Or, d'après (9) et (10), nous avons pour $|t| < \delta_1$, $|t'| < \delta_1$:

$$0 < \xi - c + t < 2\delta \quad \text{et} \quad 0 < \xi - c + t' < 2\delta,$$

et l'inégalité (8) donne (pour $h = \xi - c + t$, resp. pour $h = \xi - c + t'$):

$$|f(\xi + t) - f(2c - \xi - t)| < \sigma(\xi - c + t) \tag{12}$$

et

$$|f(\xi + t') - f(2c - \xi - t')| < \sigma(\xi - c + t'). \tag{13}$$

Les inégalités (11), (12) et (13) donnent, pour $|t| < \delta_1$, $|t'| < \delta_1$, vu les inégalités (10):

$$|f(\xi + t) - f(\xi + t')| < \omega(2c - \xi) + \varepsilon + \sigma(\xi - c + t) + \\ + \sigma(\xi - c + t') < \omega(2c - \xi) + 2\sigma(\xi - c) + 3\varepsilon.$$

Il en résulte tout de suite que

$$\omega(\xi) \leqslant \omega(2c - \xi) + 2\sigma(\xi - c). \tag{14}$$

Or, d'après (9) et (7), nous avons

$$a < 2c - \xi < c. \tag{15}$$

L'ensemble (5) est, comme nous savons, au plus dénombrable: par conséquent l'ensemble Q de tous les nombres $2c - x$, où $x \varepsilon H$, est aussi au plus dénombrable. Si ξ non εQ, on a évidemment $2c - \xi$ non εH et parsuite, d'après (15) et (5):

$$\omega(2c - \xi) \leqslant \sigma(2c - \xi - a),$$

et la formule (14) donne:

$$\omega(\xi) \leqslant \sigma(\xi - a).$$

Donc, si $\omega(\xi) > \sigma(\xi - a)$, on a $\xi \varepsilon Q$.

ξ étant un nombre quelconque, satisfaisant à l'inégalité (9), nous avons ainsi démontré que l'ensemble

$$\mathop{E}_{x} [\omega(x) > \sigma(x - a),\ c < x < c + \delta] \subset Q$$

est au plus dénombrable. L'ensemble (5) étant aussi au plus dénombrable, cela est incompatible avec le fait que l'ensemble (6) est non dénombrable pour $d > 0$ (donc, en particulier, pour $d = \delta$).

L'hypothèse de M. **Mazurkiewicz** est ainsi démontrée.

La question s'il existe des fonctions non mesurables (L), satisfaisant à la condition (1), reste encore ouverte.

Sur les suites des fonctions convergentes en moyenne.

Par

St. **Kaczmarz** et L. **Nikliborc** (Lwów).

Le but de cette note est d'étudier la généralisation de la notion de la convergence en moyenne, donnée par M. **Noaillon**, qui a aussi le premier démontré *deux théorèmes* importants sur ce sujet. Les recherches de M. **Noaillon** ne sont pas jusqu'à ce moment publiées, et la connaissance des ces théorèmes (sans démonstrations) nous devons à M. **Banach**, qui a aussi de son coté démontré [1]) un des ces théorèmes.

§ 1. Envisageons des fonctions $g(x)$, définies dans tout l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ et jouissantes des propriétés suivantes:

1°. $g(x)$ est continue.

2°. $g(0) = 0$,

3°. $|x| \neq 0$ entraîne $g(x) > 0$.

4°. Il existe deux nombres positifs α et A, tels que pour $|x| \geqq \alpha$ on a $g(x) \geqq A$.

Nous appellerons des telles fonctions „*fonctions* (N)".

Envisageons encore d'après M. **Noaillon** une suite infinie $\{f_n(x)\}$ de fonctions, presque partout finies dans l'intervalle $[0, 1]$, et supposons que les intégrales

$$\int_0^1 g(f_p - f_q)\, dx \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

existent.

[1]) P. Lévy Bull. des Sc. mat. (2), 49 p. 378.

Nous disons que la suite $\{f_n(x)\}$ converge *„en moyenne suivant la fonction* $g(x)$", si on a

$$\lim_{p,q\to+\infty}\int_0^1 g(f_p-f_q)\,dx=0.$$

On doit à M. Noaillon la proposition suivante:

„Si $g(x)$ est une fonction (N), et si la suite $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne suivant cette fonction,

il existe une fonction $f(x)$ définie dans $[0,1]$, telle qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(f_n-f)\,dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(f-f_n)\,dx=0".$$

Démonstration: D'après hypothèses on peut à tout nombre positif ε faire correspondre un autre nombre positif $\omega(\varepsilon)$ tel, qu'on a

$$|g(x)|\leqq\varepsilon\supset|x|\leqq\omega(\varepsilon),$$

et on voit, que $\omega(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε. Dans ce qu'il suit supposons que $\varepsilon\leqq A$, ce qu'entraîne, que $\omega(\varepsilon)\leqq\alpha$.

