La somme de deux continus irréductibles.

Par

Piotr Szymański (Varsovie).

La note „*Sur les constituants des ensembles situés sur des continus*“ [1]) et la note présente forment la partie principale de ma Thèse présentée à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de docteur en philosophie.

Je tiens à exprimer ici mon affectueuse gratitude à M. Kuratowski pour ses précieux conseils concernant mon travail et pour m'avoir aidé si complaisamment dans la rédaction de ces articles.

Je m'occupe dans cette note du problème suivant:

„*Si les continus C_1 et C_2 sont irréductibles (ac) et (cb) respectivement, quelles conditions doivent être remplies, pour que le continu $C = C_1 + C_2$ soit irréductible (ab)* [2]).

Le premier théorème concernant ce sujet se trouve dans la Thèse de Janiszewski [3]):

Etant donnés deux continus irréductibles (ac) et (cb), n'ayant qu'un seul point commun c, leur somme est un continu irréductible (ab)“.

Mais il est évident que le théorème en question n'épuise pas le sujet. Considérons en effet l'exemple suivant:

Exemple I. Soient A_1, A_2 et K les ensembles de points (x, y) définis par les conditions suivantes:

$$y = \sin\frac{1}{x}, \qquad -1 \leqslant x < 0 \quad \text{pour} \quad A_1$$

$$y = \sin\frac{1}{x}, \qquad 0 < x \leqslant 1 \quad \text{„} \quad A_2$$

$$-1 \leqslant y \leqslant 1, \qquad x = 0 \quad \text{„} \quad K.$$

[1]) Ce journal, t. X, p. 363—379.

[2]) C est un continu irréductible (ab) s'il contient les points a et b, tandis qu'aucun vrai sous-continu de C ne les contient simultanément.

[3]) S. Janiszewski. *Sur les continus irréductibles entre deux points.* Paris 1911 (Thèse), th. IV, p. 40.

En désignant par a et b les points $(-1, -\sin 1)$ et $(1, \sin 1)$ et par p un point quelconque de K, on voit aisément, que les continus $C_1 = A_1 + K$ et $C_2 = A_2 + K$ sont irréductibles $(a\,p)$ et $(b\,p)$ respectivement [1]) et que leur somme $A_1 + K + A_2$ est irréductible (ab). Sur cet exemple le produit des continus C_1 et C_2 n'est pas un seul point (comme dans l'énoncé de Janiszewski); le fait que la somme $C_1 + C_2$ est irréductible tient à la propriété suivante.

Désignons, en général, par $I(a, C)$ l'ensemble de tous les points x tels, que le continu C est irréductible (ax). Les continus C_1 et et C_2 vérifient la condition:

$$(\mathfrak{N}) \qquad C_1\, C_2 \subset I(a, C_1) \,.\, I(b, C_2).$$

C'est cette condition $(\mathfrak{N})$ qui suffit pour que la somme $C = C_1 + C_2$ soit irréductible (ab) dans les cas où le continus C_1 et C_2 sont bornés [2]).

Quant aux continus *non-bornés*, ladite condition devient insuffisante, comme le prouve l'exemple suivant [3]).

Exemple II. Soit K_1 le continu indécomposable de M. Knaster [4]),

[1]) Ibid. p. 35, ou C. Kuratowski. *Théorie des continus irréductibles I*, Fund. Math. III p. 201.

[2]) C'est M. Kuratowski, qui a démontré ce théorème dans ses leçons professées à l'Université de Varsovie en 1923. Cf. aussi J. R. Kline, *Concerning the sum of two continua each irreducible between the same pair of points*, Fund. Math. VII. p. 314. M. Kline prouve (pour le cas du plan) que la condition $(\mathfrak{N})$ est aussi nécessaire pour que $C_1 + C_2$ soit irréductible (ab), si l'on suppose cette condition appliquée aux continus $\overline{C_1 - C_2}$ et $\overline{C_1 + C_2 - \overline{C_1 - C_2}}$ dont la somme est aussi $C_1 + C_2$. Le même théorème a été démontré par M. Yoneyama (The Tohôku Mathematical Journal, Sendai, Japan, Vol. 12, 1917) dans les hypothèses que les continus C_1 et C_2 sont bornés et ne renferment pas de continus indécomposables. M. Yoneyama donne en même temps quelques conditions suffisantes pour que la somme $C_1 + C_2$ soit irréductible, en se bornant aussi aux continus soumis à ces hypothèses speciales.

[3]) La forme actuelle de cet exemple est due à M. Kuratowski.

[4]) Cf. C. Kuratowski: *Théorie des continus irréductibles I*, Fund. Math. III. p. 216. En partant du segment $(0,1)$ de l'axe X, on obtient ce continu comme il suit:

Soit E_n $(n \geqslant 0)$ l'ensemble de points du segment $\left(\frac{2}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}\right)$ de l'axe de X, dont les abscisses peuvent être écrites dans le système de numération à base *5* sans chiffres *1* et *3*. F_n désigne l'ensemble des points e tels que $1 - e$

construit sur le segment vT issu de l'origine v, dont la longueur et le coefficient angulaire sont 1 et $\frac{3}{\sqrt{40}}$ respectivement.

