Sur les points linéairement accessibles des ensembles mesurables.

(Solution d'un problème de P. Urysohn).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Paul Urysohn a posé le problème, si l'ensemble de tous les points linéairement accessibles d'un ensemble plan mesurable (L) est toujours mesurable (L) [1]). Je prouverai, dans cette Note, que la réponse y est *négative*. Je démontrerai notamment, à l'aide de l'axiome de M. Zermelo, qu'*il existe un ensemble plan mesurable (L), dont tous les points linéairement accessibles forment un ensemble non mesurable (L).*

Dans ce but nous construirons d'abord (en utilisant le théorème de M. Zermelo) un ensemble plan H jouissant des propriétés suivantes:

1) H est situé dans un carré K, dont le côté est égal à *un*. 2) L'ensemble N de tous les points non accessibles linéairement de l'ensemble H est non mesurable (L) (superficiellement). 3) Tout point p du plan qui n'appartient pas à N est linéairement accessible de toutes les directions dans le complémentaire de H (c'est-à-dire sur chaque droite passant par p il existe un segment ouvert contenant p et ne contenant aucun point de H distinct de p).

Dans le vol. I de ce journal, p. 112, j'ai construit (à l'aide de l'axiome de M. Zermelo) un ensemble plan N non mesurable (L) superficiellement, ayant au plus deux points sur chaque droite du

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 337 (Problème 29).

plan. Nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble N est à l'intérieur du carré K [1]).

Soit Ω_0 le plus petit nombre ordinal de puissance du continu. L'ensemble de toutes les droites du plan ayant la puissance du continu, il résulte du théorème de M. Zermelo l'existence d'une suite transfinie du type Ω_0,

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_\omega, D_{\omega+1}, \ldots, D_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_0) \tag{1}$$

formée de toutes les droites (différentes) du plan.

Nous définirons maintenent par l'induction transfinie les ensembles M_α $(\alpha < \Omega_0)$ comme il suit.

Posons $M_0 = 0$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné > 0 et $< \Omega_0$, et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles au plus dénombrables M_ξ, où ξ est un nombre ordinal $\geqslant 0$ et $< \alpha$. Si $ND_\alpha = 0$, posons $M_\alpha = 0$. Si $ND_\alpha \neq 0$, il résulte de la propriété de l'ensemble N que l'ensemble ND_α contient seulement un point, p_α, ou deux points, p_α et q_α. Désignons par S_α la somme de tous les ensembles M_ξ, où $\xi < \alpha$: les ensembles M_ξ $(\xi < \alpha)$ étant, par hypothèse, au plus dénombrables et α étant un nombre ordinal $< \Omega_0$, S_α sera un ensemble de puissance inférieure à celle du continu. L'ensemble Π_α de toutes les droites du plan $\neq D_\alpha$ qui passent par deux points quelconques de l'ensemble S_α est donc aussi de puissance $< \mathfrak{c}$. L'ensemble de toutes les droites D_ξ, où $\xi < \alpha$, ayant aussi une puissance $< \mathfrak{c}$, on voit sans peine qu'il existe sur D_α un ensemble dense P_α de points n'appartenant à aucune de droites D_ξ, où $\xi < \alpha$, ni à aucune de droites de l'ensemble Π_α. Le point p_α (resp. q_α) étant intérieur à K (comme point de N), nous pouvons donc choisir dans $P_\alpha K$ une suite infinie de points convergeant sur la droite D de deux côté vers p_α, resp. deux suites, une convergeante (de deux côtés) ver p_α, et l'autre (de deux côtés) vers q_α (si ND_α contient deux points). Les points de cette suite (resp. de ces deux suites) forment l'ensemble M_α.

Les ensembles M_α sont ainsi définis par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega_0$. Posons

$$H = N + \sum_{\xi < \Omega_0} M_\xi. \tag{2}$$

Je dis que l'ensemble H jouit des propriétés 1), 2) et 3).

[1]) puisque tout ensemble plan non mesurable est non mesurable dans un carré (convenablement choisi) dont le côté est égal à *un*.

La propriété 1) est évidente.

Soit maintenant p un point de l'ensemble N, D—une droite quelconque, passant par p. La suite (1) étant formée de toutes les droites du plan, nous avons $D = D_\alpha$, où α est un nombre ordinal $< \Omega_0$. La droite D_α contenant le point p de N, nous avons $ND_\alpha \neq 0$, et il en résulte que $p = p_\alpha$, ou bien $p = q_\alpha$. Il s'en suit donc de la définition de l'ensemble $M_\alpha \subset H$ que la droite $D = D_\alpha$ contient une suite de points de H convergente sur la droite D_α de deux côtés vers p. La droite D pouvant être quelconque passant par le point p, nous avons démontré que p est un point non accessible de l'ensemble H. Donc, tout point de l'ensemble N est un point non accessible de l'ensemble H.

Pour prouver les propriétés 2) et 3) de l'ensemble H, il suffira évidemment de démontrer encore que tout point du plan qui n'appartient pas à l'ensemble N est accessible de toutes les directions dans le complémentaire de H.

Soit donc p un point du plan n'appartenant pas à N et soit D une droite quelconque passant par p. Nous avons donc $D = D_\alpha$, où α est un nombre ordinal $< \Omega_0$. D'aprés (2), nous avons

$$HD_\alpha = ND_\alpha + \sum_{\xi < \Omega_0} M_\xi D_\alpha. \tag{3}$$

D'après la définition des ensembles M_ξ, on a $M_\xi D_\alpha = 0$ pour $\xi > \alpha$. Or, on a $M_\xi \subset D_\xi$ pour tout nombre ordinal $\xi < \Omega_0$ et, les droites de la suite (1) étant toutes distinctes, $D_\xi D_\alpha$ contient au plus un point, si $\xi \neq \alpha$. L'ensemble $M_\xi D_\alpha \subset D_\xi D_\alpha$ contient donc au plus un point, si $\xi < \alpha$.