Considérons maintenant une suite

(1) $$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots$$

des nombres positifs, jouissante des propriétés suivantes:

1°. $\varepsilon_{i+1}<\varepsilon_i<A \qquad (i=1,2,\ldots)$

2°. les séries

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\omega(\varepsilon_i)$$

sont convergentes et posons $\omega(\varepsilon_i)=\omega_i$.

Il est evidemment possible à la suite (1) faire adjoindre une suite infinie croissante des nombres naturels

$$p_1,\ p_2,\ldots$$

telle, qu'on ait

$$\int_0^1 g(f_{p_{i+1}}-f_{p_i})\,dx<\varepsilon_i^2.$$

Soit E_i l'ensemble

$$E_i=E\,[g\,[f_{\nu_{i+1}}(x)-f_{\nu_i}(x)]\geqq\varepsilon_i]$$

et CE_i son complément.

En désignant par mZ la mesure lebesguienne d'ensemble Z on voit, que l'inégalité

$$\varepsilon_i\,m\,E_i\leqq\int_{E_i} g(f_{p_{i+1}}-f_{p_i})\,dx<\varepsilon_i^2$$

entraîne la relation

$$m\,E_i<\varepsilon_i$$

et alors la relation

$$m\,CE_i\geqq 1-\varepsilon_i.$$

Prenons maintenant un nombre positif $\eta\ (\eta<1)$ quelconque et détérminons N de telle manière, que

$$\sum_{i=N}^{\infty}\varepsilon_i<\eta,$$

et posons

$$Z=C\sum_{i=N}^{\infty}E_i.$$

D'après ce qui précède, on voit que $mZ\geqq 1-\eta$, et comme pour tout x appartenant à CE_i

$$g(f_{p_{i+1}}-f_{p_i})<\varepsilon_i$$

et alors

$$|f_{p_{i+1}}-f_{\nu_i}|<\omega_i,$$

on voit, que pour tout x, appartenant à (Z) on a

$$|f_{\nu_{i+1}}-f_{\nu_i}|<\omega_i, \qquad (i\geqq N).$$

En vertu de la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i$ nous pouvons donc affirmer, que la suite

(2) $$f_{p_1}+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{p_{i+1}}-f_{p_i})$$

converge dans un ensemble de la mesure si voisine de 1. que l'on veut, ce que nous assure la convergence presque partout dans $[0,1]$ de la série (2), c. á d. de la suite

$$f_{p_1},\ f_{p_2},\ldots$$

Posons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{p_i}(x).$$

On a evidemment des rélations

$$g(f_n - f) = g\,[\lim_{i\to\infty}(f_n - f_{p_i})] = \lim_{i\to\infty} g\,(f_n - f_{p_i})$$

$$g(f - f_m) = \lim_{i\to\infty} g\,(f_{p_i} - f_m),$$

qui nous montrent, que les fonctions $g(f_n - f)$ et $g(f - f_m)$ sont mesurables. D'apres un théorème connue [1]) il résulte des rélations qui précédent et des inégalités

$$\int_0^1 g\,(f_{p_i} - f_n)\,dx < \varepsilon$$

$$\int_0^1 g\,(f_n - f_{p_i})\,dx < \varepsilon,$$

qui subsistent pour p_i et n suffisamment grandes, (ε étant un nombre positif si petit, que l'on veut), que les intégrales $\int_0^1 g\,(f_n - f)\,dx$ et $\int_0^1 g\,(f - f_n)\,dx$ existent, et qu'on a

$$\int_0^1 g\,(f_n - f)\,dx \leqslant \varepsilon$$

$$\int_0^1 g\,(f - f_n)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

C. q. f. d.

[1]) Voici le théorème mentionné: „Si la suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge presque partout dans l'ensemble E, et si $\int_E |\varphi_n(x)|\,dx \leqslant A$, alors

1° $\int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,dx$ existe

2° $\int_E \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \liminf_{n\to+\infty} \int |\varphi_n(x)|\,dx$".

V. p. e. Steinhaus, „Rozprawy Akademji Umiejętności" Kraków 1916. Tom LVI. Ser. A. Str. 184.

Remarque. L'hypothèse de la mesurabilité des fonctions $\{f_n(x)\}$ n'interviennant pas dans notres raisonnaiments on voit, que le théorème de M. Noaillon est absolument générale. On peut facilement construire un exemple de la suite $f_i(x)$ des fonctions non mesurables, pour laquelle le théorème subsiste. Il suffit à ce but poser

$$f_n(x) = \varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire non mesurable.

