sum of a compact Hausdorff space and a discrete space. Thus we have $\psi^*\setminus\{t\}$ is normal for every point t different from x_0.

It is also easy to see that every point of ψ^* different from x_0 is a Fréchet-point.

Thus this example helps to appreciate the force of Theorem 1.2. In fact, it is this example that motivated the main result of this paper.

2) It is a good guess that the spaces S_n serve as test-spaces for sequential order in the following sense: A sequential T_2 space has sequential order $\geqslant n$ if and only if it contains a copy of S_n. However this guess is not true. What is true is a very close result: A sequential T_2 space has sequential order $\geqslant n$ if and only if it contains a subspace whose sequential coreflection is homeomorphic to S_2. This has been proved in [1]. Several years later, the falsity of the first guess was proved in [6].

Naturally one likes to know whether the first guess is correct, when we restrict our attention to a fairly nice class of spaces. In this direction [6] gives the first positive result that it is so in the class of countable spaces.

Our Corollary 2.3 supplements these results by showing that the first guess holds good in the class of hereditarily normal spaces.

3) We leave open a simple-looking question: What are all the subspaces of compact T_5 spaces? Every such space must be obviously T_5. Further whenever $(x_n)\to x$, there should exist neighbourhoods V_n of x_n such that every neighbourhood of x must contain V_n for all but a finite number of values of n.

4) See [5] for the definitions of spaces S_n, sequential order at a point, etc.

Added in proof. The following is a noteworthy consequence: For any sequential T_5 space, the sequential order and the k-order coincide.

References

[1] A. V. Arhangel'skiĭ and S. P. Franklin, *Ordinal invariants for topological spaces*, Michigan Math. J. 15 (1968), pp. 313–320.
[2] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fund. Math. 61 (1967), pp. 51–56.
[3] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Princeton 1960.
[4] V. Kannan, *Ordinal invariants in topology II, sequential order of compactifications*, Comp. Math. 39 (1979), pp. 247–262.
[5] — *Ordinal invariants in topology*, An unpublished monograph (1976).
[6] M. Rajagopalan, *Sequential order and spaces S_n*, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), pp. 433–438.

UNIVERSITY OF HYDERABAD
NAMPALLY STATION ROAD,
Hyderabad 500 001
India

Accepté par la Rédaction le 5. 9. 1977

Пространства с единственной точкой экстремальной несвязности

В. И. Малыхин и В. М. Ульянов (Москва)

Abstract. R. Telgársky posed in [4] the following question: Does there exist a completely regular space X with exactly one non-isolated point $*$ of extremal disconnectedness? In this paper there are constructed two dense in itself spaces providing an answer in the positive sense: 1. A countable regular space X, and 2. (CH) A compact Hausdorff space X in which points of X-{$*$} have countable character.

Р. Телгарский [4] поставил следующую проблему:

Существует ли пространство с одной и неизолированной точкой экстремальной несвязности?

Напомним, что в топологическом пространстве (X,τ) точка x называется *точкой экстремальной несвязности* (коротко „э. н."), если $x\notin[V_1]\cap[V_2]$ для любых дизъюнктных $V_1, V_2\in\tau$.

Основные результаты настоящей работы формулируются следующим образом:

Пример 1. Существует счетное регулярное плотное в себе пространство ровно с одной точкой э. н.

Пример 2 [CH]. Существует плотный в себе бикомпакт ровно с одной точкой э. н., остальные точки имеют счетный характер.

Часть работы, связанная с примером 1, принадлежит В. М. Ульянову, остальное — В. И. Малыхину.

