des axiomes I 1, I 4, I 5, I 6, I 8, II 2, II 3_3, IV. (voir, p. 214—215).

L'indépendance de l'ax. IV. dans le système $(\overline{S}) = (S) - \mathrm{I}\, 3_1$.

L'axiome I 3_1 étant dépendant dans le système des axiomes (S), nous pouvons l'omettre. Dans le système $(\overline{S})$ obtenu de cette manière on peut prouver très facilement l'indépendance de l'axiome de parallélité (IV).

Dans ce but je construis une géométrie suivante [2]):

[1]) Lemme 2.

[2]) Pour faire remarquer que les idées et les relations primitives sont définies spécialement pour cette géométrie, je les mets en guillemets.

„un point" $\stackrel{df}{=}$ un point de la géométrie euclidienne.

„une droite" $\stackrel{df}{=}$ une droite de la géométrie euclidienne et aussi un nombre n'importe quel, p. ex. $\frac{1}{2}$.

„un plan" $\stackrel{df}{=}$ un plan de la géométrie euclidienne.

„un point est situé sur une droite" $\stackrel{df}{=}$ 1) la droite est une droite euclidienne 2) le „point" est situé sur elle au sens de la géométrie euclidienne.

„un point est situé sur un plan" $\stackrel{df}{=}$ le „point" est situé sur le „plan" au sens de la géométrie euclidienne.

Les relations „d'ordre" et de „congruence" sont les mêmes que dans la géométrie euclidienne.

Cette géométrie satisfait à tous les axiomes du système $(\overline{S})$ excepté l'axiome IV. Grâce à cette géométrie nous voyons en même temps que l'axiome IV est nécessaire pour démontrer la dépendance de l'axiome I 3_1 dans le système (S), parce que dans cette géométrie l'axiome I 3_1 n'est plus vérifié.

L'indépendance de l'axiome I 1 dans le système $(\overline{S})$ et sa dépendance dans le système $(\overline{S}')$.

La géométrie suivante prouve que l'axiome I 1 est indépendant dans le système $(\overline{S})$.

„un point" $\stackrel{df}{=}$ chacun des quatre points euclidiens différents quelconques A, B, C, D.

„une droite" $\stackrel{df}{=}$ une droite euclidienne.

„un plan" $\stackrel{df}{=}$ un ensemble pas ordonné de trois „points" différents.

„un point" n'est jamais „situé sur une droite".

„un point est situé sur un plan" $\stackrel{df}{=}$ il est un des trois „points" formants ce „plan".

Je ne définis pas les relations d'„entre" et de „congruence des segments" parce que ces relations ont lieu entre les points situés sur les droites, et dans cette géométrie aucun „point" n'est „situé" sur la „droite". De même je ne définis pas la relation de „congruence des angles", parce que les „angles" n'existent pas, puisque ils n'existent pas deux „droites" „se coupants" dans un „point".

Il est évident que cette géométrie vérifie tous les axiomes du système $(\overline{S})$ excepté l'axiome I 1, qui y est faux.

Si nous remplacions l'axiome I5 du système $(\overline{S})$ par l'axiome I5': „*Par trois points non situés sur la même droite passe tout au plus un plan*" — nous obtiendrions un systéme (S') dans lequel *l'axiome I1 serait dépendant.* — Cela a été démontré par M^lle^ I. Krampner. Voici sa démonstration:

Si l'axiome I1. n'était pas vérifié dans le système $(\overline{S'})$ — I1 ils existeraient deux points différents A, B par lesquels ne passerait aucune droite. D'après l'ax. I8 il existe un point C différent de A, B; menons par les points A, B, C un plan α (I4). Suivant l'ax. I8 il existe un point D en dehors du plan α. Conduisons par les points A, B, D un plan β (I4). Ce plan est différent de α. Trois points A, B, B non situés — suivant la supposition — sur la même droite, sont en même temps situés sur deux plans différents: α, β contrairement à l'ax. I5'.

La dépendance de l'axiome I2 dans le système $(\overline{S})$.

Je divise cette démonstration en deux parties:

1) Théorème 1. Si deux droites ont deux points différents en commun, elles ont tous les points en commun.