§ 2. On peut poser le problème de savoir, si la fonction $f(x)$, „limite de la suite $f_n(x)$. convergente en moyenne suivant la fonction $g(x)$" est unique.

On peut aussi poser un problème beaucoup plus générale:

La suite $\{f_n(x)\}$ étant convergente en moyenne suivant denx fonctions $(N) = g(x)$ et $g_1(x)$, peut-on affirmer. que les fonctions limites sont identiques?

Dans ce numéro nous donnerons des solutions affirmatives des ces questions.

Théorème. *Si les fonctions $g(x)$ et $g_1(x)$ sont des fonctions (N) et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g\,(f - f_n)\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_1(\varphi - f_n)\,dx = 0$$

on a presque partout

$$f(x) = \varphi(x)".$$

D é m o n s t r a t i o n. Faisons adjoindre à un nombre $\varepsilon > 0$ un autre nombre positif N, tel qu'on ait

$$\int_0^1 g\,(f - f_n)\,dx < \varepsilon^2$$

$$\int_0^1 g_1(\varphi - f_n)\,dx < \varepsilon^2$$

pour $n > N$. Les considérations du § 1 nous montrent, qu'ils existent deux ensembles E et E_1, dont les mesures sont plus grandes que $1 - \varepsilon$, et tels, qu'on a

$$E = E\,[g\,(f - f_n) < \varepsilon]$$
$$E_1 = E\,[g_1(\varphi - f_n) < \varepsilon].$$

On voit immédiatement, que

$$m(E.E_1) > 1 - 2\varepsilon$$

$$E.E_1 = E[g(f - f_n) < \varepsilon \text{ et } g_1(\varphi - f_n) < \varepsilon].$$

Soit $\omega(\varepsilon)$ la fonction, définie dans § 1 et $\omega_1(\varepsilon)$ soit la fonction, jouissante des mêmes propriétés par rapport à $g_1(x)$ que $\omega(\varepsilon)$ possede par rapport à $g(x)$. Il suit des rélations précédentes et des propriétés des fonctions $\omega(\varepsilon)$ et $\omega_1(\varepsilon)$, que dans l'ensemble $E.E_1$ doivent être vérifiées des inégalités

$$|f - f_n| < \omega(\varepsilon)$$

$$|\varphi - f_n| < \omega_1(\varepsilon)$$

et alors

$$|f - \varphi| < \omega(\varepsilon) + \omega_1(\varepsilon).$$

On peut donc à toute couple des nombres $\omega(\varepsilon) + \omega_1(\varepsilon)$, $\eta > 0$, faire correspondre un ensemble Z, tel, qu'on aura

$$m Z > 1 - \eta$$

$$Z = E[|f - \varphi| < \omega(\varepsilon) + \omega_1(\varepsilon)]$$

ce qui est équivalent à l'assertion du théorème

§ 3. Dans cet ordre d'idées on peut de même poser la question suivante: Deux fonctions $g(x)$ et $g_1(x)$ étant des fonctions (N), déterminer des conditions suffisantes auxquelles doit satisfaire la fonction $g_1(x)$, pour que toute suite $\{f_n(x)\}$, convergente en moyenne suivant la fonction $g(x)$, soit aussi convergente suivant la fonction $g_1(x)$.

Nous pouvons établir sur ce sujet la proposition suivante:

„*Si les fonctions $g(x)$ et $g_1(x)$ sont de la classe (N) et de plus s'ils existent deux nombres positifs X et M, tels que la rélation*

$$|x| > X$$

entraîne la relation

$$g_1(x) \leqslant M g(x)$$

alors toute suite $\{f_n(x)\}$ convergente en moyenne suivant la fonction $g(x)$, converge aussi suivant la fonction $g_1(x)$".

Dém. ε étant une quantité arbitraire, soit N un nombre positif, tel qu'on ait

$$p, q > N \supset \int_0^1 g(f_p - f_q)\, dx < \varepsilon^2.$$

D'après les raisonnements, employés dans la démonstration du théorème de M. Noaillon, il existe un ensemble $E_{p,q}$, tel que

$$m E_{p,q} > 1 - \varepsilon$$

$$E_{p,q} = E(g(f_p - f_q) < \varepsilon)$$

et alors

$$E_{p,q} = E(|f_p - f_q| < \omega(\varepsilon)).$$

Envisageons l'identité

$$(3) \qquad \int_0^1 g_1(f_p - f_q)\, dx = \int_{E_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx + \int_{CE_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx.$$

Décomposons l'ensemble $CE_{p,q}$ en deux sous ensembles $Z^{(1)}_{p,q}$ et $Z^{(2)}_{p,q}$, dont le premier est définie par la formule

$$Z^{(1)}_{p,q} = E(|f_p - f_q| \leqq X) . CE_{p,q}$$

et dont le second est son complément par rapport à $CE_{p,q}$.

On a evidemment

$$\int_{CE_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx \leqq \int_{Z^{(1)}_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx + M . \int_{Z^{(2)}_{p,q}} g(f_p - f_q)\, dx \leqq$$

$$\leqq \int_{Z^{(1)}_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx + M . \varepsilon^2.$$

Soit L la borne supérieure de la fonction $g_1(x)$ dans l'intervalle $[-X, +X]$ On aura

$$\int_{Z^{(1)}_{p,q}} g_1(f_p - f_q) \leqq L . m Z^{(1)}_{p,q} \leqq L m CE_{p,q} \leqq L . \varepsilon.$$

On a donc

$$(4) \qquad \int_{CE_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx \leqq (L + M . \varepsilon)\, \varepsilon.$$

Cherchons maintenant la borne supérieure de l'intégrale

$$\int_{E_{p,q}} g_1(f_p - f_q)\, dx.$$

A cet but introduirons la fonction $\Omega_1(\delta)$: soit $\Omega_1(\delta)$ le plus petit nombre tel, qu'on ait

$$|x| \leqq \delta \supset g_1(x) \leqq \Omega_1(\delta).$$

D'après la définition de l'ensemble $E_{p,q}$ on a pour tout x appartenant à $E_{p,q}$ la rélation:

$$g_1(f_p - f_q) < \Omega_1[\omega(\varepsilon)].$$

Il suit de là, qu'on a

(5) $$\int_{E_{p,q}} g_1(f_q - f_q)\, dx < \Omega_1[\omega(\varepsilon)]$$

Il vient des rélations (3), (4) et (5), que

$$\int_0^1 g_1(f_p - f_q)\, dx < \Omega_1[\omega(\varepsilon)] + (L + M.\varepsilon)\,\varepsilon,$$

pour $p, q > N$.

On voit donc, que

$$\int_0^1 g_1(f_p - f_q)\, dx - 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

§ 4. Comme nous avons dejà remarqué, M. Noaillon a démontré une deuxième remarquable proposition sur les suites des fonctions convergentes en moyenne suivant nne certaine fonction (N).

Adoptons, pour abréger, la définition suivante:

„Nous disons, qu'une fonction $g(x)$ appartient à la classe (N_1), si

1°. $g(x)$ est une fonction (N),

2°. il existe un nombre positif M, tel qu'on a

$$g(x+y) \leqslant M[g(x) + g(y)]$$

pour toute couple (x, y) des nombres réelles".

Ceci posé, ajoutons encore, que pour les fonctions (N_1) subsiste la proposition reciproque à la prémière proposition de M. Noaillon. La démonstration de cette remarque est immediate.

Voici *le deuxième théorème de M. Noaillon:*

Hypothèse:

1°. *Les fonctions $f_n(x)$ sont définies dans* [0, 1] *et presque partòut finies.*

2°. *$g(x)$ est une fonction (N_1),*

3°. *les intégrales*

$$\int_0^1 g(f_p - f_q)\, dx$$

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx$$

existent.

4°. $$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^1 g(f_p - f_q)\, dx = 0.$$

Thése:

1°. *L'intégrale*

$$\int_0^1 g(f)\, dx$$

existe, $f(x)$ étant fonction „limite" de la suite $\{f_n(x)\}$ au sens du § 2me

2°. $$\int_0^1 g(f_n)\, dx \to \int_0^1 g(f)\, dx".$$

Démonstration: Pour la démonstration de la première partie de notre thése il faut d'abord s'assurer, que la fonction $g(f)$ est mesurable.

Ce point est une consequence immédiate de la remarque suivante: La suite $f_n(x)$ étant convergente en moyenne, ou peut, comme nous dejà savons, en extraire une suite $\{f_{r_n}(x)\}$ convergente presque partout vers la „limite" $f(x)$. La fonction $g(f)$ est donc fonction limite des fonctions $g(f_{r_n})$ mesurables (d'après hypothése 3me), et parsuite est aussi mesurable.

Pour démontrer qu'elle est sommable, il suffit remarquer, qu'on a

$$g(f) \leqq M.[g(f - f_n) + g(f_n)].$$

c'est à dire, qu'elle est bornée par une fonction sommable.

Pour aller plus loin, montrons que les intégrales $\int_0^1 g(f_n)dx$ sont bornées dans leur ensemble.

