Le crible de M. Lusin et l'opération (A) dans les espaces abstraits.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soit $\mathcal{F}$ une famille donnée quelconque d'ensembles. Si à tout système fini $n_1, n_2, \dots n_k$ de nombres naturels on a fait correspondre un ensemble $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de la famille $\mathcal{F}$, on dit qu'on a défini un *système déterminant* $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. On appelle *noyau* du système S l'ensemble

$$N = \Sigma E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \dots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$ On dit aussi que l'ensemble N est le résultat de l'opération *(A)* effectuée sur les ensembles du système S.

Désignons par $A(\mathcal{F})$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes $S\{E_{n_1, n_2, \dots n_k}\}$, où $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des ensembles de la famille $\mathcal{F}$[1]).

Désignons maintenant par R l'ensemble de tous les nombres rationnels r satisfaisant à l'inégalité $0 < r < 1$, et supposons qu'à tout nombre r de R on a fait correspondre un ensemble E_r de la famille $\mathcal{F}$. On obtient ainsi un système d'ensembles $\{E_r\}$. Désignons par $K\{E_r\}$ l'ensemble de tous les éléments p pour lesquels il existe au moins une suite infinie décroissante de nombres de R:

(1) $$r_1 > r_2 > r_3 > \dots,$$

telle que

(2) $$p \in E_{r_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

[1]) Ce sont les ensembles de Souslin, obtenus de la famille $\mathcal{F}$: cf. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 91.

On dit que l'ensemble $K\{E_r\}$ est dérivé du système $\{E_r\}$ par l'application du *crible*[1]).

Désignons par $K(\mathcal{F})$ la famille de tous les ensembles qui peuvent être dérivés par l'application du crible de systèmes $\{E_r\}$, où E_r sont des ensembles de la famille $\mathcal{F}$

Nous prouverons qu'*on a*

(3) $$K(\mathcal{F}) \subset A(\mathcal{F}),$$

quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles.

Soit E un ensemble appartenant à la famille $K(\mathcal{F})$. Il existe donc un système $\{E_r\}$, tel que $E = K\{E_r\}$, où E_r sont des ensembles de la famille $\mathcal{F}$. Soit

(4) $$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres de l'ensemble R.

Soit maintenant k un indice donné, et supposons (ce qui est vrai pour $k = 1$) que nous avons déjà défini les nombres $\varrho_{n_1, n_2, \dots n_k}$, où $n_1, n_2, \dots, n_k$ est un système quelconque de k nombres naturels. Le système d'indices $n_1, n_2, \dots, n_k$ étant donné, désignons par

$$\varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1}, \quad \varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2}, \quad \varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k, 3}, \quad \dots$$

les termes consécutifs de la suite (4) qui sont $< \varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (il y en a évidemment une infinité dans la suite (4).

Les nombres $\varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont ainsi définis par l'induction pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots n_k$. Posons

(5) $$E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E_{\varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k}}.$$

On voit sans peine que l'ensemble E est le noyau N du système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$.

En effet, si $p \in E$, il existe, d'après $E = K\{E_r\}$, une suite infinie (1) de nombres de R, telle qu'on a les formules (2). r_1 étant un nombre de R, il existe un indice n_1, tel que $r_1 = \varrho_{n_1}$. Or, de $r_1 > r_2$ et de la définition des nombres ϱ_{n_1, n_2} résulte qu'il existe un indice n_2, tel que $r_2 = \varrho_{n_1, n_2}$. Généralement, nous prouvons l'existence d'une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$, telle que

$$r_k = \varrho_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

[1]) Cf. N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 9—10.

ce qui donne, d'après (5):

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et prouve, d'après (2), que $p \in N$.

Or, soit $p \in N$. Il existe donc une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que $p \in E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (pour $k = 1, 2, \ldots$), donc, d'après (5):

$$p \in E_{\varrho_{n_1, n_2, \ldots n_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

Or, de la définition des nombres $\varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ résulte que

$$\varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} > \varrho_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots:$$

il résulte donc de (6) et de la définition de l'ensemble $K\{E_r\}$ que $p \in K\{E_r\}$.

Nous avons donc démontré que $E = N$. Il en résulte la formule (3).

Un système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est dit *régulier* si

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

pour tout système de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$.

Désignons par $A_r(\mathcal{F})$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes réguliers $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont des ensembles de la famille $\mathcal{F}$. On a alors la formule

$$(6) \qquad A_r(\mathcal{F}) \subset K(\mathcal{F}).$$

Cette formule a été établie dans le § 7 du mémoire *„Sur un ensemble non mesurable B"* que nous avons publié avec M. N. Lusin dans le *Journal de Mathématiques*, t. II (1923), p. 65—68. La proposition y est énoncée pour une famille $\mathcal{F}$ des ensembles fermés, mais aucune hypothèse sur la nature de ces ensembles n'intervient pas dans la demonstration.

Supposons maintenant que la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles jouit de la propriété suivante: tout produit de deux ensembles de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. Dans ce cas on a, comme on voit sans peine:

$$A(\mathcal{F}) = A_r(\mathcal{F})$$

et les formules (3) et (6) donnent:

$$A(\mathcal{F}) = K(\mathcal{F}).$$

Pour des telles familles $\mathcal{F}$ *l'étude du crible de M. Lusin est donc équivalente à celle de l'opération* (A).

Über eine topologische Eigenschaft der Ebene.

Von

Casimir Zarankiewicz (Warszawa).

Den Gegenstand dieser Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes, der sich wie auch alles weitere, auf Gebilde in der euklidischen Ebene (Zahlenebene) bezieht.

Satz 1. Voraussetzungen: 1° *Es seien G_1, G_2, G_3 drei fremde beschränkte Gebiete*[1]) *von denen jedes in der unbegrenzten Komponente des Komplements jedes anderen liegt*; 2° K_1, K_2, K_3 *drei fremde Kontinua*; 3° $G_i . K_j \neq 0$ *für jedes Paar der Indices i, j wo $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$.*

Behauptung: *Mindestens eines von den Kontinuen K_j zerschneidet*[2]) *mindestens eines der Gebieten G_i.*

Dem Beweise schicken wir einige Bemerkungen und Hilfssätze voraus.

Es seien zwei einfache geschlossene (ohne vielfache Punkte) Kurven C_1 und C_2 gegeben, von denen jede im Aussengebiet der anderen liegt, ferner auf C_1 drei Punkte a_1, b_1, c_1, sowie auf C_2 die Punkte a_2, b_2, c_2. Wenn es möglich ist die Punkte a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 mit zu einander fremden einfachen Bögen (arcs simples) zu verbinden derart, dass abgesehen von den Endpunkten sie im Aussengebiet der beiden Kurven liegen, so werden wir die Anordnung der Punkte $a_1 b_1 c_1$ auf C_1 als i n v e r s gegen die Anordnung $a_2 b_2 c_2$ auf C_2 bezeichnen. Im Falle wenn derartige Bögen nicht existieren, so werden wir die Anordnungen $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ als g l e i c h bezeichnen.

[1]) Unter einem G e b i e t versteht man eine zusammenhängende Punktmenge mit lauter inneren Punkten.

[2]) Eine abgeschlossene Menge K z e r s c h n e i d e t das Gebiet G, wenn $G - K$ nicht zusammenhängend ist.