$$(2) \qquad n_k > k \sum_{i=1}^{k-1} x_i \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

où $n_i = Ex_i$.

Posons, pour chaque $n$ de la forme $n_k + i$ $(i = 1, 2, \ldots, n_k)$, $f_n(x) = x_k$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n_k}, \frac{i}{n_k}\right)$ et $= 0$ partout d'ailleurs. Si $n$ n'est pas de la forme précédente, on posera identiquement $f_n(x) = 0$. On voit de suite que, dans ce dernier cas

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx = 0,$$

et, dans le premier, pour $n = n_k + i$ $(i = 1, 2, \ldots n_k)$ on a:

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx = \frac{i}{n_k} g(x_k) \leqslant 2 \frac{g(x_k)}{x_k}.$$

On a donc d'après (1):

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 g(f_n)\, dx = 0.$$

Envisageons, à son tour, la suite de $\{\sigma_n\}$ On a, en vertu de (2) pour tout $k$ et tout $x$ de l'intervalle $0, 1)$:

$$\sigma_{n_k} \leqslant \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leqslant \frac{1}{k}, \quad \text{et:} \quad \sigma_{2n_k} \geqslant \frac{x_k}{2n_k} \geqslant \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que la suite $\{\sigma_n\}$ ne converge pas en mesure.

Réciproquement. Envisageons la suite

$$f_n(x) = \cos nx,$$

et posons $g(x) = |x|$. On voit, que

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_n|\, dx \to 0,$$

pendant qu'il n'existe pas une fonction $g_1(x)$ de la classe $(N)$, telle qu'on ait

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g_1(f_n)\, dx \to 0.$$

En effet, la suite $f_n(x)$ n'est pas convergente en mesure.

---

# Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

## § 1. Propriétés générales.

**1.** Définition I. *Une famille d'ensembles (non vides) $H$ présente une décomposition semi continue*[1]) *d'un espace métrique compact $E$, lorsque 1°: $E$ est la somme des ensembles de la famille $H$, 2°: ces ensembles sont disjoints deux à deux, 3°: étant donnée une suite convergente*[2]) *d'ensembles appartenant à $H$. il existe dans $H$ un ensemble qui contient la limite de cette suite.*

[1]) M. R. L. Moore appelle la famille $H$ „upper semi-continuous collection"; voir „*Concerning upper semi-continuous collections of continua which do not separate a given set*, Proc. Nat. Acad. Sc. 10 (1924), pp. 356—360, et *Concerning upper semi-continuous collections of continua*, Trans Amer. Math Soc 27 (192 ), pp. 416—428. M. P. Alexandroff emploie dans le même sens le terme „stetige Zerlegung"; voir *Ueber stetige Abbildungen kompakter Räume*, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 28 (1925, pp. 997—999, et Math. Ann. 96 (1926), pp. 555—571. D'accord avec M. Vietoris je réserve le terme „décomposition continue" pour le cas où une décomposition semi-continue est assujettie à des conditions supplémentaires (précisées au § 2). Voir L Vietoris *Ueber stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 29 (1926), pp. 443—453. M. Denjoy (Journ. de Math. 7, 1, 1915) emploie le terme famille semi-fermée supérieurement dans un sens analogue, mais sans la restriction 2°.

[2]) Une suite d'ensembles $\{X_n\}$ *converge* vers la limite $\operatorname{Lim} X_n$ lorsque $\operatorname{Lim\,inf} X_n = \operatorname{Lim\,sup} X_n$. $\operatorname{Lim\,inf} X_n$ est défini comme l'ensemble de tous les points $p$ pour lesquels il existe une suite $\{p_n\}$ telle que $p_n \varepsilon X_n$ et $\lim p_n = p$. Un point $p$ appartient à $\operatorname{Lim\,sup} X_n$, lorsqu'il existe une suite d'entiers croissants $\{k_n\}$ telle que $p \varepsilon \operatorname{Lim\,inf} X_{k_n}$. Ces notions sont dues à M. Painlevé. Cf. aussi „ensemble limite" et d'„accumulation" de Janiszewski (Thèse) et „unterer (oberer) abgeschlossene Limes" de M. Hausdorff (*Mengenlehre*, Berlin 1927, p. 146).

**Exemples.** Si l'on considère comme parties d'un ensemble fermé et borné $E$, situé sur le plan $(x, y)$, les intersections de $E$ avec les droites parallèles à l'axe des $y$, la décomposition de $E$ est semi-continue. Les décompositions suivantes (auxquelles nous aurons recours au § 3) sont semi-continues: la décomposition d'un ensemble fermé et borné (non-continu) en composantes, la décomposition d'un continu borné (non-jordanien) en »Primteile« au sens de M. Hahn, la décomposition d'un continu borné irréductible entre deux points en „tranches" au sens établi dans la II$^{me}$ partie de ma *Théorie des continus irréductibles* (Fund. Math. X).

2. Nous établirons au préalable quelques formules concernant les limites inférieures et supérieures d'une suite d'ensembles $X_n$ arbitraires (situés dans un espace métrique compact):

(1) $\qquad \mathrm{Lim\,inf}\, X_n \subset \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,sup}\, X_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,sup}\, X_n$

(2) $\qquad \mathrm{Lim\,inf}\, X_n = \Pi\, \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} = \Pi\, \mathrm{Lim\,sup}\, X_{k_n} = \Pi'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n}$

(3) $\qquad \mathrm{Lim\,sup}\, X_n = \Sigma\, \mathrm{Lim\,sup}\, X_{k_n} = \Sigma\, \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} = \Sigma'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n}$

où $\{k_n\}$ désigne une suite quelconque d'entiers croissants et la sommation $\Sigma$ s'étend à toutes les suites $\{k_n\}$, tandisque $\Sigma'$ ne comprend que les suites $\{X_{k_n}\}$ convergentes; les symboles $\Pi$ et $\Pi'$ ont un sens analogue.

La démonstration de la formule (1) est immédiate [1]). Afin d'établir la formule (2), supposons que $p$ non-$\varepsilon\, \mathrm{Lim\,inf}\, X_n$. Par définition de limite inférieure il existe une sphère (ouverte) $R$ et une suite $\{k_n\}$ telle que $R X_{k_n} = 0$. La suite $\{X_{k_n}\}$ contient une suite convergente $\{X_{k_{n_i}}\}$ [2]). Donc $p$ non-$\varepsilon \lim\limits_{i=\infty} X_{k_{n_i}}$, d'où $p$ non-$\varepsilon\, \Pi'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n}$. Il en résulte que $\Pi'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,inf}\, X_n$.