En effet on a

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx \leqq M\left[\int_0^1 g(f_n - f)\, dx + \int_0^1 g(f)\, dx\right].$$

La suite $\int_0^1 g(f_n - f)\, dx$ étant convergente d'après la première proposition de M. Noaillon, est bornée. donc les intégrales $\int_0^1 g(f_n)\, dx$ sont aussi bornés.

La suite $\int_0^1 g(f_n)\,dx$ possède donc des points-limites et nous allons montrer, que le nombre $\int_0^1 g(f)\,dx$ est sa unique point-limite.

A cet but supposons, qu'un nombre A est un des points-limites de la suite

$$\int_0^1 g(f_n)\,dx.$$

Il existe alors une suite partielle $\{f_{p_n}\}$ telle, qu'on a

$$\int_0^1 g(f_{p_n})\,dx \to A.$$

D'autre part ou peut evidemment trouver une suite partielle $\{f_{q_n}\}$ de la suite $\{f_{p_n}\}$, telle que

$$f_{q_n} \to f$$

presque partout.

Envisageons maintenant l'identité

$$\int_0^1 |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx = \int_E |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx + \int_{CE} |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx,$$

valable pour toute décomposition de $[0, 1]$ en deux ensembles mesurables.

Soient ε et η deux nombres positifs arbitraires.

On peut d'après une proposition bien connue de M. Egoroff trouver un entier N et un ensemble E, telles, que

$$mE > 1 - \eta$$

$$|g(f_{q_n}) - g(f)| < \varepsilon,$$

pour $n > N$ et sur l'ensemble E.

On a donc pour $n < N$ l'inégalité

$$\int_E |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx < \varepsilon.$$

Pour évaluer l'intégrale $\int_{CE} |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx$ nous nous servirons d'inégalité

$$|g(f_n) - g(f)| \leqq M[g(f_n - f) + g(f)]$$

dont la démonstration est immédiate.

On a

$$\int_{CE} |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx \leqq M \int_{CE} g(f_n - f)\,dx + M \int_{CE} g(f)\,dx.$$

et alors

$$\int_0^1 |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx \leqq \varepsilon + M. \int_0^1 g(f_n - f)\,dx + M \int_{CE} g(f)\,dx.$$

L'intégrale $\int_{CE} g(f)\,dx$ étant une fonction absolument continue et l'intégrale $\int_0^1 g(f_n - f)\,dx$ tendent vers zéro, on voit, que

$$\int_0^1 |g(f_{q_n}) - g(f)|\,dx \to 0,$$

Donc

$$\int_0^1 g(f_{q_n})\,dx \to \int_0^1 g(f)\,dx = A,$$

C. q. f. d.

§ 5. Passons maintenant au problème suivant: soit $\{f_n(x)\}$ une suite des fonctions, convergentes presque partout dans l'intervalle $[0, 1]$. Existe-il une fonction (N) $g(x)$, telle, que la suite $\{f_n(x)\}$ soit aussi convergente en moyenne suivant cette fonction?

Dans cet ordre d'idées nous établirons deux propositions.

Théorème. *Si*

1°. *les fonctions $\{f_n(x)\}$ sout mesurables et presque partout finies dans* $[0, 1]$.

2°. *la suite $\{f_n(x)\}$ converge presque partout dans* $[0, 1]$.

3°. *il existe une fonction $g(x)$ de la classe (N_1) telle que les intégrales*

$$\int_0^1 g(f_n)\,dx, \quad \int_0^1 g(-f_n)\,dx$$

existent, et une constante A, telle que

$$\int_0^1 g(f_n)\,dx < A$$

alors *la suite $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne suivant toute fonction $g_1(x)$ de la classe (N_1) pour laquelle*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g_1(x)}{g(x)} = 0".$$

Démonstration. Soit $g_1(x)$ une fonction (N_1) vérifiante la condition

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g_1(x)}{g(x)} = 0.$$

En désignant par μ un nombre positif arbitraire, il existe evidemment un autre nombre positif X, tel qu'on a

(6) $$|x| \geqslant X \supset g_1(x) \leqq \mu . g(x).$$

Les fonctions $g_1(f_n - f)$ étant mesurables, nous allons montrer, quelles sont aussi sommables. En effet dans l'ensemble où $|f_n - f| \leqq X$, la fonction $g_1(f_n - f)$ est bornée et alors sommable, et dans son complementaire cette fonction est d'après la rélation (6) bornée par une fonction sommable.

Soit maintenant ω un nombre positif arbitraire et δ un autre nombre tel, qu'on ait

$$|x| < \delta \supset g_1(x) < \omega.$$

D'après le théorème de M. Egoroff on peut a toute couple δ, η (η étant un nombre positif arbitraire) faire correspondre un entier N et un ensemble E, dout la mesure surpasse $1 - \eta$, ot dans lequelle

$$|f - f_n| < \delta$$

pour $n > N$.

On aura donc pour $n > N$ dans l'ensemble E

$$g_1(f_n - f) < \omega.$$

Envisageons maintenant l'inégalité

$$\int_0^1 g_1(f_n - f)\,dx \leqq \omega + \int_{CE} g_1(f_n - f)\,dx, \qquad (n > N),$$

Soit $(Z_n^{(1)})$ l'ensemble

$$Z_n^{(1)} = E\,[|f_n - f| < X]\,.\,CE$$

et soit

$$Z_n^{(2)} = CE - Z_n^{(1)}.$$

En désignant par L la borne supérieure de $g_1(x)$ dans l'intervalle $[-X, +X]$ nous aurons

$$\int_0^1 g_1(f_n - f)\,dx \leqq \omega + \int_{Z_n^{(1)}} g_1(f_n - f)\,dx + \int_{Z_n^{(2)}} g_1(f_n - f)\,dx \leqq$$

$$\leqq \omega + L . m Z_n^{(1)} + \mu \int_{Z_n^{(2)}} g(f_n - f)\,dx \leqq$$

$$\leqq \omega + L\eta + \mu M . \left[\int_{Z_n^{(2)}} g(f_n)\,dx + \int_{Z_n^{(2)}} g(-f)\,dx \right] \leqq$$

$$\leqq \omega + L\eta + \mu M . \left[\int_0^1 g(f_n)\,dx + \int_0^1 g(-f)\,dx \right] \leqq$$

$$\leqq \omega + L\eta + \mu M \left[A + \int_0^1 g(-f)\,dx \right]. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. La proposition, demontrée plus haut, ne donne pas la solution générale de la question. posée au debut du paragraphe présent, mais elle nous permette sous les conditions du théorème trouver effectivement cette fonction $g_1(x)$.

Ajoutons encore, que la deuxième partie de l'hypothèse peut être remplacée par l'hypothèse moins restrictive, à savoir par la supposition de la convergence „en mesure".

Passons maintenant à la solution générale du problème traité.

Théorème. *Si*

1°. *les fonctions $f_n(x)$ sont mesurables et presque partout finies dans* $[0, 1]$.

2°. *la suite $\{f_n(x)\}$ converge „en mesure" vers la fonction $f(x)$.*

alors

il existe une fonction non bornée $g_1(x)$ de la classe (N_1) suivant laquelle la suite $f_n(x)$ converge en moyenne [1]".

[1]) L'existence de la fonction $g(x)$ de la classe (N), mais bornée, jouissante de la propriété du théorème, est dejà démontrée par M. W. H. Young. Quarterly Journal. T. 44. (1913), p. 137.

Démonstration: Rappelons la définition de la convergence „en mesure“:

Nous dirons, que la suite $\{f_n(x)\}$ des fonctions définies et mesurables dans un ensemble mesurable et borné E converge en mesure vers la fonction $f(x)$, s'il est possible à toute couple des nombres positifs ε, η faire correspondre un entier N tel, que pour tout $n > N$ il existe un ensemble E_n tel, qu'on ait

$$m E_n > m E - \eta$$

$$E_n = E(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

En passant à la démonstration du théorème prenons $\varepsilon = 1$ et envisageons la suite $\eta_k = \dfrac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2 \ldots)$. Soit N_k l'entier, tel, qu'on ait pour $n > N_k$

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

dans un ensemble $E_{n,k}$ dont la mesure surpasse le nombre $1 - \eta_k$. Supposons encore qu'on a $N_k < N_{k+1}$.

Soit n un nombre, vérifiant l'inégalité

$$N_1 < n \leqslant N_2.$$

La mesure de $CE_{n,1}$ étant moindre que η_1, on voit, qu'il existe un entier $p(n)$, tel, que la mesure de l'ensemble des x, pour les quelles

$$p(n) \leqslant |f_n - f|,$$

est moindre que η_2.

Soit

$$p_1 = \max\,[p(N_1 + 1), p(N_1 + 2), \ldots p(N_2)].$$

Envisageons maintenant des nombres n

(7) $$N_1 < n \leqslant N_3,$$

et détérminons un entier $p_2 \geqq 2p_1$ de telle manière, qu'on ait

$$p_2 \leqslant |f_n - f|$$

dans un ensemble, dont la mesure est moindre que η_3, pour les indices n, assujettis à la condition (7).

En continuant ce procédé nous obtenons une suite croissante des nombres entieres p_i, jouissantes des propriètés suivantes:

1°. $p_{i+1} \geqq 2p_i$.

2°. Pour les indices n

$$N_1 < n \leqslant N_i$$

on a

$$p_{i-1} \leqq |f_n - f|$$

dans un ensemble de la mesure moindre que η_i.

Après ces préliminaires nous allons construire la fonction $g(x)$ jouissante des propriétés du théorème précédent.

Soit:

1°. $g(0) = 0$.

2°. $g(x) = g(|x|)$.

3°. $g(p_i) = \sqrt{i}$.

4°. $p_i \leqq x \leqq p_{i+1} \supset g(x) = \sqrt{i} + \dfrac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{p_{i+1} - p_i}(x - p_i)$.

Cette fonction étant de la classe (N) on voit facilement qu'elle est aussi de la classe (N_1), parce qu'on a

$$g(x + y) \leqq 2\,[g(x) + g(y)].$$

Pour démontrer, que les intégrales

$$\int_0^1 g(f_n - f)\, dx$$

existent, envisageons un entier n arbitraire et soit

$$N_i < n \leqslant N_{i+1}.$$

Désignons par Z_k l'ensemble

$$Z_k = E(k - 1 \leqq |f_n - f| < k). \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

On aura pour tout x appartenant à l'ensemble

$$\sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} Z_k$$

la relation

$$g(|f_n - f|) < \sqrt{i+1},$$

et les fonctions $f_n - f$ étant mesurables, il suit, qu'on aura

$$\int\limits_{\sum\limits_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} Z_k} g(f_n - f)\, dx \leqq \frac{\sqrt{i+1}}{(i+1)^2}.$$

Donc

$$\int_0^1 g(f_n - f)\, dx < 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sqrt{i+1}}{(i+1)^2}.$$

Nous voyons donc, que les intégrales $\int_0^1 g(f_n - f)\, dx$ non seulement existent, mais de plus qu'elles sont bornées dans leur ensemble.

En appliquant la proposition précédente et en prenant

$$g_1(x) = [g(x)]^{1-\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

on voit, que la suite $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne suivant la fonction $g_1(x)$.

Remarque 1. On peut en modifiant legérement la dérnière partie du notre raisonnément démontrer, que la fonction $g(x)$ possede dejà cette la propriété, que

$$\int_1^1 g(f_n - f)\, dx \to 0.$$

Remarque 2. Des théorèmes précédents montrent, que toute suite des fonctions $\{f_n(x)\}$ mesurables et presque partout finies convergente en mesure converge aussi en moyenne suivant une certaine fonction (N_1) et inversement, toute suite convergente en moyenne suivant une certaine fonction (N) aussi en mesure. Pour completer ce resultat il faut ajouter, qu'il n'existe pas une fonction $g(x)$ non bornée possédante la propriété suivante: toute suite $\{f_n(x)\}$ convergente en mesure converge aussi en moyenne suivant cette fonction $g(x)$. On peut établir ce point en démontrant, qu'à toute fonction $g(x)$ de la classe (N) il existe une suite $\{f_n(x)\}$ convergente presque partout, qui ne converge pas en moyenne suivant cette fonction. En effet:

Soit $g(x)$ une fonction quelconque de la classe (N), non bornée. On peut déterminer une suite $\{m_n\}$ croissante indéfiniment tel, qu'on a

$$x \geqslant m_n \supset g(x) \geqq n.$$

Soit $f_n(x)$ fonction égale à m_n dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et à zéro dans $\left(\frac{1}{n}, 1\right]$. Or on voit facilement, que la suite $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers zéro. D'autre part on a

$$\int_0^1 g(f_n - f)\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} g(f_n)\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} g(m_n)\, dx = g(m_n) \cdot \frac{1}{n} \geqq 1,$$

donc notre suite n'est pas convergente en moyenne suivant $g(x)$.

§ 6. On a souvent employée des suites convergentes en moyenne dans les cas particuliers

$$g(x) = |x|^p \qquad p \geqslant 0.$$

Pour $p = 2$ M. Fischer[1]) a demontré le premier le théorème du § 1. Pour les $p > 0$ les théorèmes sur la convergence en moyenne a démontré M. Plancherel[2]).

Nous terminons cette note par la remarque suivante: Pour les $p \geqq 0$ les fonctions $g(x) = |x|^{1+p}$ jouissent de la propriété suivante: Si

$$\int_0^1 |f_n - f|^{1+p}\, dx \to 0,$$

alors

$$\int_0^1 |\sigma_n - f|^{1+p}\, dx \to 0,$$

où on a posé

$$\sigma_n = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}.$$

Il s'agit de savoir, si toutes les fonctions $g(x)$ non bornées jouissent de même propriété. On verra, qu'il n'en est rien même s'il s'agit des fonctions de la forme x^{1+p} pour $p < 0$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition suivante: *si $g(x)$ est une fonction de la classe (N) et telle que $\liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, il existe toujours une suite de fonctions $\{f_n\}$ convergeant en moyenne suivant $g(x)$, tandis que la suite $\left\{\sigma_n = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}\right\}$ ne converge pas en mesure.*

En effet, on peut determiner une suite de valeurs $\{x_k\}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(x_k)}{x_k} = 0, \quad \text{et} \tag{8}$$

[1]) C. R. 144 (1907), p. 1022/4.

[2]) Bull. Sc. Math. 1923.

$$(2) \qquad n_k > k \sum_{i=1}^{k-1} x_i \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

où $n_i = Ex_i$.

Posons, pour chaque n de la forme $n_k + i$ $(i = 1, 2, \ldots, n_k)$, $f_n(x) = x_k$ dans l'intervalle $\left(\frac{i-1}{n_k}, \frac{i}{n_k}\right)$ et $= 0$ partout d'ailleurs. Si n n'est pas de la forme précédente, on posera identiquement $f_n(x) = 0$. On voit de suite que, dans ce dernier cas

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx = 0,$$

et, dans le premier, pour $n = n_k + i$ $(i = 1, 2, \ldots n_k)$ on a:

$$\int_0^1 g(f_n)\, dx = \frac{i}{n_k}\, g(x_k) \leqslant 2\frac{g(x_k)}{x_k}.$$

On a donc d'après (1):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(f_n)\, dx = 0.$$

Envisageons, à son tour, la suite de $\{\sigma_n\}$ On a, en vertu de (2) pour tout k et tout x de l'intervalle $0, 1)$:

$$\sigma_{n_k} \leqslant \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leqslant \frac{1}{k}, \quad \text{et:} \quad \sigma_{2n_k} \geqslant \frac{x_k}{2n_k} \geqslant \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que la suite $\{\sigma_n\}$ ne converge pas en mesure.

Réciproquement. Envisageons la suite

$$f_n(x) = \cos nx,$$

et posons $g(x) = |x|$. On voit, que

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sigma_n|\, dx \to 0,$$

pendant qu'il n'existe pas une fonction $g_1(x)$ de la classe (N), telle qu'on ait

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g_1(f_n)\, dx \to 0.$$

En effet, la suite $f_n(x)$ n'est pas convergente en mesure.

Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

§ 1. Propriétés générales.

1. Définition I. *Une famille d'ensembles (non vides) H présente une décomposition semi continue*[1]) *d'un espace métrique compact E, lorsque 1°: E est la somme des ensembles de la famille H, 2°: ces ensembles sont disjoints deux à deux, 3°: étant donnée une suite convergente*[2]) *d'ensembles appartenant à H. il existe dans H un ensemble qui contient la limite de cette suite.*

[1]) M. R. L. Moore appelle la famille H „upper semi-continuous collection"; voir „*Concerning upper semi-continuous collections of continua which do not separate a given set*, Proc. Nat. Acad. Sc. 10 (1924), pp. 356—360, et *Concerning upper semi-continuous collections of continua*, Trans Amer. Math Soc 27 (192), pp. 416—428. M. P. Alexandroff emploie dans le même sens le terme „stetige Zerlegung"; voir *Ueber stetige Abbildungen kompakter Räume,* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 28 (1925, pp. 997—999, et Math. Ann. 96 (1926), pp. 555—571. D'accord avec M. Vietoris je réserve le terme „décomposition continue" pour le cas où une décomposition semi-continue est assujettie à des conditions supplémentaires (précisées au § 2). Voir L Vietoris *Ueber stetige Abbildungen einer Kugelfläche*, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 29 (1926), pp. 443—453. M. Denjoy (Journ. de Math. 7, 1, 1915) emploie le terme famille semi-fermée supérieurement dans un sens analogue, mais sans la restriction 2°.

[2]) Une suite d'ensembles $\{X_n\}$ *converge* vers la limite $\mathrm{Lim}\, X_n$ lorsque $\mathrm{Lim\, inf}\, X_n = \mathrm{Lim\, sup}\, X_n$. $\mathrm{Lim\, inf}\, X_n$ est défini comme l'ensemble de tous les points p pour lesquels il existe une suite $\{p_n\}$ telle que $p_n \varepsilon X_n$ et $\lim p_n = p$. Un point p appartient à $\mathrm{Lim\, sup}\, X_n$, lorsqu'il existe une suite d'entiers croissants $\{k_n\}$ telle que $p \varepsilon \mathrm{Lim\, inf}\, X_{k_n}$. Ces notions sont dues à M. Painlevé. Cf. aussi „ensemble limite" et d'„accumulation" de Janiszewski (Thèse) et „unterer (oberer) abgeschlossene Limes" de M. Hausdorff (*Mengenlehre*, Berlin 1927, p. 146).