I. Построить хаусдорфово пространство ровно с одной и неизолированной точкой э. н. не составляет никакого труда. Пусть (X,T) — произвольное хаусдорфово не бикомпактное пространство. Следовательно, существует центрированная система $\xi\subset T$, не имеющая в пространстве (X,T) точки прикосновения. Дополним ее до какой-нибудь максимальной центрированной системы открытых множеств η. Положим теперь $X_\eta=X\cup\{\eta\}$, $T_\eta=T\cup\{\{\eta\}\cup\cup A|\ A\in\eta\}$. Легко убедиться, что пространство (X_η,T_η) хаусдорфово и точка $\{\eta\}$ в нем — точка э. н.

Предложение 1. *Пространство (X_η,T_η) регулярно если и только если регулярно* *пространство* (X, T) *и у системы* η *существует база из замкнутых канонических подмножеств пространства* (X, T).

Используя предложение 1 и дополнительные теоретико-множественные предположения (континуум-гипотезу или аксиому Мартина), можно строить плотные в себе регулярные пространства ровно с одной точкой э. н. Можно ли обойтись при таком построении только средствами системы ZFC авторам неизвестно.

II. Перейдем теперь к изложению примера 1.

Определение. *Ливень* (*heavy shower*, *downpour*) на топологическом пространстве X есть такой оператор C, который каждому замкнутому нигде не плотному подмножеству $F \subset X$ ставит в соответствие плотное в себе замкнутое нигде не плотное подмножество $C(F) \subset X$, причем выполняются следующие условия:

1) $F \subseteq C(F)$,

2) если $F_2 \subseteq C(F_1)$, то $C(F_2) \subseteq C(F_1)$,

3) если x — неизолированная точка в X, то x — неизолированная точка в $C(\{x\})$.

Пусть C — ливень на топологическом пространстве X. Будем через $X(C)$ обозначать топологическое пространство, которое как множество совпадает с X, а предбазу топологии в нем образует семейство открытых множеств из X, пополненное всевозможными множествами вида $C(\{x\})$ и дополнениями таких множеств в X, где x — произвольная неизолированная точка из X.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства ливней:

1) каждое множество вида $C(F)$, где F — замкнутое нигде не плотное подмножество в X, открыто-замкнуто в $X(C)$;

2) $w(X(C)) \leqslant w(X) + |X|$, где $w(Z)$ обозначает вес пространства Z;

3) если пространство X удовлетворяет каким-нибудь из аксиом отделимости $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3/2}$ то соответственно тем же аксиомам отделимости удовлетворяет и пространство $X(C)$;

4) множество изолированных точек обоих пространств одно и то же.

Далее нам понадобятся ливни на пространстве Q рациональных чисел отрезка $[0, 1]$.

Лемма 1. *Пусть каждой точке* $r \in Q$ *поставлено в соответствие нигде не плотное множество* $M_r \subset Q$. *Тогда на* Q *существует такой ливень* C, *что для каждой точки* $r \in Q$ *существует окрестность* V_r *такая, что* $V_r \cap M_r$ *содержится в* $C(\{r\})$ *в качестве нигде не плотного подмножества.*

Доказательство. Занумеруем все точки Q натуральными числами: $Q = \{r_n|\ n \in N\}$. Будем считать, что $r_n \neq r_m$ при $n \neq m$. Для каждого $n \in N$ выберем последовательность $\tilde{S}_n \subset Q \setminus (\{r_n\} \cup [\bigcup \{M_{r_k}|\ k = 1, \ldots, n\}]_Q)$ сходящуюся к точке r_n. Положим $\tilde{F}_n = [M_{r_n} \cup \tilde{S}_n]_Q$.

Теперь по индукции проводим следующее построение.

Шаг 1. Разобъем Q на попарно непересекающиеся интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m_1}$ длины, меньшей 2^{-1}. Положим $F_1 = \tilde{F}_1 \cap \Delta_i$, $S_1 = \tilde{S}_1 \cap \Delta_i$, $M_1 = \tilde{M}_{r_1} \cap \Delta_i$, где Δ_i — тот интервал, который содержит точку r_1. Интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m_1}$ будем называть интервалами ранга 1.