Soit K l'ensemble de points (x, y), où:

$$x = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{y} + \frac{1}{2}; \quad -1 \leqslant y < 0$$

et soit I le segment $(0,1)$ de l'axe X.

L'ensemble $K_2 = I + K$ est un continu irréductible. En désignant par m et n les points $\left(\frac{6}{35}\sqrt{10}; \frac{9}{35}\right)$ et $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 1, -1\right)$ appartenant à K_1 et K_2 respectivement, on voit immédiatement que

$$(1) \qquad K_1\, K_2 - v \subset I(m, K_1) \,.\, I(n, K_2).$$

Envisageons maintenant une suite $\{R_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ des continus R_n, chacun formé de deux demi-circonférences contenues dans K_1: la première décrite du point $p_n\,(5^{-n-1}\sqrt{10}, 0, 3 \,.\, 5^{-n})$ et tangente à l'axe X au point $q_n\,(5^{-n-1}\sqrt{10}, 0)$, la seconde décrite du point $p\left(\frac{3}{35}\sqrt{10}, \frac{9}{70}\right)$; les deux passant par le point $r_n\left(\frac{2}{7 \,.\, 5^n}\sqrt{10}, \frac{3}{7 \,.\, 5^n}\right)$.

L'ensemble d'accumulation de tous les R_n forme une demi-circonférence R_0 contenue dans K_1 et passant par l'origine et par le point m. Puisque tous les R_n ont des points communs avec K_2, l'ensemble $S = K_2 + \sum_{n=0}^{n=\infty} R_n$ est un continu; de plus v appartenant à R_0, $S - v$ est connexe.

Transformons le plan par inversion ayant v comme centre, et posons (Fig. 1):

$$C_1 = (K_1 - v)^*, \quad C_2 = (K_2 - v)^*, \quad a = m^*, \quad b = n^{*}\ {}^{1}).$$

appartient à E_n. Pour un n donné on décrit du point $\frac{7}{10} \,.\, 5^{-n}$ des demi-circonférences au-dessous de l'axe X par chaque point de E_n; de la même manière, on décrit des demi-circonférences au-dessus de l'axe X, du point $1 - \frac{7}{10} 5^{-n}$, par chaque point de F_n. L'ensemble-somme de toutes ces demi-circonférences $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est le continu indécomposable demandé.

[1]) Nous employons ici la notation E^* pour l'ensemble-image de E. Cf. C. Kuratowski, *Sur la méthode d'inversion...*, Fund. Math. IV, p. 151.

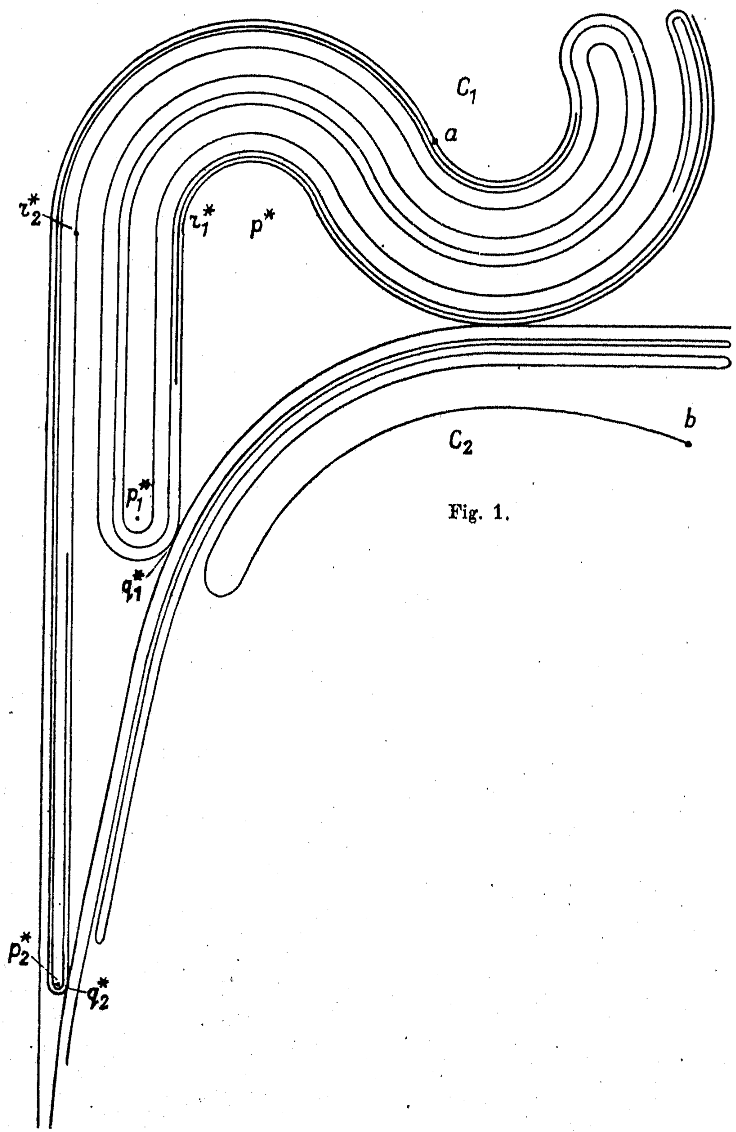

Fig. 1.

Si le continu borné K contient le centre d'inversion v, on a, comme il est aisé de voir, toujours les relations:

(2) $$[I(p,K)-v]^* = I[p^*,(K-v)^*]; \quad \text{et}$$

(3) $$I^*(p,K) \subset I[p^*,(K-v)^*],$$

suivant que $I(p,K)$ contient le point v ou non.

En se basant sur ces propositions et sur la relation (1), on voit immédiatement que les continus C_1 et C_2, qui viennent d'être définis, vérifient la condition ($\mathfrak{N}$). Cependant la somme C_1+C_2, qui contient un vrai sous-continu $(S-v)^*$ renfermant a et b, est un continu réductible entre a et b.

Il s'impose donc d'une façon naturelle le problème de soumettre les continus C_1 et C_2 à des conditions supplémentaires, de manière que la somme C_1+C_2 soit irréductible (ab). Considérons à ce but les propriétés suivantes des continus C_1 et C_2 de l'exemple II:

α) *$C_1 - I(a,C_1)$ contient des continus non-bornés.*

β) *$I(a,C_1)$ est non-borné.*

γ) *$I(a,C_1)$ est non-fermé et $\overline{I(a,C_1)}$ est un continu indécomposable*[1].

δ) *l'ensemble $C_1 C_2$ est infini (dénombrable).*

Il est aisé de voir que chacune des propriétés α), β), γ) est indépendante de deux autres. D'ailleurs pour les propriétés α) et β) on a la proposition:

„Si le continu C est non-borné et $I(a,C)$ est borné, $C - I(a,C)$ contient des continus non-bornés". C'est une conséquence immédiate de la proposition générale: *si le continu C est non-borné et $M \subset C$ est borné, $C-M$ contient des continus non-bornés* [2])

Pour prouver ladite indépendance des propriétés α), β), γ), il suffit évidemment de donner des exemples convenables. Nous nous bornerons ici à construire un continu qui possède les propriétés β) et γ) sans qu'il possède la propriété α).

A ce but nous transformons par inversion le continu K_1 déjà cité (Exemple II) [3]). Le centre d'inversion est un point quelconque $w \varepsilon I(m,K_1)$.

Posons:

$$a = m^* \quad \text{et} \quad C = (K_1 - w)^*.$$

Selon la relation (2) on a

$$[I(m,K_1) - w]^* = I(a,C),$$

[1]) La deuxième partie de la propriété γ) est une conséquence de la première. C. Kuratowski. *Théorie des continus irréductibles* II, théor. II, Fund. Math. X.

[2]) Voir ma note: *Sur les constituants des ensembles situés sur des continus arbitraires* Fund. Math. v: X, p. 366.

[3]) On peut faire usage du continu plus simple $\mathfrak{B}$ construit par M. Knaster. Fund. Math. V, p. 40.

donc $I(a, C)$ n'est pas fermé et, puisque w est un point d'accumulation de $I(m, K_1)$, $I(a, C)$ est non-borné. C possède ainsi les propriétés β) et γ). Si $C - I(a, C)$ contenait un continu non-borné L, l'ensemble $L^* + w$ serait un vrai sous-continu [1]) de K_1 joignant m à w; mais ceci est impossible, puisque $w \,\varepsilon\, I(m, K_1)$, c. q. f. d.

Il résulte des théorèmes I—IV de cet ouvrage que chacune des conditions α), β), γ), δ) est essentielle pour que la somme $C_1 + C_2$ soit réductible entre a et b.

Avant de passer à la démonstration de ces théorèmes, nous prouverons quelques propositions auxiliaires concernant les ensembles $\mathfrak{K}$ [2]).

Lemme 1 *Soit $S = M + N$, où M et N sont fermés, si $AN = 0$ et S est un $\mathfrak{K}(A, B)$ tandis que M n'en est pas un, l'ensemble M est un $\mathfrak{K}(A, N)$.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que M n'est pas un $\mathfrak{K}(A, N)$, c.-à-d. que:

$$M = P + Q, \quad PQ = 0, \quad AM \subset P = \overline{P}, \quad MN \subset Q = \overline{Q}.$$

Comme M n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$ on a

$$M = R + T, \quad RT = 0, \quad AM \subset R = \overline{R}, \quad MB \subset T = \overline{T}.$$

Il résulte de ces décompositions que $M = PR + Q + T$, par conséquent:

$$C = U + V, \quad \text{où} \quad U = PR$$

et

$$V = Q + T + N.$$

Les ensembles U et V étant fermés, il en résulte que, contrairement à l'hypothèse, S n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$. puisque:

$$UV = PRN \subset PRMN \subset PRQ = 0 \quad (MN \subset Q)$$
$$AS = AM \subset PR = U$$
$$BS = BM + BN \subset T + N \subset V$$

Ainsi le lemme est démontré.

[1]) B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. V, p. 23.