2) Théorème 2. Deux droites qui ont tous les points en commun sont identiques.

1) Supposons que le théorème 1. n'est pas vrai, c'est à dire qu'il y a deux droites différentes a, b qui passent par les mêmes deux points différents A, B, et telles que sur une droite, p. ex. sur b est situé un point C qui n'est pas situé sur l'autre.

Lemme: A, B étant deux points différents, il existe un point D tel que les points A, B, D ne sont pas situés sur la même droite.

En vertu de l'ax. I8 il existent quatre points différents: D_1, D_2, D_3, D_4 qui ne sont pas situés sur le même plan. Si chacun d'eux était situé sur une meme droite avec les points A, B, tous les points D_1, D_2, D_3, D_4 seraient situés — d'après I6 — sur le plan α qui passe par les points A, B, D_1 contrairement à l'ax. I8. Le plan α existe en vertu de I4, car parmi les points D_1, D_2, D_3, D_4 il existe au moins un, p. ex. D_1 qui est différent de A, B.

Menons maintenant par les points A, B, D non situés sur la même droite le plan α (I4). Les droites: a et chacune des droites qui passent par les points C, D (I1) sont situées dans le plan α (I6). En vertu de l'axiome I8 il existe un point E en dehors du plan α.

Menons par les points A, B, E un plan β (I4) qui contenant le point E est différent de α.

Si une des droites (CD) coupe la droite a dans un point F, qui est donc différent de C, nous avons sur cette droite (CD) deux points différents: C, F situés sur le plan β. Par conséquent le point D est aussi (I6) situé sur le plan β. Il y a donc deux plans différents α, β qui passent par les points A, B, D non situés sur la même droite, contrairement à l'ax. I5.

Si cependant la droite (CD) est parallèle à la droite a [1]), envisageons sur une des droites (AD) un point D' satisfaisant à la relation ADD' (II2). *Le point D'* qui est différent du point D (II3_3) *ne peut pas être situé sur la droite (CD).*

En effet, menons par les points A, D, E un plan γ (I4) qui contenant le point E est différent de α. Si le point D' était situé sur la droite (CD), cette droite contiendrait deux points différents D, D' situés sur le plan γ et par conséquent le point C serait situé sur γ (I6). Les points A, B, C étant situés sur la même droite (b) et les points A, C étant situés sur γ, le point B serait aussi situé sur γ. Les plans α, γ auraient donc en commun trois points différents: A, B, D, non situés sur la même droite, ce qui contredit à l'ax. I5.

Chacune des droites (CD') (I1) est donc différente de la droite (CD) et ne peut pas — d'après IV — être parallèle à la droite a. Envisageons une des droites (CD'); elle coupe la droite a dans un point F.

Nous avons sur la droite (considérée) (CD') deux points différents F, C situés sur β, d'où le point D' est situé sur β (I6); sur la droite AD (considérée) il y a donc deux points différents A, D' situés sur β, d'où le point D est situé sur β (I6), ce qui est impossible [2]).

2) Soient maintenant a, b deux droites qui ont tous les points en commun. Menons par le point P situé en dehors de la droite a [3])

[1]) Dans ce cas il existe une seule droite (CD), (IV).

[2]) Le théorème 1. résulte des axiomes: I1, I4, I5, I6, I8, II2, II3_3, IV. Au lieu d'employer l'ax. I5 il suffit dans cette démonstration d'employer la proposition: „*Si deux plans ont trois points non situés sur la même droite en commun ils ont tous les points en commun*".

[3]) Le point P existe en vertu du lemme, car ils existent sur la droite a au moins deux points différents (v. p. 210 et rem. p. 212).

une droite p parallèle à la droite a. Son existence résulte du système $\overline{(S)}$ — I 2 [1]).

La droite p est aussi parallèle à la droite b comme il résulte de la supposition. Les droites a, b passant toutes les deux par un point A, situées sur le même plan et parallèles à la même droite p sont en vertu de l'ax. IV identiques. C. Q. F. D.

Il mérite d'être remarqué qu'en changeant un peu l'axiome I 6 du système S et en postulant au lieu de lui l'axiome I 6′: *„Deux points différents étant situés sur un plan a, au moins une des droites qui passent par ces points est entièrement située sur le plan a“* on trouvera que l'axiome I 2 est indépendant. Cette remarque est due à M[lle]. I. Krampner.

