Nous avons ainsi démontré que Q est un ensemble plan mesurable (L), dont l'ensemble de tous les points linéairement accessibles est non mesurable (L).

Or, le problème suivant reste encore ouvert: *L'ensemble $a(E)$ de tous les points linéairement accessibles d'un ensemble plan E mesurable (B) est-il toujours mesurable (L)?* (D'après M. Nikodym[1]) nous savons seulement que si E est un F_σ, $a(E)$ est un ensemble (A), donc mesurable (L), et si E est un ensemble mesurable (B), ou, plus généralement, un ensemble (A), $a(E)$ est un ensemble projectif de M. Lusin de la classe $\leqslant 2$).

[1]) *Fund. Math.* t. VIII, p. 250.

Sur les ensembles complets d'un espace *(D)*.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème de M. F. Hausdorff[1]) tout ensemble G_δ d'un espace complet est un espace complet[2]). Le but de cette note est de démontrer par une voie directe une généralisation d'un théorème inverse. Nous prouverons notamment le suivant

Théorème[3]): *Si E est un ensemble complet, contenu dans un espace (D), M, l'ensemble E est un G_δ relativement à M.*

Démonstration. Soit E un ensemble complet, contenu dans un espace (D), M, et soit ϱ la distance entre les points de M. On peut donc définir, pour les éléments de E, une distance ϱ_1 fournissant dans E la même définition de convergence que la distance ϱ, et se prêtant à la généralisantion du critère de Cauchy.

Il existe donc, pour tout point p de E et tout nombre naturel n, un nombre positif $r_n(p) < \frac{1}{n}$, tel que les formules

$$q \,\varepsilon\, E, \quad \varrho(q, p) < r_n(p) \tag{1}$$

entraînent l'inégalité

$$\varrho_1(q \cdot p) < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 146.

[2]) On appelle, d'après M. Fréchet, *complet* un espace métrique pour lequel parmi les définitions de la distance qui fournissent la même définition de la convergence il y en a au moins une qui se prête à la généralisation du critère de Cauchy. Les espaces complets de M. Fréchet ne coïncident pas avec les „*Vollständige Räume*" de M. Hausdorff qui appelle ainsi les espaces métriques admettant la généralisation du critère de Cauchy. Pour qu'un espace (D) soit complet, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un „Vollständige Raum" de M. Hausdorff.

[3]) Cf. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 214, th. III.

Désignons, pour tout élément p de E et tout nombre naturel n, par $U_n(p)$ l'ensemble de tous les éléments q de l'espace M, tels que

$$\rho(q, p) < r_n(p) \tag{3}$$

et posons

$$G_\delta = \sum_{p \varepsilon E} U_n(p), \tag{4}$$

la sommation s'étendant à tous les éléments p de l'ensemble E. Les ensembles $U_n(p)$, donc aussi les ensembles (4), sont évidemment ouverts relativement à l'espace M: l'ensemble

$$\Gamma = G_1 G_2 G_3 \ldots \tag{5}$$

est donc un G_δ (relativement à M).

Il résulte de la définition des ensembles $U_n(p)$ que $p \varepsilon U_n(p)$ pour $p \varepsilon E$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (5), que $p \varepsilon \Gamma$ pour $p \varepsilon E$, ce qui donne $E \subset \Gamma$. Pour démontrer que l'ensemble E est un G_δ (relativement à M) il suffira donc prouver que $\Gamma \subset E$.

Soit donc p_0 un élément donné de l'ensemble Γ, et soit n un nombre naturel donné. D'après (5) nous avons $p_0 \varepsilon G_n$, d'où, d'après (4), nous concluons qu'il existe un élément p_n de E, tel que $p_0 \varepsilon U_n(p_n)$, ce qui donne, d'après la définition de l'ensemble $U_n(p)$:

$$\rho(p_0, p_n) < r_n(p_n), \tag{6}$$

d'où, d'après $r_n(p) < 1/n$ pour $p \varepsilon E$:

$$\rho(p_0, p_n) < \frac{1}{n} \tag{7}$$

et parsuite, le nombre naturel n étant quelconque:

$$p_0 = \lim_{n=\infty} p_n. \tag{8}$$

Soit maintenant ε un nombre positif donné quelconque. Choisissons le nombre naturel n de sorte qu'il soit $\frac{2}{n} < \varepsilon$. D'après (6) il existe un nombre naturel μ, tel que

$$\frac{1}{\mu} < r_n(p_n) - \rho(p_0, p_n). \tag{9}$$

Or, d'après (7) nous avons, pour k naturel:

$$\rho(p_k, p_n) \leqslant \rho(p_k, p_0) + \rho(p_0, p_n) < \frac{1}{k} + \rho(p_0, p_n),$$

d'où, d'après (9):

$$\rho(p_k, p_n) < r_n(p_n), \quad \text{pour} \quad k > \mu,$$

ce qui donne, d'après la définition du nombre $r_n(p_n)$ (et d'après $p_k \varepsilon E$):

$$\rho_1(p_k, p_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{pour} \quad k > \mu.$$

Il en résulte tout de suite que

$$\rho_1(p_k, p_l) \leqslant \rho_1(p_k, p_n) + \rho_1(p_n, p_l) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad \text{pour} \quad k > \mu, \quad l > \mu,$$

donc, d'après $\frac{2}{n} < \varepsilon$:

$$\rho_1(p_k, p_l) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad k > \mu,\ l > \mu. \tag{10}$$

La distance ρ_1 se prêtant à la généralisation du critère de Cauchy dans l'ensemble E, il résulte de l'inégalité (10) que la suite p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a une limite dans E. D'après (8) nous en concluons que $p_0 \varepsilon E$.

Nous avons ainsi démontré que la formule $p_0 \varepsilon \Gamma$ entraîne la formule $p_0 \varepsilon E$; ce qui prouve que $\Gamma \subset E$. c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré.