forme $CPC\ldots PE$[1]). Les ensembles P_1 coïncident donc avec les ensembles (A) (linéaires), les ensembles P_2 — avec les ensembles qui sont projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A). On démontre dans la théorie des ensembles projectifs qu'il existe un ensemble P_n (plan) universel[2]). En utilisant cet ensemble et en modifiant légèrement notre démonstration, on arrive au théorème suivant:

Il existe pour tout nombre naturel n un ensemble de nombres réels H_n qui est un C_{n-1}, tel que tout ensemble linéaire P_n est une image univoque et continue de l'ensemble H_n (et inversement).

Il est à remarquer qu'il n'existe aucun ensemble linéaire H_ω qui jouirait de la propriété suivante: tout ensemble projectif (linéaire) est une image univoque et continue de l'ensemble H_ω et inversement. (En effet, un tel ensemble H_ω devrait être lui-même projectif, donc un P_n. Or, on démontre dans la théorie des ensembles projectifs que les images univoques et continues des ensembles P_n sont encore des ensembles P_n). Or, on peut démontrer qu'il existe un ensemble linéaire S (non projectif), tel que tout ensemble linéaire qui est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles projectifs est une image univoque et continue de l'ensemble S et inversement.

[1]) Quant à la définition de ces ensembles, voir N. Lusin *Fund. Math.* t. X, p. 90. Les ensembles P_n coïncident avec les ensembles de la classe $\mathscr{H}_{2n+2}$ que j'ai introduit dans ma note des *Fund. Math.* t VII, p. 237.

[2]) Cela résulte tout de suite de l'existence d'un ensemble (A) universel dans l'espace à $n > 1$ dimensions (Cf. N. Lusin, *Fund. Math.* t. X, p. 80, Remarque I; W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. VII, p. 241).

Sur les produits des images continues des ensembles $C(A)$.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Si $E = E_1 E_2 E_3 \ldots$, où E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles linéaires qui sont des images continues des ensembles linéaires CA*[1]), *l'ensemble E est de même nature.*

L'idée de notre démonstration sera basée sur celle, par laquelle M. N. Lusin a démontré que le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles analytiques est un ensemble analytique[2]). Elle s'applique encore aux ensembles projectifs des classes supérieures.

Soit n un nombre naturel donné. D'après l'hypothèse sur les ensembles E_n, il existe un ensemble CA linéaire, soit Q_n, et une fonction $g_n(x)$, continue dans Q_n telle que $E_n = g_n(Q_n)$[3]). L'ensemble X de tous les nombres réels est, comme on sait, une image univoque et continue de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$. Il existe donc une fonction $h(x)$, continue dans N, telle que $h(N) = X$. Désignons par X_n l'ensemble de tous les nombres x de N, tels que $h(x) \varepsilon Q_n$; Q_n étant un CA et la fonction $h(x)$ étant continue dans N, on voit sans peine que X_n est un CA. Or, on a évidemment $h(X_n) = Q_n$, donc $E_n = g_n(h(X_n))$, et la fonction $f_n(x) = g_n(h(x))$ est continue dans X_n.

Il existe donc, pour tout nombre naturel n, un ensemble X_n

[1]) On apelle *ensembles* CA les ensembles complémentaires aux ensembles (A)

[2]) *Fund. Math.* t. X, p. 40 et 41.

[3]) g étant une fonction, définie dans l'ensemble Q, $g(Q)$ désigne l'ensemble de toutes les valeurs que prend g dans Q

de nombres irrationels de l'intervalle $(0, 1)$ qui est un CA, et une fonction $f_n(x)$, continue dans X_n, telle que

(1) $$E_n = f_n(X_n), \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit x un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$,

(2) $$x = \frac{1|}{|\nu(1, x)} + \frac{1|}{|\nu(2, x)} + \frac{1|}{|\nu(3, x)} + \ldots$$

— son développement en fraction continue. Posons (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\varphi_n(x) = \frac{1|}{|\nu(1 . 2^{n-1}, x)} + \frac{1|}{|\nu(3 . 2^{n-1}, x)} + \frac{1|}{|\nu(5 . 2^{n-1}, x)} + \ldots$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ seront évidemment définies et continues dans l'ensemble N.

Désignons par N_n l'ensemble de tous les nombres x de N, tels que $\varphi_n(x) \varepsilon X_n$. La fonction $\varphi_n(x)$ étant continue dans N et X_n étant un CA, l'ensemble N_n est aussi un CA. Donc aussi l'ensemble

(3) $$N_0 = N_1 N_2 N_3 \ldots$$

est un CA.

Désignons par X_0 l'ensemble de tous les nombres x de N_0, tels que

$$f_n(\varphi_n(x)) = f_1(\varphi_1(x)), \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

nous aurons donc

(4) $$f_n(\varphi_n(X_0)) = f_1(\varphi_1(X_0)), \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les fonctions $f_n(\varphi_n(x))$ étant continues dans l'ensemble N_0, on voit sans peine que l'ensemble X_0 est fermé dans N_0. Donc, N_0 étant un CA, X_0 est aussi un CA. Or, je dis que

(5) $$f_1(\varphi_1(X_0)) = E.$$

On a, d'après (3), $X_0 \subset N_0 \subset N_n$, d'où (d'après la définition de l'ensemble N_n): $\varphi_n(X_0) \subset \varphi_n(N_n) = X_n$, donc, d'après (1): $f_n(\varphi_n(X_0)) \subset f_n(X_n) = E_n$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne, d'après (4):

$$f_1(\varphi_1(X_0)) \subset E_n \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc (d'après $E = E_1 E_2 E_3 \ldots$):

$$f_1(\varphi_1(X_0)) \subset E.$$

Pour démontrer la formule (5) il suffira donc de prouver que

(6) $$f_1(\varphi_1(X_0)) \supset E.$$

Soit donc y_0 un élément de E. Nous avons donc $y_0 \varepsilon E_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ D'après (1), il existe donc, pour tout indice n, un nombre x_n de X_n, tel que