Шаг $k+1$, $k \geqslant 1$. Интервалы ранга k и множества $F_1, \ldots, F_k$; $S_1, \ldots, S_k$; $M_1, \ldots, M_k$ уже построены. Каждый из интервалов $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ ранга k разобъем на попарно непересекающиеся интервалы $\Delta_{i_1 \ldots i_k 1}, \ldots, \Delta_{i_1 \ldots i_k m_{k+1}}$ (их будем называть интервалами ранга $k+1$) где m_{k+1} зависит от $i_1 \ldots i_k$, длины, меньшей чем $2^{-(k+1)}$ так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) в каждом из интервалов ранга $k+1$ содержится не более одной из точек $r_1, \ldots, r_{k+1}$;

2) в каждом из интервалов ранга k содержится не менее двух интервалов ранга $k+1$, не пересекающихся с $\bigcup \{F_n|\ n = 1, \ldots, k\}$;

3) если $r_n \notin F_i$, где $n = 1, \ldots, k+1$ и $i = 1, \ldots, k$, то $F_i \cap \Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \Lambda$, где $\Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ — тот интервал ранга $k+1$, который содержит точку r_n (конечно, набор $(i_1 \ldots i_{k+1})$ зависит от n).

Далее положим $F_{k+1} = \tilde{F}_{k+1} \cap \Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, $S_{k+1} = \tilde{S}_{k+1} \cap \Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, $M_{k+1} = M_{r_{k+1}} \cap \Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$, где $\Delta_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ — тот интервал ранга $k+1$, который содержит точку r_{k+1}. Теперь построение можно продолжать дальше.

Заметим сразу же, что выполнены следующие соотношения:

1) если $r_k \in F_n$, то $k \geqslant n$;

2) если $F_k \cap F_n \neq \Lambda$ и $k \geqslant n$, то $r_k \in F_n$.

Последовательность $r_{i_1}, \ldots, r_{i_m}$ точек из Q будем называть цепью, если для каждого $k = 1, \ldots, m-1$, либо $r_{i_k} \in F_{i_{k+1}}$ либо $r_{i_{k+1}} \in F_{i_k}$. Будем считать, что r_i и r_j можно соединить цепью, если существует цепь, содержащая r_i и r_j.

Для каждого $n \in N$ положим $B_n = \{r_k \in Q|\ r_k$ и r_n можно соединить цепью$\}$. Очевидно, для любых k и n из N, если $r_k \in B_n$, то $B_k = B_n$ и $F_k \subseteq B_n$.

Далее, для каждого замкнутого нигде не плотного подмножества F из Q положим $C(F) = \bigcup \{B_n|\ r_n \in F\}$. Докажем, что определенный таким образом оператор C есть ливень. Заметим сразу же, что множество $C(F)$ плотно в себе, так как вместе с каждой своей точкой r_n содержит последовательность S_n, сходящуюся к ней. Выполнение условий 1), 2) и 3) определения ливня следует из определения множества $C(F)$ и свойств множеств B_n. Нужно доказать, что множество $C(F)$ замкнуто и нигде не плотно для любого замкнутого и нигде не плотного множества F из Q.

Докажем замкнутость множества $C(F)$. Пусть $r_n \in Q \setminus C(F)$. Множество F замкнуто и $r_n \notin F$. Существует интервал $\Delta = \Delta_{i_1 \ldots i_k}$ ранга k, причем $k \geqslant n$, покрывающий точку r_n и не пересекающийся с F. Докажем, что $\Delta \cap C(F) = \Lambda$. Предположим противное, тогда некоторую точку r_i из Δ можно соединить цепью с некоторой точкой a из F; пусть эта цепь есть $a, \ldots, r_j, r_i$. Ясно, что все элементы этой цепи, кроме r_i можно считать лежащими вне Δ. По определению цепи есть две возможности:

1) $r_i \in F_j$;

2) $r_j \in F_i$.

