than ε. By Theorem 3, eacht set K_i contains an arc C_i from x_i to y_i. But this is impossible by Theorem 4 and a theorem due to H. M. Gehman[1]).

Theorem 12. *If ε is a positive number, then an almost simply cyclic continuous curve contains at most a finite number of mutually exclusive closed and connected sets of diameter greater than ε.*

This theorem is a consequence of Theorem 2 and a theorem due to H. M. Gehman[2]).

[1]) *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Annals of Mathematics, vol. 27 (1925), p. 39, Theorem V.

[2]) Loc cit, Theorem V.

The University of Pennsylvania, Philadelphia, Pa.

Beweis des Satzes, dass jede abgeschlossene Menge positiver Dimension in einem lokal zusammenhängenden Kontinuum von derselben Dimension topologisch enthalten ist.

Von

P. Alexandroff und L. Tumarkin (Moskau).

1. Unter einer *abgeschlossenen Menge* wird im Folgenden ein beliebiger kompakter metrisierbarer topologischer Raum[1]) verstanden. Eine zusammenhängende abgeschlossene Menge heisst ein *Kontinuum*.

Bekanntlich ist ein Kontinuum dann und nur dann stetiges Bild der Einheitsstrecke $0 \leqslant t \leqslant 1$, wenn es *lokal* (oder *im Kleinen*) *zusammenhängend* ist[2]); (im letzteren Satze ist auch die Bedeutung des Begriffes des lokalen Zusammenhanges enthalten).

Der *Dimensionsbegriff* wird im allgemein üblichen Urysohn-Menger'schen Sinne verstanden[3]).

Endlich heisst ein topologischer Raum R_0 in einem anderen

[1]) d. h. ein kompakter topologischer Raum in dem das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist. Vgl. hierzu Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, 1914), Kap. VII, sowie P. Urysohn, Zum Metrisationsproblem (Math. Ann., 94, S. 309) und vor allem P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités cantoriennes (Fund. Math., VII, S. 30—137 und VIII, S. 225—359).

[2]) siehe Hahn, Wiener Berichte, 123, (1924), S. 2433, Mazurkiewicz, Fund. Math., I, (1920), S. 167, Sierpiński, Fund. Math. I, (1920), S. 44, wo sich auch verschiedene Fassungen des Begriffes des lokalen Zusammenhanges finden. Als zusammenfassende Darstellung der ganzen Theorie des lokalen Zusammenhanges sei insbesondere das Buch von Hausdorff, „Mengenlehre" (neue Auflage, Berlin, 1927) erwähnt.

[3]) siehe P. Urysohn's unter 1) zitiertes „Mémoire" sowie K. Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys., 33, 34.

Raume R *topologisch enthalten* falls der Raum R eine dem Raume R_0 homöomorphe Teilmenge R_0^* enthält.

Nach diesen Erläuterungen darf man wohl zum Beweise des im Titel der vorliegenden Arbeit formulierten Satzes schreiten.

2. Da auf Grund eines Urysohn'schen Satzes *jede* abgeschlossene Menge in der „*Fundamentalquader*" des Hilbertschen Raumes (die ein lokalzusammenhängendes Kontinuum ist) topologisch enthalten ist [1]), so genügt es den ausgesprochenen Satz nur für Mengen endlicher Dimension zu beweisen.

Es sei also n eine natürliche Zahl und R_0 eine abgeschlossene Menge von der Dimension n. Sodann kann R_0 als der durch eine gewisse *stetige Zerlegung* [2])

$$\Pi = \Sigma X \tag{1}$$

einer abgeschlossenen nirgendsdichten Teilmenge Π der Einheitsstrecke $I = \{0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *induzierte Raum* [3]) betrachtet werden.

Die Zerlegung (1) soll nun zu einer stetigen Zerlegung der ganzen Strecke I dadurch erweitert werden, dass man ausser der in (1) vorkommenden Mengen X auch noch sämtliche einzelne Punkte der Komplementärintervalle zu Π als Zerlegungseinheiten in Betracht zieht.

Der durch die soeben gewonnene Zerlegung von I induzierte Raum R ist (wie es aus den allgemeinen Eigenschaften der stetigen Zerlegungen unmittelbar folgt) ein stetiges Bild der Einheitsstrecke, also lokal-zusammenhängend; anderseits enthält R eine (durch die Elemente von (1) definierte, folglich) dem Raume homöomorphe Teilmenge R_0^*.

Endlich ist

$$R = R_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i, \tag{2}$$

[1]) Math. Ann., 92, S. 302.

[2]) Siehe: a) R. L. Moore, Amer. Trans., 27, S. 416; b) P. Alexandroff, Proceed. Akad. Amsterdam. 29. S. 998 und c) P. Alexandroff, Math. Ann. 96, S. 555. In der Arbeit (a) werden allerdings nur stetige Zerlegungen *ebener Mengen* betrachtet; auch scheint der für diese ganze Theorie grundlegende Begriff des *induzierten Raumes* zum erstenmal in (b) u. (c) ausdrücklich eingeführt und untersucht zu sein. Weitere Literatur wird bei Kuratowski, Fund. Math. X, S. 255 (Fussnote) und Mazurkiewicz, ibidem, S. 313 u. 318 (Fussnoten) angegeben.

[3]) Math. Ann., 96, S. 557.

wobei Λ_i das homöomorphe Bild des i-ten Komplementärintervalles zur Menge Π ist. Da $\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ offenbar eine eindimensionale F_σ-Menge ist, so kann auf Grund allgemeiner dimensionstheoretischer Sätze [1]) die Dimension von R_0^* (die ja $\geqslant 1$ vorausgesetzt war) durch die Addition von $\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ unmöglich erhöht werden, so dass $\dim R = \dim R_0^* = R_0$ ist, w. z. b. w.

3. Bemerkung. Der soeben bewiesene Satz ist für den Spezialfall, in dem R_0 eine *ebene* Cantorsche Kurve ist, bereits von Herrn Gehman [2]) bewiesen worden.

4. Da man auf Grund eines Satzes von Herrn Hurewicz [3]) annehmen kann, dass jede der Mengen X aus höchstens $n+1$ Punkten besteht, so kann man folgendes zusammenfassendes Ergebnis aussprechen:

Jede n-dimensionale abgeschlossene Menge F kann durch Hinzufügung von Abzählbar-vielen offenen Bögen (deren eventuell zusammenfallende Endpunkte zu F gehören, die aber selbst zu F fremd sind) *zu einem lokal-zusammenhängenden ebenfalls n-dimensionalen Kontinuum C ergänzt werden; C kann dabei als stetiges Bild der Einheitsstrecke so aufgefasst werden, dass bei dieser Abbildung kein Punkt von C mehr als $n+1$ Vorgänger hat. Dagegen sind bestimmt Punkte von C vorhanden, in die je $n+1$ Punkte der Einheitsstrecke abgebildet werden.*

5. Es sei noch folgende Schlussbemerkung gemacht. Man bezeichne durch R_0 eine n-dimensionale abgeschlossene Menge und k irgend eine der Bedingung $1 \leqslant k \leqslant n$ genügendo ganze Zahl. Wenn man die Menge Π des § 2 als Teilmenge des k-dimensionalen Einheitswürfels

$$Q^k = \{0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant 1, \ldots, \quad 0 \leqslant t_k \leqslant 1\}$$

betrachtet, so kann man die Zerlegung (1) zu einer stetigen Zerlegung des ganzen Würfels Q^k erweitern, indem man sämtliche in Π nicht enthaltene Punkte von Q^k als neue Zerlegungseinheiten hin-

[1]) P. Urysohn, Fund. Math., VIII, S. 337. K. Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys., 34, S. 147.

[2]) H. M. Gehman, Concerning the subsets of a plane continuous curve (thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1925).

[3]) Hurewicz, a. a. O., S. 1017.

[4]) Proceed. Kon. Akademie Amsterdam, 29, S. 1014.

zunimmt. Eine wörtliche Wiederholung der Ueberlegung des § 2 ergibt dann folgendes Resultat:

Jede abgeschlossene Menge F von der Dimension $n \geqslant k$ ist in einem ebenfalls n-dimensionalen Kontinuum C, welches ein stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels ist, topologisch enthalten, die Ergänzung der Menge F zum Kontinuum C geschieht mittels Hinzufügung einer Punktmenge, die einer offenen Teilmenge des k-dimensionalen Würfels homöomorph ist (und also eine durchaus elementare Struktur hat).

Norderney, Pfingsten 1927.

Sur la dérivée première généralisée.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. M. Steinhaus a posé le probléme suivant[1]). *Existe-t-il une fonction de variable réelle $f(x)$ pantachiquement discontinue et telle qu'on ait pour tout x réel*

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0 ? \tag{1}$$

Le but de cette Note est de démontrer, que *cette question admet une réponse négative, si l'on suppose $f(x)$ mesurable.*

1. Lemme. Soit $\varphi(x)$ une fonction ponctuellement et pantachiquement discontinue dans l'intervalle (α, β). γ, δ étant deux nombres positifs, on peut déterminer un intervalle fermé $\overline{(\alpha_1, \beta_1)} \subset (\alpha, \beta)$ tel qu'à tout $x \,\varepsilon\, \overline{(\alpha_1, \beta_1)}$ correspond un nombre h_x assujéti aux conditions:

$$0 < h_x < \delta \tag{2}$$

$$\left| \frac{\varphi(x+h_x)-\varphi(x-h_x)}{2h_x} \right| > \gamma. \tag{3}$$

3. Démonstration. Soit $x_0 \,\varepsilon\, (\alpha, \beta)$ un point de discontinuité de $\varphi(x)$, $\lambda = \omega\,(\varphi, x_0)$ l'oscillation de $\varphi(x)$ au point x_0. Déterminons dans (x_0, β) un point de continuité de $\varphi(x)$, x_1, tel que:

$$x_1 - x_0 < \frac{\delta \cdot \lambda}{8\gamma}. \tag{4}$$

[1]) Fund. Math. IV p. 368 probl. 23.