Sur une question concernant la convergence de séries des fonctions.

Par

H. Steinhaus (Léopol = Lwów).

1. Un théorème dû à Abel garantit, quelle que soit la série divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

l'existence d'une suite $\{\lambda_k\}$ à termes tendant vers zéro, qui rend divergente la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

Soit $\{S_i\}$ une suite des séries divergentes

$$S_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik};$$

il est aisé à démontrer, qu'il existe une suite $\{\lambda_k\}$ indépendante de i, à termes tendant vers zéro, qui rend divergentes toutes les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{ik} \tag{i}$$

à la fois.

Pour le prouver il suffit d'appliquer les résultats d'un travail récent de MM Banach et Steinhaus [1]); en prenant pour do-

[1]) *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. IX, (1926).

maine l'ensemble des suites $x = \{\lambda_k\}$ à termes tendant vers zéro, en définissant la norme de x par

$$\|x\| = \text{maximum de } |\lambda_k| \quad (1 \leqslant k < \infty)$$

et en considérant les fonctionnelles linéaires

$$u_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} a_{pk} \lambda_k$$

à contredomaine composé de nombres réels, on voit que à tout p il correspond un x_p (à savoir la suite $\{\lambda_k^{(p)}\}$ dont l'existence est garantie par le théorème d'Abel) qui rend divergente la suite

$$\{u_{pq}(x_p)\}_{q \to \infty}$$

Le théorème II du travail cité permet de conclure qu'il existe un x qui rend divergentes toutes les suites

$$\{u_{pq}(x)\}_{q \to \infty} \tag{p}$$

à la fois. Une démonstration indépendante est aussi facile.

2. Ayant appris ce qui précède, M. Ruziewicz a posé la question: peut on considérer i comme un paramètre dont les valeurs possibles sont en nombre $\mathfrak{c}$ = puissance du continu? En d'autres mots il demande, si à toute série des fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \tag{1}$$

divergente pour tout t de l'intervalle $<0, 1>$ il correspond une suite numérique $\{\lambda_k\}$ à termes tendant vers zéro qui rend la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t) \tag{2}$$

divergente dans tout l'intervalle $<0, 1>$.

Nous allons donner une réponse négative à cette question en donnant l'exemple d'une série (1) à termes mesurables qui est divergente pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que à toute suite $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}$, $\lambda_k \to 0$ il correspond un t_Λ de $<0, 1>$ qui fait converger (2) pour $t = t_\Lambda$.

Exemple. Soit E un ensemble de la puissance du continu et de mesure linéaire nulle situé dans $<0, 1>$. Tous les Λ formant un ensemble de la puissance du continu on peut établir une correspondance biunivoque entre les A et les points de E. Soit t_A l'image de A dans E. D'après un théorème classique on peut déterminer une série *divergente* (même à termes positifs),

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(A)}$$

telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^{(A)}$ soit *convergente* (même absolument). Définissons alors $a_k(t)$ comme il suit

$$a_k(t) = a_k^{(A)} \quad \text{pour } t = t_A$$

$$a_k(t) = \frac{1}{k} \quad \text{pour } t \text{ étranger à } E.$$

On voit immédiatement que

1°) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)$ est divergente pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

2°) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$ est convergente pour $t = t_A$

3°) les fonctions $a_k(t)$ sont mesurables, car $a_k(t) = \frac{1}{k}$ presque partout dans $<0, 1>$.

On voit aussi que les $a_k(t)$ sont positifs presque partout; on peut d'ailleurs les définir de manière qu'ils soient positifs partout dans $<0\,1>$.