Обе эти возможности ведут к противоречию с построением. Действительно, рассмотрим подробно только первую из них.

Если $j>k$, то так как $r_n \notin F_j$, то $\Delta \cap F_j = \Lambda$.

Если же $j \leqslant k$. то F_j должно содержаться в интервале ранга j, который не пересекается с Δ.

Итак, замкнутость множества $C(F)$ доказана. Докажем теперь его нигде не плотность. Пусть $U \subseteq Q$ — произвольное непустое открытое множество. Так как F нигде не плотно, то существует интервал $\Delta_{i_1 \dots i_k}$, содержащийся в $U \setminus F$. Из построения вытекает наличие в интервале $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ интервала Δ ранга $k+1$, не пересекающегося с множеством $\bigcup \{F_n | \ n = 1, \dots, k+1\}$. Докажем, что $\Delta \cap C(F) = \Lambda$, более того, ни одну точку из Δ нельзя соединить цепью с дополнением к Δ. Предположим противное и пусть r_i, r_j — цепь, причем $r_i \in \Delta$, $r_j \notin \Delta$. По определению цепи есть две возможности:

1) $r_i \in F_j$;

2) $r_j \in F_i$.

Обе эти возможности противоречат построению и тому, что

$$\Delta \cap (\bigcup \{F_n | \ n = 1, \dots, k+1\}) = \Lambda .$$

Действительно, рассмотрим подробно только первую из них.

Если $j > k+1$ то F_j должно содержаться в интервале ранга j, не пересекающимся с Δ (по построению).

Если же $j \leqslant k+1$, то $F_j \cap \Delta = \Lambda$ по выбору интервала Δ (дизъюнктного с $\bigcup \{F_n | \ n = 1, \dots, k+1\}$).

Нигде не плотность множества $C(F)$ доказана. Тем самым полностью установлено, что оператор C — ливень.

Далее, включение $M_n = M_{r_n} \cap \Delta_{i_1 \dots i_n} \subseteq C(\{r_n\})$, где $r_n \in \Delta_{i_1 \dots i_n}$, очевидно. Докажем теперь, что M_n нигде не плотно в $C(\{r_n\})$. Для этого достаточно доказать, что для каждого открытого множества V из Q, пересекающегося с M_n, существует такое открытое множество $W \subseteq V$, что $W \cap C(\{r_n\}) \neq \Lambda$ и $W \cap M_n = \Lambda$. Итак, пусть V — произвольное открытое множество из Q, пересекающееся с M_n. Пусть $r_{k_1} \in V \cap M_n$. Тогда $k_1 \geqslant n$. Поэтому $S_{k_1} \cap [M_n]_Q = \Lambda$. Так как $r_{k_1} \in [S_{k_1}]_Q$, существует точка $r_{k_2} \in S_{k_1} \cap V \subseteq C(\{r_{k_1}\}) \cap V \subseteq C(\{r_n\}) \cap V$, ибо $S_{k_1} \subseteq F_{k_1} \subseteq C(\{r_{k_1}\}) \subseteq C(\{r_n\})$. Пусть W — такая окрестность точки r_{k_2}, что $W \subseteq V \setminus [M_n]_Q$, тогда W — искомое открытое множество.

Лемма 1 полностью доказана.

Пример 1. *Существует счетное регулярное плотное в себе пространство ровно с одной точкой э. н.*

Построение. Для каждой точки $r \in Q$ выберем сходящуюся к ней последовательность $M_r \subseteq Q \setminus \{r\}$.

Далее по трансфинитной индукции строим на множестве Q семейство топологических пространств X_α, $\alpha \leqslant \omega_1$, гомеоморфных Q при $\alpha < \omega_1$, и ливней C_α на X_α, $\alpha < \omega_1$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для всех $r \in Q$ и $\alpha \leqslant \omega_1$ последовательность M_r сходится к r в X_α;

2) $|M_r \setminus C_\alpha(\{r\})| < \aleph_0$ для всех $r \in Q$ и $\alpha < \omega_1$;

3) $X_{\alpha+1} = X_\alpha(C_\alpha)$ при $\alpha < \omega_1$;

4) если $\alpha \leqslant \omega_1$ и α — предельный ординал, то топология пространства X_α есть точная верхняя грань топологий пространств X_β при $\beta < \alpha$.

Для начала индуктивного процесса положим $X_0 = Q$. Ливень C_0, удовлетворяющий условию 1) существует в силу леммы 1:

Пусть $0 < \alpha \leqslant \omega_1$ и для всякого $\beta < \alpha$ уже построены пространство X_β и ливень C_β, удовлетворяющие всем нужным условиям. Далее рассмотрим два случая.

а) Пусть ординал α — предельный. В этом случае в качестве топологии пространства X_α возьмем точную верхнюю грань топологий пространств X_β при $\beta < \alpha$. Тогда X_α — счетное регулярное пространство без изолированных точек. Кроме того, для всякой точки $r \in X_\alpha$ последовательность M сходится к r в пространстве X_α, так как она сходится к r в каждом пространстве X_β при $\beta < \alpha$. Если $\alpha < \omega_1$, то, очевидно, $w(X_\alpha) = \aleph_0$, откуда следует, что X_α гомеоморфно Q.

б) Существует такой ординал $\beta < \alpha$, что $\alpha = \beta + 1$, т.е. α — непредельный ординал. Тогда пусть $X_\alpha = X_\beta(C_\beta)$. В силу свойств ливней (см. выше) X_α — счетное регулярное пространство счетного веса без изолированных точек, т.е. X_α гомеоморфно Q. Так как ливень C_β удовлетворяет условию 2), то для каждой точки $r \in X_\alpha$ последовательность M_r сходится к r в X_α.

Далее в обоих случаях при $\alpha < \omega_1$ нужный ливень C_α строится с помощью леммы 1.

Пусть $X' = \{*\} \cup X_{\omega_1}$ — одноточечное расширение пространства X_{ω_1}, в котором окрестностями точки $*$ являются всевозможные множества вида $X' \setminus \bigcup \{C_{\alpha_i}(F_{\alpha_i}) | \ i = 1, \dots, n\}$, где при каждом $i = 1, \dots, n$ множество F_{α_i} замкнуто и нигде не плотно в пространстве X_{α_i} и $\alpha_i < \omega_1$. Пространство X' регулярно, так как таково X_{ω_1}, а множества вида $C_\alpha(F_\alpha)$, где F_α замкнуто и нигде не плотно в X_α при $\alpha < \omega_1$, являются открыто-замкнутыми в X_{ω_1} в силу построения. Легко проверяется также, что $*$-неизолированная точка в X'. Докажем, что, однако, $* \notin [M]_{X'}$ для любого нигде не плотного множества M из X_{ω_1}.

Пусть $M \subset X_{\omega_1}$ — нигде не плотное подмножество. Без ограничения общности его можно считать замкнутым в X_{ω_1}. В силу определения топологии X_{ω_1} для каждой точки $r \in X_{\omega_1} \setminus M$ существует ординал α_r, меньший ω_1, и окрестность V_r точки r в X_{α_r}, не пересекающаяся с M. Пусть $\alpha = \operatorname{Sup}\{\alpha_r|$

$r \in X_{\omega_1} \setminus M\}$. Очевидно, что $\alpha < \omega_1$. Тогда множество $\bigcup \{V_r | \ r \in X_{\omega_1} \setminus M\}$ открыто в X_α и потому множество M замкнуто в X_α и имеет в X_α пустую внутренность, так как в противном случае эта внутренность была бы непустым открытым множеством, содержащимся в M, и в пространстве X_{ω_1}, что невозможно. Следовательно, определено множество $C_\alpha(M)$. Но тогда множество $X' \setminus C_\alpha(M)$ есть окрестность точки $*$ в X', не пересекающаяся с M, тем самым $* \notin [M]_{X_{\omega_1}}$.

Теперь нам нужна

Лемма 2. *Пусть βX — Стоун-Чеховское расширение вполне регулярного пространства X, $x \in \beta X \setminus X$ и $x \notin [A]_{\beta X}$ для любого нигде не плотного подмножества A из X, тогда $x \notin [V_1]_{\beta X} \cap [V_2]_{\beta X}$ для любых двух дизъюнктивных открытых в X множеств V_1, V_2.*

Доказательство. Итак, пусть, например, $x \in [V_1]_{\beta X}$, тогда $x \notin [Fr_X V_1]_{\beta X}$, ибо $Fr_X V_1$ (граница в X множества V_1) — нигде не плотное множество в X. Но βX — совершенное расширение (см. об этом в [3], следовательно, $Fr_{\beta X}(\beta X \setminus [X \setminus V_1]_{\beta X}) = [Fr_X V_1]_{\beta X}$, т.е. $x \notin Fr_{\beta X}(\beta X \setminus [X \setminus V_1]_{\beta X})$ и потому $x \in \beta X \setminus [X \setminus V_1]_{\beta X}$. Так как $X \setminus V_1 \supseteq V_2$, то $(\beta X \setminus [X \setminus V_1]_{\beta X}) \cap [V_2]_{\beta X} = \Lambda$, отсюда следует, что $x \notin [V_2]_{\beta X}$. Лемма 2 доказана.

Завершим теперь изложение примера 1.

Пусть $\varphi\colon \beta X_{\omega_1} \xrightarrow{\text{на}} \beta X'$ — непрерывное отображение Стоун-Чеховских расширений пространств X_{ω_1} и X', индуцированное тождественным вложением $X_{\omega_1} \to X'$. Возьмем произвольную точку $\xi \in \varphi^{-1}(*)$ и положим $X = \{\xi\} \cup X_{\omega_1}$. Если A — нигде не плотное подмножество в X_{ω_1}, то $\xi \notin [A]_X$ — это очевидно, а так как $\beta X = \beta X_{\omega_1}$, то согласно лемме 2, ξ — точка э. н. в пространстве X.

Других точек э. н. пространство X не имеет, так как для каждой точки $r \in X_{\omega_1}$ последовательность M_r сходится к r в X_{ω_1}.

III. Пример 2 [CH]. Существует плотный в себе бикомпакт ровно с одной точкой э. н., остальные точки имеют счетный характер.

Для построения примера нам потребуется

Лемма 3. *Пусть Z — бикомпакт, $z_0 \in Z$ — произвольная точка счетного характера, неизолированная; $z_0 \in [W] \setminus W$, где W — открытое множество. Тогда существует бикомпакт T и отображение $\varphi\colon T \xrightarrow{\text{на}} Z$ обладающие следующими свойствами:*

а) $|\varphi^{-1}(z)| = 1$ *для всякой точки* $z \in Z \setminus \{z_0\}$;

б) $\varphi^{-1}(z_0) \not\subset [\varphi^{-1}(Z \setminus W \setminus \{z_0\})]_T$;

в) $\varphi^{-1}(z_0) = [0, 1]$;

г) *отображение φ неприводимо.*

Доказательство. Пусть последовательность $\mathscr{A} = \{a_n | \ n \in \omega_0\}$ лежит в W и сходится к z_0. Найдем замкнутое в $Z - \{z_0\}$ множество K не пересекающееся с $\mathscr{A}$ и содержащее $Z \setminus W \setminus \{z_0\}$. Пусть g — взаимно однозначное

отображение множества $\mathscr{A}$ на множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Положим также $g(z) = 0$ если $z \in K$. Пространство $Z \setminus \{z_0\}$ финально компактно, тем более оно нормально, функция g определена на замкнутом подмножестве $\{a_n | \ n \in \omega_0\} \cup K$ этого пространства, следовательно, ее можно продолжить на все пространство $Z \setminus \{z_0\}$, обозначим это продолжение также через g.

На множестве $T = (Z \setminus \{z_0\}) \cup [0, 1]$ введем следующую топологию (см., например, [1]): $Z \setminus \{z_0\}$ с прежней топологией есть открытое подпространство, а в точках из $[0, 1]$ окрестности устроены так. Пусть $t \in [0, 1]$, S — произвольная окрестность точки t в $[0, 1]$, R — произвольная окрестность точки z_0 в Z, тогда $S \cup (g^{-1}(S) \cap R)$ — есть окрестность точки t в T. Пусть $\varphi(t) = t$ если $t \in T \setminus [0, 1]$ и $\varphi(t) = z_0$ если $t \in [0, 1]$. Нетрудно проверить, что отображение φ обладает всеми свойствами а) — г). Докажем только, что оно обладает свойством б). Пусть $t \in [0, 1]$ и $t > 0$, тогда $S = (0, 1]$ — окрестность точки t в $[0, 1]$; так как $g(Z \setminus W) = 0$, то $S \cup (g^{-1}(S))$ — окрестность точки t в T, не пересекающаяся с множеством $\varphi^{-1}(Z \setminus W \setminus \{z_0\})$. Доказано, что $t \notin [\varphi^{-1}(Z \setminus W \setminus \{z_0\})]_T$.

Искомый бикомпакт B окажется пределом вполне упорядоченного непрерывного обратного спектра длины ω_1 из компактов. Опишем структуру этого спектра. $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\gamma | \ \alpha \leqslant \gamma < \omega_1\}$.

За Y_0 возьмем, например, обычный отрезок $[0, 1]$. Выберем в нем произвольную точку y_0 и занумеруем счетными ординалами всевозможные открытые множества V, такие, что $y_0 \in [V]_{Y_0} \setminus V$. Положим $\sigma = \{V_\alpha | \ \alpha \in \omega_1\}$.

Предположим теперь, что для некоторого счетного ординала $\alpha > 0$ часть обратного спектра $\{Y_\beta, \pi_\beta^\gamma | \ \beta \leqslant \gamma < \alpha\}$ построена, причем, выполнены следующие индуктивные предположения:

1) в каждом Y_β выделена особая точка y_β, причем если $\beta \leqslant \gamma$ и $\gamma < \alpha$, то $y_\beta = \pi_\beta^\gamma y_\gamma$;

2) если β — непредельный ординал, то $Y_\beta = (Y_{\beta-1} \setminus \{y_{\beta-1}\}) \cup [0, 1]_\beta$ и топология пространства Y_β построена в соответствии с леммой 3;

3) если β — предельный ординал, то $Y_\beta = \underline{\lim}\{Y_\delta, \pi_\delta^\gamma | \ \delta \leqslant \gamma < \beta\}$, т.е. построенная часть спектра есть непрерывный спектр.

Остальные индуктивные предположения в данный момент несущественны и станут ясны из дальнейшего.

Построим пространство Y_α.

Если α — предельный ординал, то полагаем $Y_\alpha = \underline{\lim}\{Y_\beta, \pi_\beta^\gamma | \ \beta \leqslant \gamma < \alpha\}$, $y_\alpha = \{\{y_\beta | \ \beta < \alpha\}\}$.

