Il existe une telle série, même à termes positifs, et même telle que la convergence de (2) soit absolue (p. p.).

En effet, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ étant une série convergente à termes positifs on peut déterminer une suite $\{n_i\}$ des entiers positifs croissants de manière que l'on ait

$$|\lambda_n(t)| < \varepsilon_i \quad \text{pour} \quad n > n_i,$$

à l'exception d'un ensemble E_i de mesure moindre que ε_i; soit $\{\delta_k\}$ une suite à termes positifs tendant vers zéro, définie comme il suit:

$$\delta_k = \varepsilon_i \text{ pour } n_i < k \leqslant n_{i+1}, \qquad \delta_k = 1 \text{ pour } k \leqslant n_1.$$

On détermine la série divergente à termes positifs $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ de manière que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_k$$

soit convergente, ce qui implique presque partout la convergence absolue de (2)

Néanmoins il existe une suite $\{\lambda_k(t)\}$ a termes mesurables (même positifs) tendant partout vers zéro telle que quelque soit la série divergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, la série (2) devient convergente dans certains points. Cela tient encore au fait que l'ensemble D de séries divergentes $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ est de la puissance du continu, de manière qu'il y a des ensembles linéaires (même de mesure nulle) qui sont des images biunivoques de D.

De même, si $\{\lambda_k(t)\}$ est une suite à termes mesurables tendant vers $+\infty$ presque partout, il existe une série numérique convergente (à termes positifs) qui rend (2) divergente *presque* partout. La restriction *presque* de la thèse est inamovible [1]). La question analogue pour les $\{\lambda_k(t)\}$ mesurables qui sont presque partout non bornés ne nous semble pas facile.

[1]) Voir [1]) p. 190.

Sur la relation $\lim\limits_{h_n \to 0} f(x+h_n) = f(x)$.

Par

H. Auerbach (Lwów).

M. Steinhaus a posé en 1925 le problème suivant: Etant donnée une fonction $f(x)$ mesurable dans l'intervalle δ et une suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro et d'ailleurs quelconque, peut on affirmer que la relation

$$\lim_{n \to \infty} f(x+h_n) = f(x)$$

a lieu dans presque tout [1]) point de δ?

M. Sierpiński a démontré sur un exemple (non publié) que la réponse est négative. En cherchant des propriétés caractéristiques des fonctions vérifiantes presque partout la relation ci-dessous j'ai obtenu les théorèmes faisants objet de la note présente.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle δ. Nous désignons par maximum essentiel $M(x)$ et minimum essentiel $m(x)$ deux fonctions définies comme les fonctions connues de Baire, mais en négligeant les ensembles de mesure nulle. Ces fonctions sont semicontinues, la prémière supérieurement, la seconde inférieurement et remplissent presque partout l'inégalité

$$m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x).$$

Leur définition est un cas particulier d'une définition générale donnée dans la „*Theorie der reellen Funktionen*" de M. Hahn, Vol. I.

[1]) Bien entendu l'ensemble de mesure nulle dans lequel la relation n'est pas remplie peut varier avec la suite $\{h_n\}$.

Chap. II, § 12., ou l'on trouve aussi démontrées les propriétés de $M(x)$ et $m(x)$ que nous venons d'énoncer.

Théorème 1. *$f(x)$ étant une fonction mesurable il existe une suite $\{h_n\}$, $h_n \neq 0$ et tendant vers zéro pour laquelle presque partout* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) = M(x)$.

Démonstration. Nous prouverons d'abord que r étant donné il existe une suite $\{h_n\}$, $h_n \neq 0$, tendant vers zéro et remplissant en presque tout point x de $E(M>r)$ l'inégalité $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \geqslant r$.

Soit x un point de densité 1 de l'ensemble $E(M>r)$. En vertu de la définition de $M(x)$ il existe un nombre $h \neq 0$ aussi petit qu'on le veut de manière que $x+h$ est un point de densité 1 de $E(f>r)$. Les points ξ de $E(M>r)$ tels que $\xi+h \subset E(f>r)$ forment un ensemble mesurable dont x est évidemment un point de densité 1.

On peut par conséquent à tout nombre naturel k et à tout point x de densité 1 de $E(M>r)$ faire corespondre un nombre $h_k(x)$ est une suite $\{F_n^k(x)\}$ des ensembles fermés de sorte que

1°. $0 < |h_k(x)| < \frac{1}{k}$,

2°. $F_n^k(x) \subset \left(x-\frac{1}{n},\, x+\frac{1}{n}\right)$,

3°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \operatorname{mes} F_n^k(x) = 1$,

4°. pour tout $\xi \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n^k(x)$ on a $f(\xi+h_k(x)) > r$.

D'après un théorème de M. Vitali à tout k naturel corresponde une somme finie Φ_k des ensembles $F_n^k(x)$ recouvrant l'ensemble $E(M>r)$ à un ensemble de mesure $<\frac{1}{k}$ près. Presque tout point de $E(M>r)$ appartient donc à l'ensemble $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \Phi_k$.