3. En considérant la série (1) de l'exemple précédant et la suite particulière

$$\lambda_k = \frac{1}{\log(k+1)}$$

on vérifie la divergence de $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$ *presque partout*. L'existence d'une telle suite $\{\lambda_k\}$ aurait pu être prévue en vertu du théorème suivant:

Théorème. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)$ est une série divergente presque partout les $a_k(t)$ étant mesurables et presque partout nonnégatifs, alors il existe une suite numérique $\{\lambda_k\}$ a termes tendant vers zéro qui rend la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\ a_k(t) \qquad <0\,1>$$

divergente *presque partout*

Démonstration. Soit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ une série numérique convergente à termes positifs. On détermine les entiers positifs $\{n_i\}$ de proche en proche comme il suit

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k(t) \geqslant 1 \quad \text{dans} <0\,1>$$

à l'exception des t formant un ensemble E_1 de mesure moindre que ε_1; $(|E_1| < \varepsilon_1)$; en général, pour $i = 1, 2 \ldots$:

$$n_{i+1} > n_i, \quad \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k(t) \geqslant i+1$$

à l'exception de E_{i+1}, $|E_{i+1}| < \varepsilon_{i+1}$. Les hypothèses du théorème impliquent l'existence d'une telle suite $\{n_i\}$. On définit maintenant $\{\lambda_k\}$ en posant

$$\lambda_k = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1$$

$$\lambda_k = \frac{1}{i+1} \quad \text{pour} \quad n_i + 1 \leqslant k \leqslant n_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Avec ces définitions on voit que $\lambda_k \to 0$ et que

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+j}} \lambda_k a_k(t) \geqslant j$$

pour tous les t de $<0\,1>$ à l'exception de l'ensemble

$$\sum_{k=1}^{k=j} E_{i+k}$$

qui est contenu dans $F_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} E_k$; on aura donc

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \lambda_k a_k(t) = \infty$$

si t n'appartient pas à F_i et a fortiori

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t) = \infty.$$

La mesure de F_i étant moindre que $\sum\limits_{i+1}^{\infty} \varepsilon_k$ le théorème est démontré, car i est arbitraire et $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{i+1}^{\infty} \varepsilon_k = 0$.

On a vu par l'exemple précédant. que la restriction „presque partout" de la thèse du théorème ne saurait être supprimée [1]). D'autre part la suppression de l'hypothèse qui exige que les $a_k(t)$ soient nonnégatifs engendre un problème dont nous ne connaissons pas la solution.

4. En prenant comme point de départ le théorème classique „quelque soit la série convergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, il existe une suite $\{\lambda_k\}$ a' termes tendant vers $+\infty$, qui rend convergente la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$". on obtient les résultats suivants:

a) Il existe une série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(t)$ à termes mesurables (même positifs), convergente dans $<0\ 1>$ et telle que à toute suite $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}$, $\lambda_k \to +\infty$, il correspond un $t = t_\Lambda$ qui rend divergente la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$ (même franchement divergente vers $+\infty$). Pour le démontrer on établit une correspondance biunivoque entre un ensemble E de la puissance du continu et de mesure nulle et l'ensemble des Λ. On définit ensuite

$$a_k(t) = \frac{1}{k^2} \quad \text{pour} \quad t \,\varepsilon\, [<0\ 1> - E]$$

$$a_k(t) = a_k^{(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad t = t_\Lambda,$$

si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{(\Lambda)}$ est la série convergente (à termes positifs), qui correspond à la suite Λ de manière que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^{(\Lambda)}$ soit divergente; c'est encore un théorème classique qui garantit l'existence d'une telle série.

b) Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(t)$ est une série presque partout convergente à termes mesurables, il existe une suite $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \to \infty$ qui rend la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$ presque partout convergente.

En effet. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ étant une série convergente à termes positifs, on peut déterminer la suite croissante des entiers positifs $\{n_i\}$ de manière que l'on ait

[1]) Même si on la supprimait aussi dans l'hypothèse.

$$\left| \sum_{k=m}^{k=p} a_k(t) \right| < \frac{1}{i^3} \quad \text{pour} \quad m > n_i, \ p > n_i$$

et pour tous les t de $<0\ 1>$ à l'exception d'un ensemble E_i de mesure moindre que ε_i. Définissons:

$$\lambda_k = i \quad \text{pour} \quad n_i < k \leqslant n_{i+1}; \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

Je dis que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$$

est convergente presque partout; en effet pour $m > n_i$, $p > n_i$ on aura

$$\left| \sum_{k=m}^{k=p} \lambda_k a_k(t) \right| \leqslant \left| \sum_{k=m}^{n_{i+1}} \right| + \left| \sum_{k=n_{i+1}+1}^{n_{i+2}} \right| + \ldots + \left| \sum_{k=n_{i+j-1}+1}^{n_{i+j}} \right| + \left| \sum_{k=n_{i+j}+1}^{p} \right|$$

si j est determiné par les inégalités

$$n_{i+j} < p \leqslant n_{i+j+1}.$$

Il s'ensuit que pour tous les t n'appartenant pas à l'ensemble $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ on aura

$$\left| \sum_{k=m}^{k=p} \lambda_k a_k(t) \right| \leqslant \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(i+j)^2} < \frac{1}{i-1}$$

$$\text{pour} \quad m > n_i, \ p > n_i, \ i > 1,$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(t)$ à l'exception d'un ensemble de mesure si petite que l'on veut, donc presque partout; λ_k tendant vers ∞ tout est démontré.

5. Les deux théorèmes classiques dont nous nous sommes servis [1]) donnent lieu aux questions suivantes:

Si $\{\lambda_k(t)\}$ est une suite à termes mesurables tendant vers zéro presque partout, existe-il une série numérique divergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ qui rend la série

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k(t)$$

convergente presque partout?

[1]) Voir 2 et 4 a)

Il existe une telle série, même à termes positifs, et même telle que la convergence de (2) soit absolue (p. p.).

En effet, $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ étant une série convergente à termes positifs on peut déterminer une suite $\{n_i\}$ des entiers positifs croissants de manière que l'on ait

$$|\lambda_n(t)| < \varepsilon_i \quad \text{pour} \quad n > n_i,$$

à l'exception d'un ensemble E_i de mesure moindre que ε_i; soit $\{\delta_k\}$ une suite à termes positifs tendant vers zéro, définie comme il suit:

$$\delta_k = \varepsilon_i \text{ pour } n_i < k \leqslant n_{i+1}, \qquad \delta_k = 1 \text{ pour } k \leqslant n_1.$$

On détermine la série divergente à termes positifs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de manière que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_k$$

soit convergente, ce qui implique presque partout la convergence absolue de (2)

Néanmoins il existe une suite $\{\lambda_k(t)\}$ a termes mesurables (même positifs) tendant partout vers zéro telle que quelque soit la série divergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, la série (2) devient convergente dans certains points. Cela tient encore au fait que l'ensemble D de séries divergentes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est de la puissance du continu, de manière qu'il y a des ensembles linéaires (même de mesure nulle) qui sont des images biunivoques de D.

De même, si $\{\lambda_k(t)\}$ est une suite à termes mesurables tendant vers $+\infty$ presque partout, il existe une série numérique convergente (à termes positifs) qui rend (2) divergente *presque* partout. La restriction *presque* de la thèse est inamovible [1]). La question analogue pour les $\{\lambda_k(t)\}$ mesurables qui sont presque partout non bornés ne nous semble pas facile.

[1]) Voir [1]) p. 190.

Sur la relation $\lim\limits_{h_n \to 0} f(x+h_n) = f(x)$.

Par

H. Auerbach (Lwów).

M. Steinhaus a posé en 1925 le problème suivant: Etant donnée une fonction $f(x)$ mesurable dans l'intervalle δ et une suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro et d'ailleurs quelconque, peut on affirmer que la relation

$$\lim_{n \to \infty} f(x+h_n) = f(x)$$

a lieu dans presque tout [1]) point de δ?

M. Sierpiński a démontré sur un exemple (non publié) que la réponse est négative. En cherchant des propriétés caractéristiques des fonctions vérifiantes presque partout la relation ci-dessous j'ai obtenu les. théorèmes faisants objet de la note présente.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle δ. Nous désignons par maximum essentiel $M(x)$ et minimum essentiel $m(x)$ deux fonctions définies comme les fonctions connues de Baire, mais en négligeant les ensembles de mesure nulle. Ces fonctions sont semicontinues, la prémière supérieurement, la seconde inférieurement et remplissent presque partout l'inégalité

$$m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x).$$

Leur définition est un cas particulier d'une définition générale donnée dans la „*Theorie der reellen Funktionen*" de M. Hahn, Vol. I.

[1]) Bien entendu l'ensemble de mesure nulle dans lequel la relation n'est pas remplie peut varier avec la suite $\{h_n\}$.