Sur une hypothèse de M. Mazurkiewicz.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans sa Note „*Sur la dérivée première généralisée*" (ce volume, p. 145) M. Mazurkiewicz démontre que l'ensemble de discontinuités d'une fonction mesurable $f(x)$ satisfaisant (pour x réels) à la condition

$$(1) \qquad \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0$$

est non dense, et ajoute qu'il est *probablement dénombrable*.

Le but de cette Note est de le démontrer.

D'après le résultat de M. Mazurkiewicz, il existe un intervalle (a, b), tel que

$$(2) \qquad \omega(x) = 0 \quad \text{pour} \quad a < x < b,$$

$\omega(x)$ désignant l'oscillation de la fonction $f(x)$ au point x.

Il suffira évidemment de démontrer que l'ensemble

$$E = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega(x) > 0,\ a < x]$$

est au plus dénombrable.

Soit x un élément de E: nous avons donc $\omega(x) > 0$ et $x - a > 0$, donc $\omega(x)/(x-a) > 0$, et il existe un nombre positif σ, tel que

$$\frac{\omega(x)}{x-a} > \sigma, \quad \text{donc} \quad \omega(x) > \sigma(x-a).$$

Désignons par $E(\sigma)$ l'ensemble

$$(3) \qquad E(\sigma) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega(x) > \sigma(x-a),\ a < x];$$

nous aurons évidemment

$$E = E(1) + E(\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1}{3}) + \ldots,$$

et il suffira de démontrer que les ensembles (3) sont au plus dénombrables pour $\sigma > 0$.

Admettons, par contre, qu'il existe un nombre $\sigma > 0$, tel que l'ensemble $E(\sigma)$ est non dénombrable.

D'après (2), il existe des nombres $\gamma > a$, tels que l'ensemble

$$(4) \qquad \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega(x) > \sigma(x-a),\ a < x < \gamma]$$

est au plus dénombrable (cet ensemble étant vide pour $\gamma = b$). Or, l'ensemble (3) étant non dénombrable, cela ne peut avoir lieu pour tout nombre $\gamma > a$. Il existe donc des nombres $\gamma > a$, pour lesquels l'ensemble (4) est non dénombrable: soit c la borne inférieure de tels nombres γ: il sera évidemment $c \geqslant b > a$.

Il s'ensuit sans peine de la définition du nombre c que l'ensemble

$$(5) \qquad H = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega(x) > \sigma(x-a),\ a < x < c]$$

est au plus dénombrable, et que l'ensemble

$$(6) \qquad \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega(x) > \sigma(x-a),\ a < x < c+d]$$

est non dénombrable, quel que soit le nombre positif d.

Or, il résulte de (1) (pour $x = c$) et de $c > a$ qu'il existe un nombre positif δ, tel que

$$(7) \qquad \delta < c - a$$

et

$$(8) \qquad |f(c+h) - f(c-h)| < \sigma h \quad \text{pour} \quad 0 < h < 2\delta.$$

Soit maintenant ξ un nombre réel, tel que

$$(9) \qquad c < \xi < c + \delta$$

D'après la définition du nombre $\omega(2c-\xi)$, il existe pour le nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta_1 > 0$, tel que

$$(10) \qquad \delta_1 < \delta, \quad \delta_1 < \xi - c, \quad \delta_1 < \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

et que

$$(11) \qquad |f(2c-\xi-t) - f(2c-\xi-t')| < \omega(2c-\xi) + \varepsilon, \quad \text{pour} \quad |t| < \delta_1,\ |t'| < \delta_1.$$

Or, d'après (9) et (10), nous avons pour $|t| < \delta_1$, $|t'| < \delta_1$:

$$0 < \xi - c + t < 2\delta \quad \text{et} \quad 0 < \xi - c + t' < 2\delta,$$

et l'inégalité (8) donne (pour $h = \xi - c + t$, resp. pour $h = \xi - c + t'$):

$$|f(\xi + t) - f(2c - \xi - t)| < \sigma(\xi - c + t) \tag{12}$$

et

$$|f(\xi + t') - f(2c - \xi - t')| < \sigma(\xi - c + t'). \tag{13}$$

Les inégalités (11), (12) et (13) donnent, pour $|t| < \delta_1$, $|t'| < \delta_1$, vu les inégalités (10):

$$|f(\xi + t) - f(\xi + t')| < \omega(2c - \xi) + \varepsilon + \sigma(\xi - c + t) + \\ + \sigma(\xi - c + t') < \omega(2c - \xi) + 2\sigma(\xi - c) + 3\varepsilon.$$

Il en résulte tout de suite que

$$\omega(\xi) \leqslant \omega(2c - \xi) + 2\sigma(\xi - c). \tag{14}$$

Or, d'après (9) et (7), nous avons

$$a < 2c - \xi < c. \tag{15}$$

L'ensemble (5) est, comme nous savons, au plus dénombrable: par conséquent l'ensemble Q de tous les nombres $2c - x$, où $x \varepsilon H$, est aussi au plus dénombrable. Si ξ non εQ, on a évidemment $2c - \xi$ non εH et parsuite, d'après (15) et (5):

$$\omega(2c - \xi) \leqslant \sigma(2c - \xi - a),$$

et la formule (14) donne:

$$\omega(\xi) \leqslant \sigma(\xi - a).$$

Donc, si $\omega(\xi) > \sigma(\xi - a)$, on a $\xi \varepsilon Q$.

ξ étant un nombre quelconque, satisfaisant à l'inégalité (9), nous avons ainsi démontré que l'ensemble

$$\underset{x}{E}\,[\omega(x) > \sigma(x - a),\ c < x < c + \delta] \subset Q$$

est au plus dénombrable. L'ensemble (5) étant aussi au plus dénombrable, cela est incompatible avec le fait que l'ensemble (6) est non dénombrable pour $d > 0$ (donc, en particulier, pour $d = \delta$).

L'hypothèse de M. **Mazurkiewicz** est ainsi démontrée.

La question s'il existe des fonctions non mesurables (L), satisfaisant à la condition (1), reste encore ouverte.

Sur les suites des fonctions convergentes en moyenne.

Par

St. Kaczmarz et L. Nikliborc (Lwów).

Le but de cette note est d'étudier la généralisation de la notion de la convergence en moyenne, donnée par M. **Noaillon**, qui a aussi le premier démontré *deux théorèmes* importants sur ce sujet. Les recherches de M. **Noaillon** ne sont pas jusqu'à ce moment publiées, et la connaissance des ces théorèmes (sans démonstrations) nous devons à M. **Banach**, qui a aussi de son coté démontré [1]) un des ces théorèmes.

§ 1. Envisageons des fonctions $g(x)$, définies dans tout l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ et jouissantes des propriétés suivantes:

1°. $g(x)$ est continue.
2°. $g(0) = 0$,
3°. $|x| \neq 0$ entraîne $g(x) > 0$.
4°. Il existe deux nombres positifs α et A, tels que pour $|x| \geqq \alpha$ on a $g(x) \geqq A$.

Nous appellerons des telles fonctions „*fonctions* (N)“.

Envisageons encore d'après M. **Noaillon** une suite infinie $\{f_n(x)\}$ de fonctions, presque partout finies dans l'intervalle $[0, 1]$, et supposons que les intégrales

$$\int_0^1 g(f_p - f_q)\,dx \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

existent.

[1]) P. Lévy Bull. des Sc. mat. (2), 49 p. 378.