L'indépendance de l'axiome I 3_2 dans le système $\overline{(S)}$.

Afin de le prouver il suffit de joindre dans la géométrie euclidienne à l'ensemble de tous les plans un nombre n'importe quel p. ex. $\frac{1}{2}$ et d'admettre qu'un „point est situé sur le plan“ si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) le „plan“ est un plan euclidien
2) le „point“ y est situé au sens de la géometrie euclidienne.

Toutes les autres définitions restent sans changement.

Il résulte immédiatement de la définition que cette géométrie satisfait à tous les axiomes de $\overline{(S)}$ excepté l'axiome I 3_2 qui y devient faux.

L'indépendance de l'axiome I 4 dans le système $\overline{(S)}$.

Considérons une droite euclidienne quelconque: a et une géométrie suivante:

„un point“ $\overset{df}{=}$ point de la droite a.
„une droite“ $\overset{df}{=}$ la droite a
„un plan“ $\overset{df}{=}$ un cercle fixe K à centre dans un „point“: A.
„un point est situé sur une droite“ $\overset{df}{=}$ un „point“ est sitné sur une „droite“ au sens de la géométrie euclidienne.
„un point est situé sur un plan“ $\overset{df}{=}$ il est le centre du cercle K.

[1]) V. cours cité, p. 44. L'ax. I 2 y est utilisé dans la forme suivante: *„Si deux droites ont deux points différents communs* (elles sont identiques, donc) *elles ont tous les points communs“* ce qui (après l'élimination la partie en paranthèses) a été démontré dans le système $\overline{(S)}$ — I 2 (théorème 1). Dans la démonstration qui se trouve dans le cours est employé entre autres l'ax. I 3_1, mais l'ax. I 3_1 peut être démontré dans le système $\overline{(S)}$ — I 2 grâce au théor. 1. (v. remarque, p. 212)

Les relations d'„ordre“ et de „congruence des segments“ sont les mêmes que dans la géométrie euclidienne; je ne définis pas la relation de „congruence des angles“ puisque les angles n'existent pas dans cette géométrie.

L'axiome I 4 n'est pas vérifié dans cette géométrie puisque le „plan“ K passe — par définition — tout au plus par *un* „point“ A.

Tous les autres axiomes sont vérifiés:

I 1, I 2: tous les „points“ „sont situés“ sur une et une seule „droite“.
I 3_2: le „point“ A „est situé sur le plan“: K.
I 5, II 4, IV: les antécédents sont faux, car tous les „points“ „sont situés sur la même droite“.
I 6: l'antécédent est faux, car deux „points“ différents ne sont pas „situés sur un plan“.
I 7: l'antécédent est faux, car deux „plans“ différents n'ont pas de „points“ communs.
I 8: quatre „points“ différents ne sont jamais „situés sur le même plan“.
II 1, II 2, II 3_1, II 3_2, II 3_3; III 1_1, III 1_2, III 2, III 3, V: ils sont vérifiés dans la géométrie euclidienne, et les définitions d'„ordre“ et de „congruence de segments“ sont les mêmes que dans celle-ci.
III 4_1, III 4_2, III 6: les antécédents sont faux, car il n'y a pas d'angles dans cette géométrie.

Cette géométrie montre en même temps que le système des axiomes (S) sans l'axiome I 4 ((S) — I 4) ne définit pas exactement la géométrie euclidienne à trois dimensions, parce que la géométrie sur une droite satisfait aussi à ce système.

Même si nous posions au lieu de cet axiome l'ax. I 4′: *„Par trois points non situés sur la même droite passe toujours un plan“* — l'axiome qui se trouve dans le système des axiomes de Hilbert [1]) — nous pourrions obtenir aussi une géométrie linéaire. Pour le démontrer il suffit de prendre de nouveau la même géométrie de laquelle nous venons de parler. Tous les axiomes sans I 4′ y seront vérifiés comme auparavant, et l'ax. I 4′ y est aussi vrai, parce que son antécédent y est faux.

[1]) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, VI.