[2]) Selon M. Mazurkiewicz. (Cf. aussi L. Vietoris *Stetige Mengen.* Monatsh. f. Math. u. Phys. B. XXXI), si les ensembles A et B sont fermés et disjoints, on désigne par $\mathfrak{K}(A, B)$ tout ensemble S fermé, qui ne peut être décomposé en deux ensembles M et N fermés, disjoints et tels, que $AS \subset M$ et $BS \subset N$. (Il est évident que S étant un $\mathfrak{K}(A, B)$, A et B ont des points communs avec S).

Corollaire. *Si: 1° S est un $\mathfrak{K}(A, B)$, 2° $S = M + N$ où $M = \overline{M}$, $N = \overline{N}$ et $AN = BM = 0$, l'ensemble M est un $\mathfrak{K}(A, N)$.*

En effet, M n'est pas un $\mathfrak{K}(A, B)$ puisque $MB = 0$.

Nous ferons usage dans la suite de la propriété suivante des ensembles $\mathfrak{K}$ signalée par M. Mazurkiewicz [1]):

(π). *Tout $\mathfrak{K}(A, B)$ borné contient un sous-continu joignant A à B.*

Lemme 2. *Soit S un $\mathfrak{K}(A, B)$; si A est borné et S ne contient aucun sous-continu joignant A à B, alors S contient un continu non-borné K tel que $KA \neq 0$.*

Démonstration. Selon (π), S est non-borné. Soit v non $\varepsilon\, S$. (Nous laissons de côté le cas banal où S renferme l'espace entier). Transformons l'espace par inversion de centre v. Il est aisé de voir que l'ensemble $S^* + v$ est un $\mathfrak{K}(A^*, B^* + v)$ *borné*; par conséquent $S^* + v$ contient un sous-continu L joignant A^* à $B^* + v$ (th. (π)).

D'autre part $v \,\varepsilon\, L$.

En effet, dans le cas contraire, S contiendrait un continu L^* joignant A à B, contrairement à l'hypothèse.

Soit T un constituant [2]) de $L - v$ ayant des points communs avec A^*.

Alors $J(T, v) \neq 0$ [3]), c.-à-d. $v \,\varepsilon\, T$.

Comme T est connexe et $T \subset \overline{T} - v \subset \overline{T}$, l'ensemble $\overline{T} - v$ est connexe [4]), donc $K = (\overline{T} - v)^*$ est un sous-continu non-borné [5]) de S. Mais $TA^* \neq 0$. donc $AK \neq 0$, ce qui démontre le lemme.

Corollaire. *Soit S un $\mathfrak{K}(a, B)$ et T le constituant du point a dans S; si $TB = 0$, T est non-borné.*

Lemme 3. *Soit C un continu non-borné, $a \,\varepsilon\, C$ et v non $\varepsilon\, C$; pour que*

$$I^*(a, C) + v = I(a^*, C^* + v),$$

[1]) C. R. vol. CLI, ou Janiszewski, Thèse p. 31—33. La forme actuelle de ce théorème est due à M. Kuratowski; dans l'énoncé de M. Mazurkiewicz A et B désignent des points.

[2]) Le constituant du point p dans l'ensemble M, c'est l'ensemble de tous les points $x \,\varepsilon\, M$ qui peuvent être unis avec p par un continu situé dans M.

[3]) Voir ma note citée, th. I.

[4]) Cf. F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre, p. 245.* Il est aisé de voir que dans les conditions du th. I, de ma note citée, l'ensemble $\overline{MS}$ est connexe. (Conformément aux notations de ce théorème).

[5]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. V. p 24.

il faut et il suffit que l'ensemble $P(a, C) = C - I(a, C)$ ne contienne aucun continu non-borné.

Démonstration. Supposons que $P(a, C)$ ne contient aucun continu non-borné. Nous prouverons d'abord que

$$v \varepsilon I(a^*, C^* + v).$$

En effet, dans le cas contraire $P(a^*, C^* + v)$ contiendrait un continu K joignant a^* à v. En désignant par T le constituant de a^* dans $K - v$, on aurait $v \varepsilon \overline{T}$ et $\overline{T} - v$ serait connexe [1]). Donc $(\overline{T} - v)^*$ serait un continu non-borné [2]) situé dans $P(a, C)$, contrairement à l'hypothèse. Nous avons démontré ainsi que $v \varepsilon I(a^*, C^* + v)$.

Soit maintenant $x \varepsilon I^*(a, C)$ et supposons que x *non* $\varepsilon I(a^*, C^* + v)$. Il existe alors un continu $L \subset P(a^*, C^* + v)$ joignant a^* à x. Puisque v *non* εL, L^* est un continu *borné*, donc un vrai sous-continu du continu *non-borné* C joignant a et x^*, ce qui est impossible, puisque $x^* \varepsilon I(a, C)$.

Nous avons ainsi démontré l'inclusion

$$I^*(a, C) + v \subset I(a^*, C^* + v).$$

L'inclusion inverse se démontre facilement. La suffisance de notre condition peut donc être regardée comme établie.

Supposons maintenant que $P(a\, C)$ contient un continu non-borné L. On peut toujours poser $a \varepsilon L$. Alors $L^* + v$ est un vrai sous-continu de $C^* + v$ joignant a^* à v, par conséquent v *non* $\varepsilon I(a^*, C^* + v)$. Cela contredit l'égalité $I^*(a, C) + v = I(a^*, C^* + v)$. Donc la condition est aussi nécessaire pour que cette égalité subsiste.

Théorème I. *Soient C_1 et C_2 deux continus irréductibles satisfaisant à la condition $(\mathfrak{N})$; si $P(a, C_1)$ et $P(b, C_2)$ ne renferment aucun continu non-borné, la somme $C = C_1 + C_2$ est un continu irréductible $(a\, b)$.*

Démonstration. Soit v *non* εC. Transformons l'espace par inversion ayant v comme centre et désignons par K_i le continu C_i^* ou $C_i^* + v$ selon que C_i est borné ou non $(i = 1, 2)$. De la même manière désignons par I_1^*, resp. I_2^*, l'ensemble $I^*(a, C_1)$ ou $I^*(a, C_1) + v$, resp. l'ensemble $I^*(b, C_2)$ ou $I^*(b, C_2) + v$, suivant que le continu C_1, resp. C_2, est borné ou non. Puisque:

$$0 \neq C_1 C_2 \subset I(a, C_1) \,.\, I(b, C_2)$$

[1]) V. ma note citée, th. I, et la remarque faite dans la note présente, p. 7, concernant ce th.

[2]) B. Knaster et C. Kuratowski. l. c. p. 24.

selon la propriété $(\mathfrak{N})$, on a

$$0 \neq K_1 K_2 \subset I_1^* I_2^*.$$

Mais dans tous les cas:

$$I_1^* = I(a^*, K_1) \quad \text{et} \quad I_2^* = I(b^*, K_2)$$

selon le lemme 3, donc

$$0 \neq K_1 K_2 \subset I(a^*, K_1)\; I(b^*, K_2).$$

Les continus bornés K_1 et K_2 satisfaisant à la condition $(\mathfrak{N})$, leur somme $K_1 + K_2 = K$ est irréductible $(a^* b^*)$ selon le théor. de M. M. Kuratowski et Kline; donc

$$b^* \varepsilon I(a^*, K).$$

En invertant le continu K du point v, on obtient

$$b \varepsilon I^*(a^*, K)$$

et, en tenant compte des relations (2) ou (3), il vient

$$I^*(a^*, K) \subset I[a, (K - v)^*] = I(a, C),$$

donc

$$b \varepsilon I(a, C),$$

c. à. d. C est irréductible $(a\, b)$.

Théorème II. *Soient C_1 et C_2 deux continus satisfaisant à la condition $(\mathfrak{N})$, si $I(a, C_1)$ et $I(b, C_2)$ sont bornés, la somme $C = C_1 + C_2$ est un continu irréductible $(a\, b)$.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que K soit un vrai sous-continu de C contenant a et b et que $C_1 - K \neq 0$. Comme K est un $\mathfrak{K}(a, b)$ et a *non* εC_2 et b *non* εC_1, $K C_1$ est selon le corollaire du lemme 1 un $\mathfrak{K}(a, C_2)$. Désignons par S le constituant de a dans $K C_1$. Comme

$$C_1 C_2 \subset I(a, C_1) \,.\, I(b, C_2)$$

est borné d'après l'hypothèse, on a en vertu du lemme 2: ou bien $S C_1 C_2 \neq 0$ ou bien il existe un continu non-borné L contenu dans $K C_1$ et issu de $C_1 C_2$.

Comme la première de ces hypothèses implique une contradiction, (S serait un vrai sous-continu de C_1 joignant a à $I(a, C_1)$) nous en admettons la seconde.

$I(a, C_1)$ étant borné, il existe un point $x \varepsilon L - I(a, C_1) = L . P(a, C_1)$, et d'après la définition de l'ensemble $P(a, C_1)$ il existe un vrai sous-continu T de C contenant a et x.

Le continu $L+T$ joignant a avec $I(a,C_1)$, on a alors:

(4) $$L+T=C_1.$$

Nous prouverons maintenant que

(5) $$I(a,C_1)\subset L.$$

En effet, s'il existait un point $z\,\varepsilon\, I(a,C_1)-L$, le continu T le contiendrait selon (4). Mais $T\subset P(a,C_1)$, d'où la contradiction avec l'hypothèse que $z\,\varepsilon\, I(a,C_1)$. L'inclusion (5) est donc démontrée.

Comme nous avons déjà remarqué, KC_1 est un $\mathfrak{K}(a,C_2)$, donc à fortiori un $\mathfrak{K}(S,C_2)$ puisque $a\,\varepsilon\, S$. D'autre part KC_1 n'est pas un continu; il existe donc une décomposition de KC_1 en deux ensembles fermés, non vides et disjoints R et Q. Supposons que $S\subset R$. Comme KC_1 est un $\mathfrak{K}(S,C_2)$, le continu L issu de C_1C_2 doit être contenu aussi dans R. On parvient donc à la décomposition:

$$K=U+Q$$

où $U=R+KC_2$. Les ensembles U et Q sont fermés, non-vides et disjoints.

En effet:

$$UQ=Q(R+KC_2)=QKC_2\subset QKC_1C_2,$$

puisque $Q\subset KC_1$. D'autre part, $C_1C_2\subset I(a,C_1)$, d'après la condition $(\mathfrak{N})$, par conséquent:

$$UQ\subset QI(a,C_1)$$

et d'après (5):

$$UQ\subset QL\subset QR=0,$$

puisque $L\subset R$.

La décomposition obtenue contredit notre hypothèse que K est un continu. Le théorème est donc prouvé.

Comme on voit, dans le th. II on ne demande plus que les continus C_1 et C_2 soient bornés, comme c'était le cas du th. de M. M. Kuratowski et Kline; cependant on impose des nouvelles restrictions aux ensembles $I(a,C_1)$ et $I(b,C_2)$.

Nous citerons encore un théorème qui a été démontré par M. Kuratowski.

Théorème III. *Soient C_1 et C_2 deux continus remplissant la condition $(\mathfrak{N})$; si $I(a,C_1)$ et $I(b,C_2)$ sont fermés, $C=C_1+C_2$ est un continu irréductible (ab).*

Démonstration. Soit K un continu tel que:

$$a,b\,\varepsilon\, K\subset C_1+C_2.$$

Il s'agit de prouver que $K=C_1+C_2$.

Or, soit R un vrai sous-continu régulier de C_1 qui contient a; c'est à dire:

$$a\,\varepsilon\, R=\overline{C_1-\overline{C_1-R}}\neq C_1.$$

Je vais prouver que $R\subset K$.

Considérons, à ce but, la somme et le produit des deux ensembles fermés: $[C_1K+S]$ et $[C_2K+S]$, où $S=\overline{C_1-R}$.

On a

$$C_1K+S+C_2K+S=K+S,$$
$$[C_1K+S].[C_2K+S]=C_1C_2K+S.$$

L'ensemble $K+S$ est un continu, car[1] S est un continu qui renferme l'ensemble $I(a,C_1)$ et a, par conséquent, des points communs avec K L'ensemble C_1C_2K+S est également un continu; car

$$C_1C_2\subset I(a,C_1),\quad \text{donc}\quad C_1C_2R\neq 0,\ \text{puisque}\ R\neq C_1;$$

il en résulte que $C_1C_2\subset S$, d'où $C_1C_2K+S=S$, ce qui prouve que C_1C_2K+S est un continu.

Il est ainsi établi que la somme et le produit des ensembles $[C_1K+S]$ et $[C_2K+S]$ sont des continus. On en conclut[2] que ces ensembles sont eux-mêmes des continus.

Par conséquent: $C_1K+S=C_1$, puisque $I(a,C_1).[C_1K+S]\neq 0$. D'où $C_1-S\subset C_1K\subset K$ Donc $\overline{C_1-S}\subset K$. Mais $\overline{C_1-S}=$ $=\overline{C_1-\overline{C_1-R}}=R$. Donc $R\subset K$.

Or, l'ensemble $I(a,C_1)$ étant férme, $C_1-I(a,C_1)$ est somme des continus R (réguliers par rapport à C_1, contenant a et différents de C_1[3]). Il vient: $C_1-I(a,C_1)\subset K$. D'où

$$\overline{C_1-I(a,C_1)}\subset K.$$

Mais $I(a,C_1)$, comme fermé, est non-dense dans C_1. On a donc $C_1\subset K$ et, d'une façon analogue, $C_2\subset K$, c. q. f. d.

Nous passons maintenant à la démonstration du th. IV.

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. III, p. 203 (théor. III).
[2]) S. Janiszewski et C. Kuratowski, Fund. Math. I (théor. I).
[3]) C. Kuratowski, Fund. Math. X, remarque au théor. IV.

Citons d'abord les trois théorèmes suivants, dûs à M. Kuratowski[1]):

Soit C un continu irréductible (ab) et posons $I = I(a, C)$; alors:

(i) *Si $I = \overline{I}$, I est non-dense par rapport à C, c. à d.* $\overline{C - I} = C$.

(ii) *Si $I \neq \overline{I}$, $\overline{I}$ est un continu indécomposable.*

(iii) *Si K est un continu tel que $K \subset I$, alors K est un continu de condensation de C, c. à d.* $\overline{C - K} = C$.

Nous nous servirons aussi du lemme suivant:

Lemme 4. *Si* 1°. *S est un $\mathfrak{R}(A, B)$;*

2°. *S ne contient aucun sous-continu joignant A à B;*

3°. *A possède des points communs avec un seul constituant de S et B avec un nombre fini d'eux;*

il existe alors deux ensembles fermés et disjoints M et N tels, que:

$$S = M + N, \quad N(A + B) = 0, \quad N \neq 0.$$

Démonstration. Désignons par $T_1, T_2, \dots T_n$. les constituants de S qui ont des points communs avec B, et par R le constituant de S contenant AS. Puisque S n'est pas un continu, selon 2°, on a:

$$S = M_1 + N_1, \quad \text{où} \quad M_1 N_1 = 0 \quad \text{et} \quad \overline{M}_1 = M_1 \neq 0 \neq N_1 = \overline{N}_1.$$

Supposons que $R \subset M_1$. Si $BS \subset M_1$, on peut poser $M = M_1$ et $N = N_1$.

Si, au contraire, $N_1 B \neq 0$, l'ensemble M_1 contient tout au plus $n - 1$ ensembles T. Puisque $M_1 N_1 = 0$, l'ensemble M_1 n'est pas un $\mathfrak{R}(A, N_1)$, mais S est un $\mathfrak{R}(A, B)$, donc M_1 est un $\mathfrak{R}(A, B)$ selon le lemme 1.

Ainsi l'ensemble M_1 satisfait à toutes les hypothèses 1°–3°. En raisonnant comme auparavant, nous seront ou bien conduits à la décomposition cherchée: $M = M_2 + N_1$, $N = N_2$ ou bien nous définirons l'ensemble M_2 satisfaisant à 1°–3° et contenant tout au plus. $n - 2$ ensembles T; et ainsi de suite.

Supposons que l'ensemble M_k ne contient qu'un seul ensemble T (que nous désignerons par T_0), les ensembles $N_1, N_2, \dots N_k$ ayant des points communs avec B.

Comme l'ensemble M_k n'est pas un continu, on peut le décomposer en deux ensembles fermés, disjoints et non vides M_{k+1} et N_{k+1}.

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. X (loc. cit.); théor. IV, théor. II, lemme 2.

Supposons que $R \subset M_{k+1}$; donc $T_0 \subset M_{k+1}$, puisque M_k est un $\mathfrak{R}(A, B)$; d'où $BN_{k+1} = 0$.

Les ensembles:

$$M = N_1 + N_2 + \dots + N_k + M_{k+1}$$
$$\text{et} \quad N = N_{k+1}$$

nous fournissent la décomposition cherchée.

Théorème IV. *C_1 et C_2 étant deux continus irréductibles (ac) et (cb) respectivement, si $C_1 C_2 \subset M_1 M_2$, où M_1 et M_2 sont deux ensembles fermés contenus dans $I(a. C_1)$ et $I(b, C_2)$ resp., et dont le nombre des constituants est fini; la somme $C = C_1 + C_2$ est un continu irreductible (ab).*

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'il existe un vrai sous-continu K de C renfermant les points a et b. Un des ensembles $C_1 - K$ et $C_2 - K$ est non vide, admettons que ce soit le premier.

Désignons par S_1 la somme des constituants de M_1 qui ont des points communs avec K; S_1 est une somme finie de sous-continus de $I(a, C_1)$, donc selon la proposition (iii), S_1 est non-dense par rapport à C_1. C'est à-dire: $\overline{C_1 - S_1} = C_1$.

Posons:

$$K_1 = KC_1, \tag{6}$$
$$L = K + S_1, \tag{7}$$
$$L_1 = LC_1. \tag{8}$$

Il est aisé de voir que L est un continu, tandis que L_1 satisfait aux conditions 1°—3° du lemme 4; en effet:

1°. L_1 est un $\mathfrak{R}(a, C_2)$, selon le corollaire du lemme 1 appliqué au continu $L = L_1 + LC_2$.

2°. L_1 ne contient aucun continu joignant a à C_2.

En effet L_1 est un vrai sous-ensemble de C_1, car l'égalité $C_1 = L_1 = K_1 + S_1$ donnerait $\overline{C_1 - S_1} \subset K_1$ et comme $\overline{C_1 - S_1} = C_1$, on aurait $C_1 \subset K_1$, contrairement à l'hypothèse que $C_1 - K_1 \neq 0$.

Donc $L_1 \subset C_1$ et $L_1 \neq C_1$.

Soit maintenant T le constituant de a dans L_1; L_1 est un vrai sous-continu de C_1. Les continus C_1 et C_2 satisfaisant à la condition $(\mathfrak{N})$, l'ensemble TC_2 est contenu dans $I(a\, C_1)$, par conséquent $TC_2 = 0$. Donc tout sous-continu de L_1 issu du point a est disjoint de C_2

3°. Les constituants de L_1 qui ont des points communs avec C_2

sont en nombre fini. En effet, $C_1 C_2 \subset M_1$, d'où $K_1 C_2 = K C_1 C_2 \subset$ $\subset K M_1 \subset S_1$, par conséquent, selon (6), (7) et (8):

$$L_1 C_2 = (K_1 + S_1) C_2 = K_1 C_2 + S_1 C_2 = S_1 C_2.$$

D'autre part: $S_1 \subset L_1$; donc tout constituant de L_1 qui a des points communs avec C_2 renferme au moins un constituant de S_1. Le nombre de constituants de S_1 étant fini, le nombre des ceux de L_1 issus de C_2 l'est aussi.

On peut appliquer maintenant le lemme 4 et on obtient une décomposition de L_1 en deux ensembles fermés, disjoints et non vides M et N tels, que $N C_2 = 0$.

On a donc

$$L = L_1 + L C_2 = (M + L C_2) + N,$$

où les ensembles $M + L C_2$ et N sont fermés, disjoints et non vides, ce qui implique une contradiction, puisque L est un continu.

Ainsi le th. IV se trouve démontré.

En particulier, si l'on suppose que *les continus C_1 et C_2 du th. IV n'ont qu'un nombre fini de points en commun* (ou plus généralement, un nombre fini de continus en commun) *la somme $C_1 + C_2$ est irréductible* (ab). Cela généralise le th. de Janiszewski mentionné au debut de cette note, où il s'agissait du cas où l'ensemble $C_1 C_2$ était réduit à un seul point.

On peut aussi déduire du th. IV le théorème suivant proposé par Janiszewski: *C_1 et C_2 étant deux continus irréductibles* (ac) *et* (cb) *resp., si $C_1 C_2 \subset R_1 R_2$, où R_1 et R_2 sont deux continus de condensation par rapport à C_1 et C_2 resp., la somme $C = C_1 + C_2$ est un continu irréductible* (ab).

En effet, $c \subset R_1$, d'où

$$R_1 I(a, C_1) \neq 0$$

et comme R_1 est un continu de condensation, il résulte de là [1]) que:

$$R_1 \subset I(a, C_1).$$

De même:

$$R_2 \subset I(b, C_2)$$

et l'on peut poser dans le th. IV:

$$M_1 = R_1 \text{ et } M_2 = R_2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Les ensembles $\mathfrak{R}_i$ introduits par M. Mazurkiewicz se rapprochent par leurs propriétés aux continus irréductibles

Selon M. Mazurkiewicz, $\mathfrak{R}_i(A, B)$ désigne tout ensemble $\mathfrak{R}(A, B)$, qui ne renferme aucun vrai sous-ensemble jouissant de la proprété d'être un $\mathfrak{R}(A, B)$. Autrement dit un $\mathfrak{R}_i(A, B)$ c'est un $\mathfrak{R}(A, B)$ „irréductible".

[1]) C. Kuratowski. *Théorie des continus irréductibles I*, Fund. Math. III, p. 219.

M. Mazurkiewicz a démontré [1]) le théorème suivant:

1°. *S étant un $\mathfrak{R}_i(A, B)$, S est un continu irréductible entre tout couple de points a et b choisis respectivement dans les ensembles $A S$ et $B S$.*

(Bien que l'énoncé de M. Mazurkiewicz ne concerne que les ensembles bornés, cette réstriction n'intervient pas dans la démonstration).

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en général, mais on peut la démontrer dans des hypothèses réstrictives. Ainsi p. e. la proposition suivante a lieu:

2°. *Soit C un continu irréductible* (ab); *si l'ensemble $P(a, C)$ ne contient aucun continu non-borné, C est un $\mathfrak{R}_i(a, B)$ pour tout $B = \bar{B} \subset I(a, C)$.*

En effet, soit $B = \bar{B} \subset I(a, C)$ et supposons qu'il existe un vrai sous-ensemble K de C qui est un $\mathfrak{R}(a, B)$. Désignons par T le constituant de a dans K. En vertu du lemme 2, on a ou bien $TB \neq 0$, ou bien T est non-borné.

La première de ces suppositions implique une contradiction, puisque T est un vrai sous-continu de C et $B \subset I(a, C)$. Donc T est non-borné. Mais ceci implique également une contradiction, puisque $T \subset P(a, C)$. Il n'existe donc aucun sous-ensemble $\mathfrak{R}(a, B)$ de C, c. q. f. d.

En particulier, on déduit de ces propositions l'équivalence des deux notions: du continu irréductible (ab) et de l'ensemble $\mathfrak{R}_i(a, b)$, dans le domaine d'ensembles bornés.

En ce qui concerne la somme de deux ensembles $\mathfrak{R}_i$, on a la proposition suivante (qui ne fait nullement intervenir la notion d'ensemble borné):

3° *Si $A C_2 = B C_1 = 0$, les ensembles C_1 et C_2 étant des $\mathfrak{R}_i(A, C_2)$ et $\mathfrak{R}_i(B, C_1)$ respectivement, leur somme est un $\mathfrak{R}_i(A, B)$.*

Soit $C = C_1 + C_2$; selon 1°: C_1 et C_2 sont des continus et puisque $A C_1 \neq 0 \neq B C_2$ et $C_1 C_2 \neq 0$, l'ensemble C est un continu joignant A à B et, par conséquent, est un $\mathfrak{R}(A, B)$.

Supposons que l'ensemble $K \subset C$ est un $\mathfrak{R}(A, B)$. Puisque $K = K C_1 + K C_2$, on en conclut immédiatement en se basant sur le corollaire du lemme 1 que $K C_1$ et $K C_2$ sont $\mathfrak{R}(A, C_2)$ et $\mathfrak{R}(B, C_1)$ respectivement. Mais C_1 est un $\mathfrak{R}_i(A, C_2)$, donc $K C_1 = C_1$ ou bien $C_1 \subset K$. De même on obtient $C_2 \subset K$, par conséquent $C \subset K$.

La proposition se trouve ainsi démontrée: tout sous-ensemble $\mathfrak{R}(A, B)$ de C est égal à C, donc C est un $\mathfrak{R}_i(A, B)$.

En se basant sur 1° on déduit de là:

4°. *Si les continus C_1 et C_2 sont des $\mathfrak{R}_i(a, C_2)$ et $\mathfrak{R}_i(b, C_1)$ respectivement, et $a \in C_1 - C_2$ et $b \in C_2 - C_1$, la somme $C_1 + C_2$ est un continu irréductible* (ab).

Remarquons encore que le th. I est une conséquence immédiate de 2° et 4°.

[1]) C. R. v. CLI ou Janiszewski. Thèse p. 31—33.