(7) $$y_0 = f_n(x_n), \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons

$$\xi = \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \frac{1|}{|q_3} + \ldots,$$

où les nombres q_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont définis par la formule:

$$q_{(2m-1)2^{n-1}} = \nu(m, x_n), \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots;$$

nous aurons évidemment, d'après (2):

$$\nu((2m-1) . 2^{n-1}, \xi) = \nu(m, x_n), \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donc, d'après la définition des fonctions $\varphi_n(x)$ (et d'après (2)):

(8) $$\varphi_n(\xi) = \frac{1|}{|\nu(1, x_n)} + \frac{1|}{|\nu(2, x_n)} + \frac{1|}{|\nu(3, x_n)} + \ldots = x_n,$$

et parsuite, d'après $x_n \varepsilon X_n$:

$$\varphi_n(\xi) \varepsilon X_n, \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui prouve (d'après la définition de l'ensemble N_n) que $\xi \varepsilon N_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (3): $\xi \varepsilon N_0$.

Or, de (8) et (7) résulte que

(9) $$f_n(\varphi_n(\xi)) = f_n(x_n) = y_0, \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots:$$

d'après la definition de l'ensemble X_0 nous concluons donc que $\xi \varepsilon X_0$. Or, de (9) résulte que

$$f_1(\varphi_1(\xi)) = y_0:$$

nous avons donc

$$y_0 \varepsilon f_1(\varphi_1(X_0)).$$

La formule (6), et parsuite aussi la formule (5), est ainsi établie.

L'ensemble X_0 étant un CA et la fonction $f_1(\varphi_1(x))$ étant continue dans X_0, la formule (5) prouve que l'ensemble E est une image continu d'un ensemble CA, c. q. f. d Notre théorème est ainsi démontré.

Les ensembles linéaires qui sont des images continues des ensembles CA (linéaires) coïncidant avec les projections orthogonales des ensembles CA plans [1]), il résulte tout de suite de notre théorème qu'*un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires, dont chacun est une projection d'un ensemble plan CA, est un ensemble de même nature.* Cela résoût le problème 41 posé dans le vol. VIII de ce journal (p. 376).

Remarquons encore qu'en utilisant les propriétés connues des ensembles projectifs, on pourrait appliquer notre démonstration pour prouver la proposition suivante:

Un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles P_n est un ensemble P_n (pour $n = 1, 2, 3, \dots$) [2]).

Il en résulte sans peine que *le résultat d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplications d'ensembles, effectuées (dans un ordre quelconque) en partant des ensembles projectifs de classe n, est toujours un ensemble projectif de classe $n+1$ (à la fois P_{n+1} et C_{n+1}).*

En effet, désignons par $\mathcal{K}_n$ la plus petite famille $\mathcal{K}$ d'ensembles jouissant de deux propriétés suivantes:

1) Tout ensemble projectif de classe n appartient à $\mathcal{K}$.

2) Si les ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ appartiennent à $\mathcal{K}$, leur somme $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ et leur produit $E_1 E_2 E_3 \dots$ appartient à $\mathcal{K}$.

Les ensembles complémentaires des ensembles de classe n étant des ensembles de classe n, il résulte sans peine de la définition de la classe $\mathcal{K}_n$ qu'elle jouit encore de la propriété suivante:

3) La différence de deux ensembles appartenant à $\mathcal{K}_n$ appartient à $\mathcal{K}_n$ [3]).

La famille $\mathcal{P}_{n+1}$ de tous les ensembles P_{n+1} étant une de familles $\mathcal{K}$ satisfaisant aux conditions 1) et 2), nous avons $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. De même on prouve que $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$.

Remarquons enfin qu'on pourrait démontrer que *le résultat d'une opération A effectuée sur les ensembles P_n est toujours un P_n.*

[1]) Voir: *Fund. Math.* t. VII, p. 239.

[2]) Pour la définition des ensembles P_n, voir ce volume, p. 121.

[3]) Cf. la démonstration de la propriété analogue de la classe K_4: *Fund. Math.* t. VIII, p. 367 et 368.

A characterization of continuous curves by a property of their open subsets [1]).

By

R. L. Wilder (Ann Arbor, Michigan, U. S. A).

Definition. If K and N are subsets of a point set M, then K and N are *separated in M in the weak sense* provided M contains no connected subset which contains points of both K and N. The sets K and N are *separated in M in the strong sense* provided M is the sum of two mutually separated [2]) sets X and Y which contain K and N, respectively.

Example. Let M_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ be the set of all points on the straight line interval connecting the points $(1/n, 0)$, $(1/n, 1)$ of the plane. Let A, B and C be, respectively the points $(0, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, 1)$. Let

$$M = A + B + \sum_1^{\infty} M_n,$$
$$K = A + B,$$
$$N = C.$$

Here M is the sum of two mutually separated sets $X = M_1$ and $Y = M - M_1$, so that K and N are separated in M in the strong sense. However, if $K = A$ and $N = B + C$, M contains no connected set which contains points of both K and N, nor does there exist a separation of M into mutually separated sets containing, respectively, K and N. In this case K and N are separated in M in the weak sense, but not in the strong sense

It is the purpose of this note to show that continuous curves *(lignes de Jordan)* may be characterized by the following property

[1]) Presented to the American Mathematical Society, April 2, 1926.

[2]) Two sets are *mutually separated* if they have no point in common and neither contains a limit point of the other.