En rapprochant cette inclusion de la formule évidente (cf. (1)):

$$\mathrm{Lim\,inf}\, X_n \subset \Pi\, \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} \subset \Pi\, \mathrm{Lim\,sup}\, X_{k_n} \subset \Pi'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n},$$

on en déduit (2).

La formule (3) s'obtient d'une façon analogue: Supposons que $p \varepsilon \mathrm{Lim\,sup}\, X_n$. Il existe donc une suite $\{k_n\}$ telle que $p \varepsilon \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n}$.

[1]) Voir, p. ex. Hausdorff, ibid. p. 147.

[2]) En vertu de la proposition générale suivante: toute suite d'ensembles contient une suite convergente. Voir: Hausdorff, ibid., C. Zarankiewicz, Fund. Math. IX, théor I, Lubben, Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926), p. 14. Cette proposition peut être aussi déduite du fait que, étant donnée une suite d'ensembles $\{X_n\}$, la propriété d'être Lim sup d'une suite extraite de $\{X_n\}$ est „inductive" au sens de M. Brouwer.



Or, soit $\{X_{k_{n_i}}\}$ une suite convergente. Il vient $p \varepsilon \lim\limits_{i=\infty} X_{k_{n_i}}$, puisque, selon (1), $\mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_{n_i}}$.

Il est donc établi que $\mathrm{Lim\,sup}\, X_n \subset \Sigma'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n}$, d'où découle (3) en vertu des inclusions évidentes:

$$\Sigma'\, \mathrm{Lim}\, X_{k_n} \subset \Sigma\, \mathrm{Lim\,inf}\, X_{k_n} \subset \Sigma\, \mathrm{Lim\,sup}\, X_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,sup}\, X_n.$$

**Théorème I.** *La définition I équivaut à la définition qui s'en obtient en remplaçant la condition 3° par la suivante: quelle que soit la suite $T, T_1, T_2, \ldots$ d'ensembles de $\boldsymbol{H}$, l'inégalité*

(4) $\qquad T . \mathrm{Lim\,inf}\, T_n \neq 0$

*entraîne l'inclusion*

(5) $\qquad \mathrm{Lim\,sup}\, T_n \subset T.$

Démonstration. Evidemment, si l'on admet que (4) entraîne (5), la condition 3° est réalisée.

Supposons, d'autre part, les conditions 3° et (4) remplies. Il s'agit de prouver l'inclusion (5). Or, d'après (1), si $\{T_{k_n}\}$ est une suite convergente, on a $\mathrm{Lim\,inf}\, T_n \subset \mathrm{Lim}\, T_{k_n}$ et il vient, en raison de (4): $T . \mathrm{Lim}\, T_{k_n} \neq 0$, donc conformément à 3°: $\mathrm{Lim}\, T_{k_n} \subset T$ et en définitive, selon (3):

$$\mathrm{Lim\,sup}\, T_n = \Sigma'\, \mathrm{Lim}\, T_{k_n} \subset T.$$

3. Etant donnée une famille d'ensembles $\boldsymbol{H}$ qui présente une décomposition semi-continue d'un espace compact $E$, chacun de ces ensembles sera nommé *tranche* de $E$.

Toute tranche est un ensemble *fermé*, car en posant: $T = T_1 = T_2 = \ldots$, on a $\mathrm{Lim}\, T_n = \overline{T}$ et, en vertu de 3°: $\mathrm{Lim}\, T_n \subset T$. Donc $T = \overline{T}$.

La famille $\boldsymbol{H}$ sera nommée *hyper-espace* de la décomposition (les tranches formant ses points). Cette dénomination est basée sur la définition suivante:

Définition II. *Une suite de tranches $\{T_n\}$ est dite convergente dans l'hyper-espace* [1]) *vers la tranche $T$, lorsque l'inclusion (5) est remplie.*

Les notions de famille fermée et ouverte dérivent d'une façon

[1]) Il ne faut pas confondre la »convergence dans l'hyper-espace« avec la convergence habituelle (dans l'espace), qui signifie que $\mathrm{Lim}\, T_n = T$ (Voir § 2, corollaire du théor. V).

naturelle de la déf. II. On prouve[1]) que pour qu'une famille de tranches soit fermée (ouverte) dans l'hyper-espace, il faut et il suffit que la somme des tranches de cette famille soit un ensemble fermé (ouvert) dans l'espace. Puis on prouve que l'hyper-espace, ainsi conçu, est un espace métrique[2]) compact, donc[3]) qu'il est homéomorphe à un ensemble fermé et borné situé dans l'espace Cartésien à un nombre fini ou infini (espace Hilbertien) de dimensions.

Le théorème suivant concerne une opération qui conduit à la décomposition semi-continue. Nous en conclurons que l'hyper-espace est une image continue de l'espace.

**Théorème II.** *Etant donnée une fonction $T(x)$[4]) qui à tout élément $x$ d'un espace métrique compact $M$ fait correspondre un sous-ensemble non-vide $T(x)$ d'un espace métrique compact $E$ de façon que:*

(6) $$E = \sum_{x \varepsilon M} T(x)$$

(7) si $x \neq x'$, on a $T(x) . T(x') = 0$

(8) si $\lim x_n = x$, on a $\operatorname{Lim\,sup} T(x_n) \subset T(x)$,

*la décomposition (6) est semi-continue. En outre, la fonction $T(x)$ établit une homéomorphie entre $M$ et l'hyper-espace $\boldsymbol{H}$ de cette décomposition.*

Démonstration. Soient $\{x_n\}$ une suite extraite de $M$ et $x$ un élément de $M$ tel qu'en posant: $T(x_n) = T_n$ et $T(x) = T$, on satisfait à l'inégalité (4). Il s'agit, conformément au théor. I, d'établir l'inclusion (5). En vertu de (8), il suffit de prouver l'égalité

(9) $$\lim x_n = x.$$

Cela revient a dire que, si $\{x_{k_n}\}$ est une suite convergente extraite de $\{x_n\}$ et

(10) $$\lim x_{k_n} = x',$$

on a

(11) $$x' = x.$$

[1]) Voir les ouvrages cités de M. Alexandroff, où se trouvent aussi le corollaire du théor. II et le théor. III.

[2]) La distance entre deux tranches dans l'hyper-espace ne coïncide pas, en général, avec la distance entre deux ensembles, au sens de M. Hausdorff.

[3]) D'après un théorème de Urysohn (Voir *C. R.* 178, 1924).

[4]) Cf. les fonctions »supra-continues« de M. W. A. Wilson, Amer. Journal Math. 48 (1926), p. 164.



Or les formules (1), (10) et (8) donnent: $\operatorname{Lim\,inf} T_n \subset \operatorname{Lim\,sup} T_{k_n} \subset T(x')$. Il en résulte, selon (4), que $T . T(x') \neq 0$, ce qui entraîne (11) en vertu de (7).

La semi-continuité de la décomposition (6) est donc établie.

De plus, la fonction $T(x)$ est continue, conformément à la condition (8) et à la définition II. Elle est, en même temps, selon (7), biunivoque. Il en résulte que ($M$ étant compact) cette fonction est bicontinue, c. à d. qu'elle établit une homéomorphie entre $M$ et $\boldsymbol{H}$. En d'autres termes: les formules (5) et (9) sont équivalentes.

**Corollaire.** *Etant donnée une fonction continue $f(p)$ qui transforme un espace (métrique compact) $E$ en un ensemble $\boldsymbol{M}$ et $T(x)$ désignant la fonction inverse*[1]) *à $f$, la décomposition (6) est semi-continue et son hyper-espace est homéomorphe à $M$*[2]).

Réciproquement, on a le théorème suivant:

**Théorème III.** *L'hyper espace est une image continue de l'espace.*

Plus précisément: *la fonction $f(p)$ définie par la formule $p \varepsilon f(p) \varepsilon \boldsymbol{H}$ transforme $E$ en $\boldsymbol{H}$ d'une façon continue.*

Démonstration. Supposons que $\lim p_n = p$ et posons $f(p_n) = T_n$ et $f(p) = T$. L'inégalité (4) est donc satisfaite et, en raison de la semi-continuité, l'inclusion (5) en résulte. Mais cette inclusion signifie, selon la déf II, que les tranches $T_n$ convergent dans l'hyper-espace vers $T$; la continuité de la fonction $f(p)$ est ainsi établie.

La corollaire du théor. II et le théor III mettent bien en évidence la liaison entre la théorie de décomposition semi-continue et l'étude des fonctions continues.

**4.** $\boldsymbol{X}$ étant une famille arbitraire de tranches, nous désignons par $S(\boldsymbol{X})$ la somme de toutes les tranches de cette famille. Autrement dit, si $f(p)$ désigne, comme dans le théor. III, la tranche qui contient le point $p$ et si $T(x)$ est la fonction inverse à $f$, on a

$$S(\boldsymbol{X}) = \sum_{x \varepsilon X} T(x).$$

[1]) C. à d. $T(x)$ désigne, pour tout $x \varepsilon M$, l'ensemble de tous les $p$ tels que $f(p) = x$.

[2]) L'intéressante remarque suivante, due à M. Alexandroff, s'y rattache: Nous avons vu que l'hyper-espace est métrique et compact. Or, si l'on considère comme espace $E$ l'ensemble linéaire non-dense de Cantor, son hyper-espace peut être un espace métrique compact *le plus général*. Cela résulte de l'existence d'une fonction „péanienne généralisée" qui transforme de façon continue l'ensemble de Cantor en un espace métrique compact, donné d'avance (Hausdorff, l. c. p. 197).

Nous réunissons dans le théorème qui suit les propriétés élémentaires de la fonction $S(\boldsymbol{X})$:

**Théorème IV.**

1°. $S(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = S(\boldsymbol{X}) + S(\boldsymbol{Y})$,

2°. $S(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}) = S(\boldsymbol{X}) . S(\boldsymbol{Y})$,

3°. $S(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}) = S(\boldsymbol{X}) - S(\boldsymbol{Y})$,

4°. $S(\boldsymbol{H}) = E$,

5°. *l'égalité* $S(\boldsymbol{X}) = 0$ *équivaut à:* $\boldsymbol{X} = 0$,

6°. $\boldsymbol{X}$ *est une image continue de* $S(\boldsymbol{X})$,

7°. $\overline{S(\boldsymbol{X})} \subset S(\overline{\boldsymbol{X}})$,

8°. *pour que* $\boldsymbol{X}$ *soit fermé (ouvert), il faut et il suffit que* $S(\boldsymbol{X})$ *le soit*,

9° *l'égalité* $\overline{S(\boldsymbol{X})} . S(\boldsymbol{Y}) = 0$ *équivaut à:* $\overline{\boldsymbol{X}} . \boldsymbol{Y} = 0$.

Démonstration. La démonstration des propositions 1° — 5° est immédiate. La proposition 6° résulte directement du théor. III. Pour établir 7° il suffit de prouver que les hypothèses: $p = \lim p_n$, $p \varepsilon T$ et $p_n \varepsilon T_n \varepsilon \boldsymbol{X}$ entraînent $T \varepsilon \overline{\boldsymbol{X}}$ Or, l'inégalité (4) est évidemment remplie, d'où résulte l'inclusion (5), qui selon la définition II donne $T \varepsilon \overline{\boldsymbol{X}}$

Si l'on suppose que $\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}}$, on conclut de 7° que $\overline{S(\boldsymbol{X})} = S(\boldsymbol{X})$.

Inversement, si l'on suppose $S(\boldsymbol{X})$ fermé, $\boldsymbol{X}$ l'est aussi, en vertu de 6°.

Pour que $\boldsymbol{X}$ soit ouvert, il faut et il suffit que $\boldsymbol{H}-\boldsymbol{X}$ soit fermé, donc que $S(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{X})$ le soit, c'est-à dire (selon 3° et 4°) que $S(\boldsymbol{X})$ soit ouvert.

La proposition 8° est donc établie. Passons à 9°.

Supposons que $\overline{\boldsymbol{X}} . \boldsymbol{Y} \neq 0$.

Il existe donc une suite de tranches $T, T_1, T_2, \dots$ assujettie à la condition (5) et telle que $T_n \varepsilon \boldsymbol{X}$ et $T \varepsilon \boldsymbol{Y}$. L'inclusion (5) entraîne: $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} T_n} . T \neq 0$, d'où $\overline{S(\boldsymbol{X})} . S(\boldsymbol{Y}) \neq 0$.

D'autre part, si l'on suppose que $\overline{\boldsymbol{X}} . \boldsymbol{Y} = 0$, il vient selon 2° et 5° $S(\overline{\boldsymbol{X}}) . S(\boldsymbol{Y}) = 0$, d'où, en raison de 7°: $\overline{S(\boldsymbol{X})} . S(\boldsymbol{Y}) = 0$.

Notre théorème est donc démontré complètement.

## § 2. Les tranches de continuité.

**5. Définition III.** *Une tranche $T$ est dite tranche de continuité, lorsque l'inégalité*

(12) $$T . \mathrm{Lim}\, T_n \neq 0.$$



*entraîne l'égalité*

(13) $$T = \mathrm{Lim}\, T_n.$$

**Exemples.** La décomposition du carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en segments verticaux est une décomposition continue: toutes ses tranch s sont des tranches de continuité.

Un simple exemple d'une tranche de discontinuité est fourni par la décomposition suivante: $E$ se compose du segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ et des points $1 + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$, chacun de ces points formant une tranche; le segment, considéré comme tranche, est une tranche de discontinuité.

Considérons encore l'exemple suivant. Soit $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, une fonction continue réelle de variable réelle). Les intersections de l'image géométrique $E$ de cette fonction avec les droites parallèles à l'axe des $x$ donnent une décomposition semi-continue de $E$. Cette décomposition peut ne pas être continue. Tel est l'exemple de la courbe $y = x^3 - x$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, où les deux droites horizontales qui passent par les extrémés de la courbe donnent des tranches de discontinuité.

Evidemment, une tranche composée d'un seul point est toujours une tranche de continuité.

**6. Théorème 5.** *La définition III équivaut aux définitions qui s'en obtiennent en remplaçant la condition (12) par (4) ou (5).*

Démonstration. Pour abréger l'écriture, désignons par $\alpha$ la proposition: „(12) entraîne (13) quelle que soit la suite $\{T_n\}$". Désignons par $\beta$ et $\gamma$ les propositions qui s'obtiennent de $\alpha$ en remplaçant (12) respectivement par (4) et (5).

Il s'agit de prouver que $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$.

Or, la condition (12) entraîne évidemment la condition (4) et, la décomposition étant semi-continue, cette dernière condition entraîne (5) en vertu du th. I. Donc $\beta$ implique $\alpha$ et $\gamma$ implique $\beta$. Il reste à prouver que $\alpha$ implique $\gamma$.

Or, soit $\{T_n\}$ une suite assujettie à l'inclusion (5). Pour prouver (13) il suffit donc de démontrer que

(14) $$\mathrm{Lim\,inf}\, T_n = T,$$

ce qui revient à dire, en vertu de (2), que

(15) $$\mathrm{Lim}\, T_{k_n} = T$$

pour toute suite convergente $\{T_{k_n}\}$ extraite de $\{T_n\}$.

Les inclusions (1) et (5) entraînent $0 \neq \mathrm{Lim}\, T_{k_n} \subset \mathrm{Lim\,sup}\, T_n \subset T$. Donc $T . \mathrm{Lim}\, T_{k_n} \neq 0$ d'où, en admettant $\alpha$ et en y remplaçant $\{T_n\}$ par $\{T_{k_n}\}$, on arrive à (15).

Donc $\alpha$ entraîne $\gamma$.

**Corollaire.** *Pour qu'une tranche $T$ soit une tranche de continuité, il faut et il suffit que la convergence vers $T$ dans l'hyper espace, coïncide avec la convergence dans l'espace.*

En effet, il est évident que la convergence dans l'espace entraîne toujours la convergence dans l'hyper-espace, c'est-à-dire que (13) entraîne (5). D'autre part, d'après le théor. V, la condition suffisante et nécessaire pour que $T$ soit une tranche de continuité est que (5) entraîne (13), c'est-à-dire que la convergence dans l'hyper-espace entraîne la convergence dans l'espace. Le corollaire en résulte immédiatement.

**Théorème VI.** *Etant donnée une fonction $T(x)$ assujettie aux hypothèses du théor. II, la condition suivante est suffisante et nécessaire pour qu'une tranche $T(y)$ soit une tranche de continuité:*

(16) *l'égalité* $\lim y_n = y$ *entraîne* $\operatorname{Lim} T(y_n) = T(y)$.

Démonstration. 1. Selon te théor. II, la fonction $T(x)$ est bicontinue. Par conséquent, l'inclusion $\operatorname{Lim\,sup} T(y_n) \subset T(y)$ entraîne l'égalité $\lim y_n = y$. Or, si l'on admet (16), cette dernière égalité entraîne: $\operatorname{Lim} T(y_n) = T(y)$ La tranche $T(y)$ est donc selon le théor. V une tranche de continuité. Ainsi, la condition (16) est suffisante.

2. Admettons que $T(y)$ soit une tranche de continuité. Or, l'égalité $\lim y_n = y$ entraîne, selon (8): $\operatorname{Lim\,sup} T(y_n) \subset T(y)$ et cette dernière inclusion entraîne selon le théor. V: $\operatorname{Lim} T(y_n) = T(y)$.

L'hypothèse que $T(y)$ est une tranche de continuité entraîne ainsi la proposition (16).

**7. Théorème VII** [1]). *La famille des tranches de continuité (considérées comme points d'hyper-espace) est un ensemble $G_\delta$* [2]) *dense dans l'hyper espace.*

Démonstration. L'espace $E$ étant supposé métrique compact, il existe une suite d'ensembles ouverts, „sphères rationnelles", tels que tout ensemble ouvert dans $E$ est somme d'une certaine famille de ces sphères. Formons la suite de tous les couples de ces sphères

(17) $$(K_1, L_1), (K_2, L_2), \ldots (K_m, L_m), \ldots$$

tels que

(18) $$\overline{K_m} \subset L_m.$$

[1]) Dans le Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926 Nov.-Dec.) M. L. S. Hill signale un théorème analogue.

[2]) Produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts.



Nous allons représenter la famille $\boldsymbol{D}$ de tranches de discontinuité comme somme des familles $\boldsymbol{Z}_m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), définies de la façon suivante: la tranche $T$ appartient à $\boldsymbol{Z}_m$, lorsque

(19) $$T \cdot \overline{K_m} \neq 0$$

et, lorsque il existe, en outre, une suite de tranches $\{T_n\}$ telle que:

(20) $$\operatorname{Lim\,sup} T_n \subset T,$$

(21) $$L_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 0.$$

Il s'agit d'abord de prouver que

(22) $$\boldsymbol{D} = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{Z}_m.$$

Or, si $T \varepsilon \boldsymbol{D}$, il existe d'après la déf. III une suite convergente de tranches $\{T_n\}$ assujettie à l'inclusion (20) et un point $p$ tel que $p \varepsilon T - \operatorname{Lim} T_n$. On peut donc entourer ce point de deux sphères $K_m$ et $L_m$ de façon à satisfaire aux conditions (19) et (21). Par-suite $T \varepsilon \boldsymbol{Z}_m$.

Inversément, si l'on suppose les formules (19)—(21) remplies, $T$ n'est pas la limite de la suite $\{T_n\}$, ce qui prouve en vertu du théor. V et de l'inclusion (20) que $T \varepsilon \boldsymbol{D}$.

L'identité (22) est ainsi établie.

Notre théorème sera donc démontré dès que nous prouverons que pour tout $m$, la famille $\boldsymbol{Z}_m$ est fermée et non-dense.

1. $\boldsymbol{Z}_m$ est fermée (dans l'hyper-espace). Supposons que $\{T^i\}$ est une suite de tranches qui „convergent dans l'hyper-espace" vers $T$ et appartiennent à $\boldsymbol{Z}_m$. On a, par conséquent:

(23) $$T^i \cdot \overline{K_m} \neq 0,$$

(24) $$\operatorname{Lim\,sup} T^i \subset T;$$

de plus, pour tout $i$, il existe une suite $\{T_n^i\}$ telle que

(25) $$\operatorname{Lim\,sup} T_n^i \subset T^i,$$

(26) $$L_m \cdot T_n^i = 0.$$

Désignons par $\boldsymbol{F}_i$ la famille des tranches $T_1^i, T_2^i, \ldots$ et par $\boldsymbol{G}$

celle des tranches $T^1, T^2, \ldots$ Conformément à (24), on a $T \varepsilon \overline{G}$. Selon (25): $T^i \varepsilon \overline{F}_i$, d'où $G \subset \sum_{i=1}^{\infty} \overline{F}_i \subset \overline{\sum_{i=1}^{\infty} F_i}$.

Par conséquent: $T \varepsilon \overline{\sum_{i=1}^{\infty} F_i}$. Autrement dit, il existe dans la famille $\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ une suite de tranches $T_1, T_2, \ldots$ qui converge (dans l'hyper-espace) vers $T$, c'est-à-dire qui satisfait à l'inclusion (20). En vertu de (26) on a donc (21) et les formules (23) et (24) entraînent (19).

Les formules (19) — (21) remplies, il vient $T \varepsilon Z_m$; autrement dit, $Z_m$ est fermée.

2. $Z_m$ est non-dense (dans l'hyper-espace). En effet, $T$ appartenant à $Z_m$, il existe une suite $\{T_n\}$ qui converge dans l'hyper-espace vers $T$ (formule (20)) et qui satisfait à l'égalité (21). Or, cette égalité, rapprochée de l'inclusion (18), donne $T_n . \overline{K}_m = 0$, ce qui prouve conformément à (19) que $T_n$ n'appartient pas à $Z_m$ quel que soit $n$. La famille $Z_m$ étant fermée, est donc non-dense.

Notre théorème est donc démontré complètement.

Le théorème démontré tout-à-l'heure est une généralisation d'un théorème bien connu de la théorie des fonctions: les points de continuité d'une fonction (réelle) $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ bornée et semi-continue supérieurement forment un ensemble dense dans le segment 01.

En effet, soit $I$ l'image géométrique de cette fonction (c. à. d. l'ensemble des points $[x, f(x)]$. Considérons la décomposition

$$\overline{I} = \sum_{0 \leq x \leq 1} T(x),$$

où $T(x)$ désigne l'ensemble de points de $\overline{I}$ à abscisse $x$.

L'hyper-espace de cette décomposition est homéomorphe au segment. D'après le théor. VII, l'ensemble $C$ des $x$ tels que $T(x)$ est une tranche de continuité est un $G_\delta$ dense dans le segment 01. Nous allons prouver que $C$ est précisément l'ensemble de points de continuité de la fonction $f(x)$.

On voit d'abord que, pour que $f(x)$ soit continue dans un point $x_0$, il faut et il suffit que l'ensemble $T(x_0)$ se réduise au point $[x_0, f(x_0)]$. Dans ce cas la tranche $T(x_0)$, comme composée d'un seul point, est une tranche de continuité.

Inversément, admettons que $T(x_0)$ est une tranche de continuité et supposons, par impossible, qu'elle contienne outre le point $[x_0, f(x_0)]$ un point $[x_0, y']$.

Il existe, par conséquent, une suite $\{x_n\}$ telle que $\lim x_n = x_0$ et $\lim f(x_n) = y'$. D'après le théor VI, $\operatorname{Lim} T(x_n) = T(x_0)$.

Or, la fonction $f(x)$ étant semi-continue supérieurement, le point $[x_n, f(x_n)]$ est le point d'ordonnée maximum de la tranche $T(x_n)$. Parsuite tous les points de $T(x_0)$ sont d'ordonnées $\leqslant \lim f(x_n)$ et, en même temps, $\lim f(x_n) \leqslant f(x_0)$. Donc $f(x_0) = \lim f(x_n) = y'$, c. q. f. d.



## § 3. Décompositions en tranches continues.

**8. Théorème VIII.** *Si un espace métrique compact $E$ est décomposé en une infinité dénombrable de continus*[1]) *disjoints, cette décomposition est semi-continue.*

Démonstration. Soit

(27) $$E = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

la décomposition donnée. Soit $\{T_{n_i}\}$ une suite convergente. Posons

(28) $$L = \operatorname{Lim}_{i=\infty} T_{n_i}.$$

$L$, comme limite d'une suite de continus (d'un espace compact), est un continu[2]). D'après (27), on a $L = \sum_{n=1}^{\infty} (L . T_n)$, les sommandes de cette somme étant disjoints par hypothèse. Or, d'après un théorème de M. Sierpiński[3]), un continu borné ne peut être somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints et non vides. Par conséquent, il n'y a parmi ces sommandes qu'un seul, soit $L . T_n$, qui n'est pas vide. Donc $L = L . T_n$ et il vient, selon (28): $\operatorname{Lim} T_{n_i} \subset T_n$, ce qui prouve conformément à la définition I que la décomposition est semi-continue.

Le théorème suivant de M. R. L. Moore[4]) résulte du théorème que nous venons de démontrer:

*Si l'on décompose un ensemble fermé et borné $E$ en une suite infinie de continus disjoints $T_1, T_2, \ldots$, il existe parmi ces continus au moins un qui ne contient pas de points d'accumulation des autres.*

En effet, d'après le théor. VIII, la décomposition envisagée est semi-continue, Son hyper-espace $H$, comme image continue de $E$ (théor. III), est fermé et dénombrable; il n'est donc pas parfait. $H$ contient donc une tranche $T_n$ isolée (dans l'hyper-espace). Autrement dit: $X$ désignant la famille de tranches $T_1, \ldots T_{n-1}, T_{n+1}, \ldots$ et $Y$ la famille composée de la tranche $T_n$ seule, on a $\overline{X}\, Y = 0$.

Il en résulte, d'après le théor. IV, 9°, que $\overline{S(X)} . S(Y) = 0$, c'est-à-dire que $\overline{T_1 + \ldots + T_{n-1} + T_{n+1} + \ldots}\; T_n = 0$, c. q. f. d.

Si l'on décompose un espace $E$ en une infinité non-dénombrable de continus disjoints, la décomposition peut évidemment

[1]) Un point est considéré, dans la suite, comme continu.

[2]) Cf. Janiszewski, Thèse, théor. I.

[3]) Tôhoku Math. Journ. 13 (1918), p. 300.

[4]) *An extension of the theorem that no countable point set is perfect,* Proc. Nat. Acad. Sc. 10 (1924), pp. 168—170.

ne pas être semi-continue. Pour qu'elle le soit il faut soumettre $E$ à des conditions supplémentaires:

**Théorème IX.** *Si l'on décompose en (vrais) sous continus disjoints un continu (borné) dont tout sous-continu est jordanien*[1]. *la décomposition est semi-continue.* En outre *la famille des tranches composées de plus d'un point coïncide avec la famille de tranches de discontinuité et est au plus dénombrable*

Démonstration D'après un théorème de M. Zarankiewicz[2], si $C_1, C_2, .$ est une suite convergente de continus disjoints situés dans un continu dont tout sous continu est jordanien, sa limite $\mathrm{Lim}\, C_n$ se réduit à un seul point. Il en résulte immédiatement que la décomposition envisagée satisfait à la condition 3° de la définition I, donc qu'elle est semi-continue. Il en résulte aussi qu'une tranche de continuité ne peut contenir plus d'un point.

Il y a donc identité entre les tranches de continuité et les tranches composées d'un seul point.

Enfin, la famille de tranches composées de plus d'un point est au plus dénombrable, car, conformément à un théorème de M. Gehman[3], toute famille de sous-continus disjoints et contenant plus d'un point extraite d'un continu assujetti aux hypothèses du théorème IX est au plus dénombrable.

**Remarque I.** Inversement, si $E$ *contient un sous-continu non-jordanien, il existe une décomposition en continus disjoints qui n'est pas semi-continue.* En effet, d'après le théorème précité de M Zarankiewicz, on peut, dans ce cas, extraire de $E$ une suite convergente de continus disjoints $C_1, C_2, \dots$ dont la limite contient plus d'un point. La famille composée 1°: des continus $C_1, C_2, \dots$ et 2°: des points individuels qui appartiennent à $E-(C_1+C_2+\dots)$, tout en présentant une décomposition de $E$ en continus disjoints, ne satisfait pas à la condition 3° de la déf. I, ne donne donc pas lieu à une décomposition semi-continue.

**Remarque II.** Les continus dont tout sous-continu est jordanien forment une sous-classe dans la classe des continus à une dimension[4]. Or, il importe de remarquer que la deuxième partie du théorème ne peut être étendue à cette classe même dans l'hypothèse supplémentaire, que la décomposition est continue. M. Vietoris (l. c.) a donné, en effet, un exemple d'un continu plan non-dense et M. Knaster d'un continu plan irréductible entre deux points qui *se décompose d'une façon continue en tranches dont chacune est un continu contenant plus d'un point.*

[1]) image continue d'un intervalle.
[2]) Fund. Math. IX, théor. 4.
[3]) Ann. of Math. 27 (1925) p. 39.
[4]) au sens de M. Brouwer.



**9. Théorème X.** *Si les tranches* (d'une décomposition semi-continue d'un espace métrique compact $E$) *sont des continus, la condition suffisante et nécessaire pour qu'une famille de tranches* $\boldsymbol{F}$ *soit connexe par rapport à l'hyper-espace et que la somme* $S(\boldsymbol{F})$ *soit connexe par rapport à l'espace.*

Plus généralement: *pour que* $C$ *soit une composante*[1]) *de* $\boldsymbol{F}$ *il faut et il suffit que* $S(C)$ *soit une composante de* $S(\boldsymbol{F})$[2]).

Démonstration. Si $S(\boldsymbol{F})$ est connexe, $\boldsymbol{F}$, comme image continue de $S(\boldsymbol{F})$ (théor. IV, 6°), l'est également

Supposons maintenant que $S(\boldsymbol{F})$ n'est pas connexe, c. à d que

$$S(\boldsymbol{F}) = M + N \tag{29}$$

$$\overline{M}N = 0 = \overline{N}M \tag{30}$$

$$M \neq 0 \neq N. \tag{31}$$

Toute tranche étant, par hypothèse, un continu, les tranches qui forment $S(\boldsymbol{F})$ sont (conformément à (30)) contenues entièrement les unes dans $M$ et les autres dans $N$. En d'autres termes:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} \tag{32}$$

$$M = S(\boldsymbol{V}), \quad N = S(\boldsymbol{Y}). \tag{33}$$

Les formules (31) et (33) donnent en vertu du théor IV, 5° l'inégalité:

$$\boldsymbol{V} \neq 0 \neq \boldsymbol{Y}. \tag{34}$$

Les égalités (30) et (33) donnent en vertu du théor. IV, 9° l'égalité:

$$\overline{\boldsymbol{V}}.\boldsymbol{Y} = 0 = \overline{\boldsymbol{Y}}.\boldsymbol{V}. \tag{35}$$

Les formules (32), (34) et (35) prouvent que $\boldsymbol{F}$ n'est pas connexe.

L'équivalence entre la connexité de $\boldsymbol{F}$ et de $S(\boldsymbol{F})$ est ainsi établie.

Passons à la deuxième partie du théorème

Soit $\boldsymbol{C}$ un sous ensemble connexe de $\boldsymbol{F}$ qui n'en est pas une composante. Soit donc $\boldsymbol{K}$ un ensemble connexe tel que

$$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{F} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K} - \boldsymbol{C} \neq 0$$

[1]) $C$ est une composante de $F$, si $C$ est connexe et il n'existe aucun autre ensemble connexe $X$ tel que $C \subset X \subset F$.

[2]) Cf. L Vietoris, l. c, p. 445 (2).

D'après le théor. IV, 3° et 5°, il en résulte que

$$S(C) \subset S(\boldsymbol{K}) \subset S(\boldsymbol{F}) \quad \text{et} \quad S(\boldsymbol{K}) - S(C) \neq 0,$$

ce qui prouve que $S(C)$ n'est pas une composante de $S(F)$.

Inversément, admettons que $S(C)$ soit un sous-ensemble connexe de $S(\boldsymbol{F})$ qui n'en est pas une composante. Soit $L$ un ensemble connexe tel que

$$S(C) \subset L \subset S(\boldsymbol{F}) \quad \text{et} \quad L - S(C) \neq 0.$$

Considérons la fonction $f(p)$ du théor. III. Il vient

$$f(S(C)) \subset f(L) \subset f(S(\boldsymbol{F})) \quad \text{et} \quad f(L) - f(S(\boldsymbol{C})) \neq 0.$$

Or, la fonction $f$ étant continue, $f(L)$ est connexe. En outre: $f(S(\boldsymbol{C})) = \boldsymbol{C}$ et $f(S(\boldsymbol{F})) = \boldsymbol{F}$. On en conclut que $\boldsymbol{C}$ n'est pas une composante de $\boldsymbol{F}$.

**Corollaire 1.** *Si les tranches sont des continus, la condition suffisante et nécessaire pour que l'hyper-espace soit un continu est que l'espace le soit.*

C'est une conséquence immédiate des théorèmes IV, 8° et X.

**Corollaire 2.** *Si les tranches sont des continus, les propriétés suivantes de l'espace $E$ appartiennent à l'hyper-espace: 1° d'être un continu irréductible*[1], *2°: d'être un continu indécomposable*[2], *3°: ne contenir aucun continu non-jordanien, 4°: la propriété $\pi$ suivante: le produit de tous deux continus dont la somme est égale à $E$ est un continu*[3], *5°: d'être une dendrite*[4].

Démonstration. 1. Soit $E$ un continu irréductible entre $a$ et $b$. Soient $T_1$ et $T_2$ les tranches qui contiennent $a$ et $b$ respectivement. Si $\boldsymbol{K}$ est un continu tel que: $T_1, T_2 \,\varepsilon\, \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{H}$, on a $a, b \,\varepsilon\, S(\boldsymbol{K}) \subset E$, ce qui entraîne, en vertu de l'irréductibilité de $E$, que $S(\boldsymbol{K}) = E$, donc que $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}$. Autrement dit, $\boldsymbol{H}$ est irréductible entre $T_1$ et $T_2$

[1]) En ce qui concerne les décompositions des continus irréductibles, je prouve, dans les Fund. Math. X, que tout continu irréductible (borné) admet une décomposition (semi-continue en sous-continus) linéaire qui est „la plus fine", c'est-à-dire que tout autre décomposition linéaire (en sous-continus) s'en obtient par la réunion de plusieurs tranches en une seule.

[2]) C'est-à-dire: ne pas être somme de deux vrais sous-continus.

[3]) Cf. Vietoris, l. c.

[4]) Continu jordanien qui ne contient aucune courbe simple fermée.



2. Supposons que l'hyper-espace $\boldsymbol{H}$ soit décomposable: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}$, où $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$ sont deux continus tels que $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K} \neq 0 \neq \boldsymbol{H} - \boldsymbol{L}$. Il vient, selon le théor. IV:

$$E = S(\boldsymbol{H}) = S(\boldsymbol{K}) + S(\boldsymbol{L}), \quad S(\boldsymbol{H}) - S(\boldsymbol{K}) \neq 0 \neq S(\boldsymbol{H}) - S(\boldsymbol{L}),$$

ce qui prouve que $E$ est décomposable.

3. Soit $\boldsymbol{K}$ un sous-continu arbitraire de $\boldsymbol{H}$. Donc, $S(\boldsymbol{K})$, comme sous-continu de $E$, est par hypothèse un continu jordanien. Parsuite, $\boldsymbol{K}$, comme image continue de $S(\boldsymbol{K})$ (théor. IV, 6°), en est également un.

4. Soient $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$ deux continus tels que $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}$. Donc $E = S(\boldsymbol{K}) + S(\boldsymbol{L})$ et, par hypothèse, $S(\boldsymbol{K}) \,.\, S(\boldsymbol{L})$ est un continu. Or, selon le cor. 1, il en résulte que $\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}$ est un continu, ce qui prouve que $\boldsymbol{H}$ jouit de la propriété $\pi$.

5 Comme image continue d'un continu jordanien, $\boldsymbol{H}$ est jordanien. Soit $\boldsymbol{K}$ un sous-continu arbitraire de $\boldsymbol{H}$.

Or, $S(\boldsymbol{K})$, comme sous continu d'une dendrite est également une dendrite, possède donc[1]) la propriété $\pi$. Il s'ensuit, selon 4°, que $\boldsymbol{K}$ la possède également; $\boldsymbol{K}$ ne peut donc être une courbe simple fermée.

En suivant la voie de raisonnement de M. Vietoris, on peut établir plusieurs autres théorèmes concernant la structure de l'hyper-espace pour le cas où l'espace jouit de la propriété $\pi$. Ainsi, par exemple, supposons que *$E$ est un continu de Jordan qui est situé sur le plan et ne le coupe pas.* Comme continu borné qui ne coupe pas le plan, $E$ jouit (d'après un théorème de Janiszewski)[2]) de la propriété $\pi$. Par conséquent, l'hyper-espace $\boldsymbol{H}$ jouit également de cette propriété. De plus, $\boldsymbol{H}$, comme image continue de $E$, est un continu de Jordan. Or, si l'on suppose que $\boldsymbol{H}$ soit à une dimension, les propriétés mentionnées de $\boldsymbol{H}$ impliquent[3]) que $\boldsymbol{H}$ ne contient aucune courbe simple fermée, c. à. d. que $\boldsymbol{H}$ est une dendrite.

D'une façon analogue, si l'on considère comme $E$ la surface d'une sphère et si l'on suppose que $\boldsymbol{H}$ est à une dimension[4]), $\boldsymbol{H}$ est également une dendrite[5]) (car $E$ jouit de la propriété $\pi$).

[1]) d'après un théorème de M. K. Menger, Math. Ann. 96 (1926), p. 575.

[2]) Prace mat.-fiz. 1913.

[3]) Voir Vietoris l. c. p. 446 (5).

[4]) Il serait intéressant de reconnaitre s'il est possible de décomposer la surface d'une sphère de façon semi-continue et telle que $\boldsymbol{H}$ ait la dimension $\geqslant 2$ et que toutes les tranches aient la dimension $\geqslant 1$. Ce problème se rattache au théorème principal de l'ouvrage de M. R. L. Moore, publié dans les Trans. (l. c.). Pour d'autres problèmes de dimension concernant la théorie de décomposition semi-continue on consultera P. Alexandroff, Math. Ann. (op. cit.) p. 570 et L. Tumarkin Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam, 28 (1925), p. 1000.

[5]) la plus générale, selon un théorème très intéressant de M. Vietoris (l. c.).

**10.** Un espace $E$ est dit *localement connexe* au point $p$ (au sens de Mazurkiewicz—Hahn) lorsque la condition $\lim p_n = p$ entraîne l'existence d'une suite de continus $K_n$ de diamètre tendant vers 0 et tels que $(p, p_n) \subset K_n \subset C$. Soit $A$ l'ensemble de points où $E$ n'est pas localement connexe. On appelle *partie première* [1]): 1° toute composante de l'ensemble $\overline{A}$, 2° tout point de $C - \overline{A}$.

**Théorème XI** (de R. L. Moore)[2]). *La décomposition d'un continu (borné) $E$ en parties premières est semi-continue. L'hyper-espace de cette décomposition est un continu de Jordan*

Démonstration. Nous allons baser notre démonstration sur les deux propositions suivantes:

1° la décomposition d'un espace métrique compact en composantes est semi-continue; son hyper-espace est linéaire et ponctiforme (c. à. d. ne contient aucun continu qui ne se réduise à un point)[3]);

2° l'ensemble de points de non-connexité locale d'un continu est somme de continus dont aucun ne se réduit à un point, donc cet ensemble n'est pas ponctiforme (à moins qu'il ne soit vide)[4]).

Pour établir que la décomposition en parties premières est semi-continue, considérons une suite convergente de partie premières $P_1, P_2, \ldots$ Il s'agit de prouver qu'il existe une partie première $P$ telle que

$$\operatorname{Lim} P_n \subset P. \tag{36}$$

Il y a deux cas à envisager. Dans le cas où tous les $P_n$ sont des composantes de $\overline{A}$, l'inclusion (36) résulte de la proposition 1° (car la décomposition de $\overline{A}$ en composantes est semi continue). Dans le cas où, pour tout $n$, $P_n \subset E - \overline{A}$, l'ensemble $P_n$ se réduit (par définition de partie première) à un point individuel; la limite $\operatorname{Lim} P_n$ est, par conséquent, composée aussi d'un seul point et l'inclusion (36) est évidente.

La semi-continuité de la décomposition en parties premières est donc établie

[1]) „Primteil" au sens de M. Hahn (Wiener Ber. 130, 1921, p. 217).

[2]) *Concerning the prime parts of a continuum* Math. Zft. 22 (1925, pp. 307—315.

[3]) Voir: Brouwer Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam 12 (1910), pp. 785—794 Hausdorff, loc. cit. p. 159, Alexandroff, loc. cit. p. 570.

[4]) Voir ma note des Fund. Math. III, p 60



Considérons la fonction $f(p)$ du théor. III. Dans l'ensemble $E - \overline{A}$ cette fonction est bicontinue, car pour $p \varepsilon C - \overline{A}$, on a $f(p) = p$. La connexité locale étant un invariant de l'Analysis Situs, l'hyper-espace est localement connexe au „point" $f(p)$, pour tout $p \varepsilon E - \overline{A}$. Or, toutes les tranches $f(p)$ qui correspondent aux points $p$ de $\overline{A}$ (c'est-à-dire: les composantes de $\overline{A}$) formant, selon 1°, un ensemble ponctiforme, on conclut de 2° que l'ensemble des points de non-connexité locale de l'hyper-espace est vide.

Par conséquent, $\boldsymbol{H}$, comme continu borné (cor. 1 du théor. X) et localement connexe, est un continu de Jordan (selon le théorème de Mazurkiewicz-Hahn)[1]).

Il est à remarquer que dans certains cas la décomposition d'un continu en parties premières peut devenir illusoire: il peut notamment arriver que cette décomposition ne donne lieu qu'à une seule tranche, à savoir le continu entier. Plus généralement, il existe des continus qui n'admettent aucun autre hyper-espace jordanien (provenant d'une décomposition en tranches-continues) que l'hyper-espace composé d'un seul point. Tels sont conformément au cor. 2. du théor. X les continus indécomposables. Tel est encore l'exemple suivant:

Joignons tout point de l'ensemble parfait non dense de Cantor, situé sur l'axe des $x$, par un segment rectiligne à un point $p_0$ situé en-dehors de cet axe. Soit $\boldsymbol{E}$ le continu ainsi obtenu. Imaginons ce continu décomposé d'une façon semi-continue en (vrais) sous-continus. Je dis que l'hyper-espace $\boldsymbol{H}$ de cette décomposition est non-jordanien.

Soient, en effet, $T_0$ la tranche qui contient $p_0$, $p$ un point arbitraire de $E - T_0$, $\{p_n\}$ une suite de points qui convergent vers $p$ et dont aucun n'est situé sur la droite $p p_0$; soient enfin $p_n \varepsilon T_n$ et $p \varepsilon T$.

Par l'hypothèse, $\lim p_n = p$; donc $T \operatorname{Lim\,inf} T_n \neq 0$, d'où selon le théor I, $\operatorname{Lim\,sup} T_n \subset T$, ce qui prouve (déf II) que la suite $\{T_n\}$ converge dans $\boldsymbol{H}$ vers $T$.

Soit $\boldsymbol{K}_n$ un continu de l'hyper-espace qui unit $T_n$ à $T$. Selon le cor. 1 du théor X, $S(\boldsymbol{K}_n)$ est un continu qui unit $p_n$ à $p$. Or, il est évident que tout sous-continu de $E$ qui contient $p_n$ et $p$ passe nécessairement par $p_0$. Donc $p_0 \varepsilon S(\boldsymbol{K}_n)$, d'où $T_0 \varepsilon \boldsymbol{K}_n$.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que tout continu $\boldsymbol{K}_n$ qui unit $T_n$ à $T$ (dans $\boldsymbol{H}$) passe par $T_0$. Donc le diamètre de $\boldsymbol{K}_n$ ne tend pas vers 0 (il reste, en effet, $\geqslant \varrho_H(T, T_0)$); par conséquent, conformément à la définition de connexité locale citée au début du N 10, $\boldsymbol{H}$ n'est pas localement connexe à $T$, c. q. f. d.

[1]) Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. Varsovie 6 (1913), H. Hahn, Wiener Ber. 123 (1914).