Remarque: M. A. Rosenthal affirme [1]) qu'on peut dans le système des axiomes de Hilbert affaiblir la seconde partie de l'axiome I3 et le remplacer par: „Sur un plan est situé au moins un point". Cette géométrie montre que la démonstration donnée par M. Rosenthal est insuffisante [2]), si nous comprenons l'ax. I7 de Hilbert, comme il est interprété dans le système (S), parce que sa démonstration s'appuie sur les axiomes du groupe I du système de Hilbert, et cette géométrie remplit tous ces axiomes du groupe I et aussi tous les axiomes des groupes II, III, IV et V1, ne satisfait pas cependant à l'ax. $I3_2$ non affaibli [3]).

L'indépendance de l'axiome I5 dans le système $(\bar{S})$.

Il suffit de prendre la géométrie suivante:

„un point" $\overset{df}{=}$ un point de la géométrie euclidienne.

„une droite" $\overset{df}{=}$ une droite de la géométrie euclidienne.

„un plan" $\overset{df}{=}$ une paire ordonnée (α, i), où α est un plan euclidien, et $i = 1$ ou 2.

„un point est situé sur une droite" l $\overset{df}{=}$ le „point" A est situé sur la „droite" l au sens de la géométrie euclidienne.

„un point est situé sur un plan (α, i)" $\overset{df}{=}$ le „point" est situé sur le plan euclidien α au sens de la géométrie euclidienne.

Toutes les autres relations sont celles de la géométrie euclidienne.

Il est évident que cette géométrie remplit tous les axiomes excepté I5.

L'axiome I5 est donc indépendant, quoique on peut démontrer sans son aide le suivant théorème dû à M. A. Lindenbaum: „*Si deux plans α, β ont trois points différents: A, B, C, non situés sur la même droite en commun, ils ont tous les points en commun*".

[1]) Mathematische Annalen, 69. (1910).

[2]) M. Rosenthal s'appuie dans sa démonstration sur l'opinion qu'„une proposition conditionnelle n'a pas de sens si son antécédent n'est jamais rempli" (Math. Ann., 69).

[3]) Dans cette géométrie l'ax. V2 n'est pas vérifié. Donc — si le théorème de M. Rosenthal est vrai, cette géométrie peut servir de démontrer l'indépendance de l'ax. V2 dans le système de Hilbert.

Démonstration: Soit $D (\neq A, B, C)$ un point quelconque du plan α. Si le point D est situé sur la même droite avec les points A, B, le point D est situé sur le plan β (I6). Dans le cas contraire, menons une droite par les points C, D (I1, I2). Si la droite (CD) coupe la droite (AB) dans un point E (il est $E \neq C, D$), il y a sur la droite (CD) deux points différents: C, E situés sur β, d'où le point D est situé sur β (I6). Si cependant la droite (CD) est parallèle à la droite (AB) prenons sur la droite (AC) (I1) un point C' satisfaisant à la relation ACC' (II2). Si le point C' est situé sur la droite (CD), nous avons sur cette droite deux points différents ($C' \neq C$ d'après $II3_3$) situés sur β, d'où le point D est (I6) situé sur β. Dans le cas contraire (donc $C' \neq D$) la droite qui passe par C', D (I1) coupe — d'après IV, comme différente de (CD) — la droite (AB) dans un point E, et le point D est encore — d'après I6 — situé sur le plan β. C. Q. F. D.

Ce théorème résulte des axiomes: I1, I2, I6, II2, $II3_3$, IV.

L'indépendance de l'axiome I6 dans le système $(\bar{S})$.

Choisissons dans la géométrie euclidienne une droite quelconque: a et construisons une géométrie suivante:

„un point" $\overset{df}{=}$ point de la droite a

„une droite" $\overset{df}{=}$ la droite a

„un plan" $\overset{df}{=}$ un ensemble de cinq „points" différents parmi lesquels deux „points" différents et fixes: A, B figurent toujours.

un „point est situé sur une droite" signifie la même chose que dans la géométrie euclidienne.

un „point est situé sur un plan" α $\overset{df}{=}$ le „point" est un des cinq „points" formants ce „plan" α.

Les relations d'„ordre" et de „congruence de segments" sont celles de la géométrie euclidienne; je ne définis pas la relation de „congruence des angles" parce que les angles n'existent pas dans cette géométrie.

L'axiome I6 n'est pas vérifié dans cette géométrie, puisque deux „points" différents A, B sont situés sur le „plan" $\alpha = (ABCDE)$ tandis que le „point" F de la même „droite", différent des „points": A, B, C, D, E n'est pas „situé sur le plan" α.

Tous les autres axiomes sont vérifiés:

I1, I2, $I3_2$, I4, I8, par la définition.

II1, II2, II3_1, II3_2, II3_3, III1_1, III1_2, III2, III3 et V, car ils sont vrais dans la géométrie euclidienne est les définitions d'„ordre" et de „congruence de segments" sont les mêmes que dans celle-ci.

I5, II4, III4_1, III4_2, III6 et IV, car leurs antécédents sont faux.

I7, car son conséquent est vrai (tous les „plans" ont les „points" A, B communs).

Nous voyons par là que l'ax. I6 est — de même que l'ax. I4 — nécessaire pour définir une géométrie à trois dimensions, parce que le système (S) — I6 donne entre autres une géométrie sur une droite.

En ce qui concerne les *axiomes I7 et I8* on démontre aisément [1]) qu'ils *sont indépendants dans le système* (S), en contruisant dans ce but: 1) la géométrie cartesienne à quatre dimensions (I7) dans laquelle les „plans": $(x=0,\ y=0)$ et $(z=0,\ u=0)$ ont exactement un „point": $(0,0,0,0)$ en commun; 2) la géométrie cartesienne à deux dimensions (I8).

Remarque 1.

Les géométries qui montrent l'indépendance des axiomes: I3_2, I4, I5, I6 dans le système $(\overline{S})$ la montrent aussi dans le système (S). L'indépendance de l'ax. I1 dans le système (S) on peut démontrer à l'aide d'une autre géométrie construite par M[lle] I. Krampner:

Nous envisageons deux droites euclidiennes: a, b sans points communs et nous définissons:

„Point" $\stackrel{df}{=}$ chaque point des droites a, b

„droite" $\stackrel{df}{=}$ chacune des droites a, b

„plan" $\stackrel{df}{=}$ un point d'une „droite" et l'autre „droite"

„un point est situé sur un plan" (aB) $\stackrel{df}{=}$ il est le „point" B, ou il est situé sur la „droite" a au sens de la géométrie euclidienne.

Toutes les autres relations sont les mêmes que dans la géométrie euclidienne.

Remarque 2.

Les axiomes I2, I3_1 sont aussi dépendants dans le système des axiomes de Hilbert. L'ax. I3_1 résulte des axiomes: I1, I4, I5, I6, I8, II2, II3, IV et V2. Dans la démonstration de l'ax. I2 est utilisé en outre l'ax. II4 et le groupe III des axiomes. En changeant un peu la démonstration de la dépendance de l'ax. I1 dans le système $(\overline{S'})$, donnée par M[lle] I. Krampner (p. 214) nous voyons que l'axiome I1 est dépendant aussi dans le système des axiomes de Hilbert, où l'ax. I5 est identique à I5′ (v. p. 214). La géométrie qui prouve l'indépendance de l'axiome IV dans le système $(\overline{S}) = (S) - \mathrm{I}3_1$. prouve aussi l'indépendance de l'axiome de parallélité dans le système de Hilbert sans la premiere partie de l'ax. I3, système qui est équivalent au système complèt de Hilbert.

En se qui concerne les axiomes d'ordre, j'ai prouvé la dépendance de l'axiome II3_1 de l'ensemble des axiomes: I1, I4, I6, I8, II1, II2, II3_2, II3_3 et II4 et l'indépendance des axiomes: II1, II2, II3_2, II3_3 et II4. Les démonstrations sont données dans ma thèse sous le titre: „Sur l'indépendance des axiomes des groupes I, II et IV d'un système des axiomes de la géométrie euclidienne à 3 dimensions" [1]), dont cette Note est un abrégé.

[1]) Le cours cité, p. 12.

[1]) présentée en 1926 à la Faculté des Sciences mathématiques et naturelles de l'Université Jean-Casimir à Lwów pour obtenir le grade de docteur.