Если α — непредельный ординал, т. е. $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, то последуем Лемме 3 при $Z = Y_{\alpha-1}$, $z_0 = y_{\alpha-1}$, а за W возьмем $(\pi_0^{\alpha-1})^{-1} V$, где V взято из σ и имеет наименьший номер из таких его элементов G, для которых $y_{\alpha-1} \in [(\pi_0^{\alpha-1})^{-1} G]_{Y_{\alpha-1}} \cap [(\pi_0^{\alpha-1})^{-1}(Y_0 \setminus G \setminus \{y_0\})]_{Y_{\alpha-1}}$. Положим $Y_\alpha = T$, $\pi_{\alpha-1}^\alpha = \varphi$. Ясно, что $Y_\alpha = (Y_{\alpha-1} \setminus \{y_{\alpha-1}\}) \cup [0, 1]_\alpha$, за y_α возьмем произвольную точку из $(0, 1]_\alpha$.

Проанализируем теперь свойства спектра $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\gamma |\ \alpha \leqslant \gamma < \omega_1\}$.

1. Каждое пространство Y_α есть компакт.

2. Отображение π_α^γ неприводимо для всех $\alpha \leqslant \gamma < \omega_1$, так как каждое отображение $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ неприводимо (см. об этом в [1]). Обозначим через B предел спектра $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\gamma\}$, и для каждого $\beta \in \omega_1$ через $\pi_\beta^{\omega_1}$ — отображение предельного пространства спектра B на Y_β, и пусть $*$ — точка $\{\{y_\alpha |\ \alpha < \omega_1\}\}$ в B. Докажем, что B — искомый бикомпакт. Очевидно, что если $b \in B \setminus \{*\}$, то точка b имеет счетный характер в B. Докажем, что $*$ — точка э. н. в B. Пусть W_1 и W_2 — два дизъюнктных открытых в B множества и $* \in [W_1]_B \cap \cap [W_2]_B$. Отображение $\psi \equiv \pi_0^{\omega_1}$ бикомпакта B на Y_0 неприводимо, поэтому существуют такие дизъюнктные открытые множества S_1 и S_2 в Y_0, что $\psi^{-1}(S_1) \subseteq W_1$, $[\psi^{-1}(S_1)]_B \supset W_1$, $\psi^{-1}(S_2) \subseteq W_2$, $[\psi^{-1}(S_2)]_B \supset W_2$, тем самым $S_1 \in \sigma$ и $S_2 \in \sigma$ и какое-то из этих двух множеств имеет меньший номер, пусть $S_1 = V_{\alpha_1}$, $S_2 = V_{\alpha_2}$ и $\alpha_1 < \alpha_2$. Так как для любого $\beta < \omega_1$ $y_\beta \in [(\pi_0^\beta)^{-1}(S_1)]_{Y_\beta} \cap \cap [(\pi_0^\beta)^{-1}(S_2)]_{Y_\beta}$, то на некотором шаге γ описанного выше трансфинитного индуктивного процесса при использовании леммы 3 за W будет взято $V_{\alpha_1} = S_1$, и мы получим тогда, что $y_{\gamma+1} \notin [(\pi_0^{\gamma+1})^{-1}(Y_0 \setminus S_1 \setminus \{y_0\})]_{Y_{\gamma+1}}$, тем самым и $* \notin [\psi^{-1}(S_2)]_B$. Противоречие.

Построение примера 2 полностью завершено.

Пример, аналогичный примеру 2, можно построить и использованием лишь аксиомы Мартина, однако это построение громоздко и потому опускается.

Примечание при корректуре. Недавно В. К. Ван Дауэн доказал, что для всякого вполне регулярного не псевдокомпактного пространства X со счетной π-базой в $\beta X \setminus X$ существует далекая точка. Отсюда также следует существование вполне регулярного пространства с единственной и неизолированной точкой э. н.

Литература

[1] В. В. Федорчук, *О бикомпактах с несовпадающими размерностями*, Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 2, стр. 275–277.

[2] — *Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств*, Математич. сборник, 1976, т. 99, № 1, стр. 3–33.

[3] Е. Г. Скляренко, *Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений*, Известия АН СССР, сер. матем., 1962, т. 26, № 3, стр. 427–452.

[4] R. