zunimmt. Eine wörtliche Wiederholung der Ueberlegung des § 2 ergibt dann folgendes Resultat:

Jede abgeschlossene Menge F von der Dimension $n \geqslant k$ ist in einem ebenfalls n-dimensionalen Kontinuum C, welches ein stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels ist, topologisch enthalten, die Ergänzung der Menge F zum Kontinuum C geschieht mittels Hinzufügung einer Punktmenge, die einer offenen Teilmenge des k-dimensionalen Würfels homöomorph ist (und also eine durchaus elementare Struktur hat).

Norderney, Pfingsten 1927.

Sur la dérivée première généralisée.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. M. Steinhaus a posé le probléme suivant[1]). *Existe-t-il une fonction de variable réelle $f(x)$ pantachiquement discontinue et telle qu'on ait pour tout x réel*

(1) $$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0\,?$$

Le but de cette Note est de démontrer, que *cette question admet une réponse négative, si l'on suppose $f(x)$ mesurable.*

1. **Lemme.** Soit $\varphi(x)$ une fonction ponctuellement et pantachiquement discontinue dans l'intervalle (α, β). γ, δ étant deux nombres positifs, on peut déterminer un intervalle fermé $\overline{(\alpha_1, \beta_1)} \subset (\alpha, \beta)$ tel qu'à tout $x \,\varepsilon\, \overline{(\alpha_1, \beta_1)}$ correspond un nombre h_x assujéti aux conditions:

(2) $$0 < h_x < \delta$$

(3) $$\left|\frac{\varphi(x+h_x)-\varphi(x-h_x)}{2h_x}\right| > \gamma.$$

3. Démonstration. Soit $x_0 \,\varepsilon\, (\alpha, \beta)$ un point de discontinuité de $\varphi(x)$, $\lambda = \omega(\varphi, x_0)$ l'oscillation de $\varphi(x)$ au point x_0. Déterminons dans (x_0, β) un point de continuité de $\varphi(x)$, x_1, tel que:

(4) $$x_1 - x_0 < \frac{\delta}{\frac{\lambda}{8\gamma}}.$$

[1]) Fund. Math. IV p. 368 probl. 23.

Soit $\eta > 0$ un nombre positif, tel que:

(5) $$\eta < \frac{x_1 - x_0}{2}$$

(6) $$|\varphi(x) - \varphi(x_1)| \leqq \tfrac{1}{8}\lambda \quad \text{pour} \quad x \varepsilon \overline{(x_1 - \eta, x_1 + \eta)}$$

L'oscillation de $\varphi(x)$ au point x_0 étant $= \lambda$, on peut déterminer un point $x_2 \varepsilon (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ tel que $\varphi(x_2)$ soit en dehors de l'intervalle: $(\varphi(x_1) - \frac{3}{8}\lambda, \varphi(x_1) + \frac{3}{8}\lambda)$.

On aura évidemment:

(7) $$|\varphi(x) - \varphi(x_2)| \geqq \frac{\lambda}{4} \quad \text{pour} \quad x \varepsilon \overline{(x_1 - \eta, x_1 + \eta)}.$$

Posons maintenant:

(8) $$\alpha_1 = \frac{x_1 + x_2 - \eta}{2}, \quad \beta_1 = \frac{x_1 + x_2 + \eta}{2}, \quad h_x = x - x_2 \quad \text{pour} \quad x \varepsilon \overline{\alpha_1 \beta_1}.$$

On aura, en tenant compte de (4) et (5):

(9) $$\alpha_1 > \frac{x_1 + x_0 - 2\eta}{2} = x_0 + \frac{x_1 - x_0 - 2\eta}{2} > x_0 > \alpha,$$

(10) $$\beta_1 < \frac{x_1 + x_0 + 2\eta}{2} = x_1 - \frac{x_1 - x_0 - 2\eta}{2} < x_1 < \beta,$$

(11) $$h_x \geqq \frac{x_1 - x_2 - \eta}{2} > \frac{x_1 - x_0 - 2\eta}{2} > 0,$$

(12) $$h_x \leqq \frac{x_1 - x_2 + \eta}{2} < \frac{x_1 - x_0 + 2\eta}{2} < x_1 - x_0 < \delta.$$

Soit $x \varepsilon \overline{\alpha_1 \beta_1}$, alors $x - h_x = x_2$, $x + h_x = 2x - x_2 \,\varepsilon\, \overline{(x_1 - \eta, x_1 + \eta)}$ donc, d'après (4), (7), (12):

(13) $$\left|\frac{\varphi(x + h_x) - \varphi(x - h_x)}{2h_x}\right| \geqq \frac{\lambda}{8h_x} > \frac{\lambda}{8(x_1 - x_0)} > \gamma.$$

$\overline{(\alpha_1 \beta_1)}$ possède par suite les propriétés requises, et le lemme est démontré.

4. Théorème. *L'ensemble des discontinuités d'une fonction mesurable $f(x)$ satisfaisant pour $x \varepsilon (\alpha, \beta)$ à la condition (1) est nonsdense dans tout sous-intervalle de (α, β)* [1].

[1]) Cet ensemble est probablement dénombrable.

5. Supposons, en effet, que cet ensemble est dense dans un intervalle $I \subset (\alpha, \beta)$. D'après un théorème de M. Khintchine [1]) $f(x)$ est en même temps presque partout dérivable, donc à fortiori ponctuellement discontinue dans I. On peut par suite en vertu de notre Lemme, déterminer une suite descendante d'intervalles fermés $\{K_n\}$, $n = 0, 1 \ldots,$ avec $K_0 = I$, telle, qu'a tout $x \varepsilon K_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$ correspond un $h_x^{(n)}$ assujéti aux conditions:

(14) $$0 < h_x^{(n)} < \frac{1}{n},$$

(15) $$\left|\frac{f(x + h_x^{(n)}) - f(x - h_x^{(n)})}{2h_x^{(n)}}\right| > n.$$

L'ensemble $\prod\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ n'est pas vide; soit a un point de cet ensemble. On a:

(16) $$\left|\frac{f(a + h_a^{(n)}) - f(a - h_a^{(n)})}{2h_a^{(n)}}\right| > n; \quad 0 < h_a^{(n)} < \frac{1}{n} \quad \text{pour } n = 1, 2 \ldots$$

Comme $\lim\limits_{n=\infty} h_a^{(n)} = 0$, il s'ensuit:

(17) $$\overline{\lim_{h=0}} \left|\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}\right| = \infty$$

contrairement à (1). c. q. f. d.

[1]) *Fund. Math.* t. IX, p. 217.