Je dis que l'ensemble

$$\sum_{\xi < \alpha} M_\xi D_\alpha$$

contient au plus deux points. Admettons le contraire, et soient λ, μ et ν trois nombres ordinaux, tels que

$$\lambda < \mu < \nu < \alpha \tag{4}$$

et

$$M_\lambda D_\alpha \neq 0, \quad M_\mu D_\alpha \neq 0, \quad M_\nu D_\alpha \neq 0. \tag{5}$$

D'après la définition des ensembles M_ξ, on a, pour $\lambda < \mu$: $M_\lambda \subset D_\lambda$, $M_\mu D_\lambda = 0$, donc $M_\lambda M_\mu = 0$. Or, on a, d'après (4), $\lambda + 1 \leqslant \nu$, $\mu + 1 \leqslant \nu$, donc $M_\lambda \subset S_{\lambda+1} \subset S_\nu$ et $M_\mu \subset S_\nu$. Il en résulte donc de (5) que M_ν a un point en commun avec la droite $D_\alpha \neq D_\nu$ qui passe par deux points de l'ensemble S_ν, donc avec une droite de l'ensemble Π_ν, ce qui est incompatible avec la définition de l'ensemble M_ν.

L'ensemble ND_α contenant au plus deux points (d'après la propriété de l'ensemble N), nous concluons donc que l'ensemble (3) ne diffère de l'ensemble $M_\alpha D_\alpha$ que par quatre points au plus. Or, l'ensemble $M_\alpha D_\alpha$, s'il n'est pas vide, a (d'après la définition de l'ensemble M_α) un ou deux points d'accumulation: p_α, resp. p_α et q_α qui, comme appartenant à N. sont distinct de p. Il en résulte que p ne peut être point d'accumulation de l'ensemble (3). Il existe donc sur la droite $D = D_\alpha$ un segment ouvert contenant p et ne contenant aucun point de l'ensemble H distinct de p. La droite D pouvant être quelconque passant par p, nous avons démontré que p est accessible de toutes les directions dans le complémentaire de H.

Les propriétés 1), 2) et 3) de l'ensemble H sont ainsi établies.

Dans le vol. X de ce journal, p. 117, M. Nikodym a construit un ensemble plan E jouissant de trois propriétés suivantes:

1°. E est situé dans le carré K, dont le côté est égal à *un*.

2°. E est mesurable (L), de mesure (superficielle) égale à *un*.

3°. Pour chaque point p de E il existe une droite qui a avec E un seul point commun, à savoir le point p.

Posons

$$Q = E + H:$$

l'ensemble Q est évidemment mesurable (L), de mesure superficielle $= 1$.

Désignons par $a(Q)$ l'ensemble de tous les points linéairement accessibles de l'ensemble Q. Il résulte sans peine des propriétés des ensembles E et H que

$$E \,.\, a(Q) = E - N. \tag{6}$$

Or, l'ensemble $N \subset K$ étant non mesurable (L) et la mesure de de l'ensemble $E \subset K$ étant égale à celle du carré K, on voit sans peine que l'ensemble $E - N$ est non mesurable (L), d'où résulte, d'après (6), que l'ensemble $a(Q)$ est non mesurable (L).

Nous avons ainsi démontré que Q est un ensemble plan mesurable (L), dont l'ensemble de tous les points linéairement accessibles est non mesurable (L).

Or, le problème suivant reste encore ouvert: *L'ensemble $a(E)$ de tous les points linéairement accessibles d'un ensemble plan E mesurable (B) est-il toujours mesurable (L)?* (D'après M. Nikodym[1]) nous savons seulement que si E est un F_σ, $a(E)$ est un ensemble (A), donc mesurable (L), et si E est un ensemble mesurable (B), ou, plus généralement, un ensemble (A), $a(E)$ est un ensemble projectif de M. Lusin de la classe $\leqslant 2$).

[1]) *Fund. Math.* t. VIII, p. 250.

Sur les ensembles complets d'un espace *(D)*.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème de M. F. Hausdorff[1]) tout ensemble G_δ d'un espace complet est un espace complet[2]). Le but de cette note est de démontrer par une voie directe une généralisation d'un théorème inverse. Nous prouverons notamment le suivant

Théorème[3]): *Si E est un ensemble complet, contenu dans un espace (D), M, l'ensemble E est un G_δ relativement à M.*

Démonstration. Soit E un ensemble complet, contenu dans un espace (D), M, et soit ϱ la distance entre les points de M. On peut donc définir, pour les éléments de E, une distance ϱ_1 fournissant dans E la même définition de convergence que la distance ϱ, et se prêtant à la généralisantion du critère de Cauchy.

Il existe donc, pour tout point p de E et tout nombre naturel n, un nombre positif $r_n(p) < \frac{1}{n}$, tel que les formules

$$(1) \qquad q \varepsilon E, \quad \varrho(q, p) < r_n(p)$$

entraînent l'inégalité

$$(2) \qquad \varrho_1(q. p) < \frac{1}{n}.$$

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 146.

[2]) On appelle, d'après M. Fréchet, *complet* un espace métrique pour lequel parmi les définitions de la distance qui fournissent la même définition de la convergence il y en a au moins une qui se prête à la généralisation du critère de Cauchy. Les espaces complets de M. Fréchet ne coïncident pas avec les *„Vollständige Räume"* de M. Hausdorff qui appelle ainsi les espaces métriques admettant la généralisation du critère de Cauchy. Pour qu'un espace (D) soit complet, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un „Vollständige Raum" de M. Hausdorff.

[3]) Cf. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 214, th. III.