Considérons la suite des ensembles $F_n^k(x)$ formée en écrivant succesivement les ensembles de Φ_1, de Φ_2 etc. A chaque de ces ensembles corresponde un nombre $h_k(x)$ (appartenant au mêmes valeurs de x et k). Nous designerons ces nombres simplement par $h_1, h_2, h_3, \ldots$ Ils sont $\neq 0$ et tendent vers zéro, en vertu de 1°, chaque Φ_k ne contenant qu'un nombre fini des $F_n^k(x)$.

Par ce qui précède presque tout point de $E(M>r)$ est contenu dans une infinité des ensembles de la suite considerée et par conséquent, en vertu de 4°, satisfait à une infinité d'inégalités $f(x+h_n) > r$ donc aussi à l'inégalité $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \geqslant r$.

Cela posé désignons par $\{r_\nu\}$ un ensemble dénombrable partout dense et par $\{h_\nu^p\}$ une suite tendant vers zéro telle que $0 < |h_\nu^p| < \frac{1}{p}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ et que $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} f(x+h_\nu^p) \geqslant r_p$ dans presque tout point x de $E(M>r_p)$. Soit $\{h_n\}$ une suite formée par tous les h_ν^p rangés dans un ordre quelconque. Cette suite tend vers zéro et on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \geqslant r_p$ dans presque tout point de $E(M>r_p)$. Par conséquent $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \geqslant M(x)$ presque partout. On a d'autre part $f(x) \leqslant M(x)$ presque partout, donc aussi $f(x+h_n) \leqslant M(x+h_n)$ pour presque tout x et tout n, d'où, à cause de la semi-continuité supérieure de $M(x)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \leqslant M(x)$ presque partout.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante afin qu'une fonction mesurable $f(x)$ soit semicontinue supérieurement dans une épaisseur pleine de δ, est que l'on ait presque partout*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x+h_n) \leqslant f(x)$$

pour toute suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro.

Démonstration. Supposons que $f(x)$ est semicontinue supérieurement dans $\delta - N$, N étant de mesure nulle. Soit $\{h_n\}$ une suite quelconque tendant vers zéro. Désignons par N_n l'ensemble des points x tels que $x+h_n \subset N$. Les ensembles N_n sont de mesure nulle et on a dans $\delta-(N+\Sigma N_n)$ l'inégalité $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x+h_n) \leqslant f(x)$. La condition est donc nécessaire.

Si la condition est remplie alors, en vertu du théorème 1 et de l'inégalité $f(x) \leqslant M(x)$, il vient $f(x) = M(x)$ presque partout. La condition est donc suffisante.

Corollaire. La condition nécessaire et suffisante afin qu'une fonction mesurable $f(x)$ soit continue dans une épaisseur pleine de δ [1])

[1]) C'est-à-dire de la deuxième espèce de M. Carathéodory (*Vorlesungen über reelle Funktionen* p. 412)

est que l'on ait presque partout

$$\lim_{n\to\infty} f(x+h_n)=f(x).$$

pour toute suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro.

Une fonction mesurable ne satisfait pas donc en général à cette condition. Mais on a le

Théorème 3. *$f(x)$ étant une fonction finie*[1]) *et mesurable dans δ, il existe une suite $\{\eta_n\}$ à termes positifs, telle que presque partout*

$$\lim_{n\to\infty} f(x+h_n)=f(x)$$

pourvu que $|h_n|<\eta_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Démonstration. D'après un théorème fondamental de M. Lusin[2]) il existe dans δ un ensemble fermé F_n de mesure $>|\delta|-\frac{1}{n^2}$ dans lequel $f(x)$ est continue $(n=1,2,3,\ldots)$. La continuité étant uniforme il existe un $\eta_n>0$ de sorte que

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{1}{n},$$

pourvu que x et $x+h$ appartiennent à F_n et $|h|<\eta_n$.

Donnons à h une valeur fixe h_n $(|h_n|<\eta_n)$. L'ensemble des points x de F_n pour lesquels $x+h_n$ n'appartient pas à F_n étant évidemment de mesure $<\frac{1}{n^2}$, on a

$$|f(x+h_n)-f(x)|<\frac{1}{n}$$

dans un ensemble E_n $(\subset F_n)$ de mesure $>\delta-\frac{2}{n^2}$. Un raisonnement connu montre que presque tout point de δ appartient a l'ensemble $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$. On a donc presque partout $\lim_{n\to\infty} f(x+h_n)=f(x)$.

Exemple. Décomposons l'intervalle $(0,1)$ en un infinité dénombrable des ensembles E_n mesurables et de mesure positive aux environs du chaque point du cet intervalle et posons

$$f(x)=1-\frac{1}{n} \text{ dans } E_n \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

[1]) Le théorème est valable sans cette restriction.

[2]) Dont les démonstrations très simples ont été données par M. Sierpiński, *Fund. Math.* t. III, p. 320) et par M. Cohen, (*Fund. Math.* t. IX, p. 696).

La fonction $f(x)$ est mesurable et son maximum essentiel $M(x)\equiv 1$. D'après le théorème 1 il existe une suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro telle que $\overline{\lim}_{n\to\infty} f(x+h_n)=1$ presque partout. D'autre part la suite $\{f(x+h_n)\}$ contient, en vertu du théorème 3,, une suite partielle convergente presque partout vers $f(x)$.

La suite $\{f(x+h_n)\}$ est donc presque partout divergente, bien que les h_n tendent vers zéro.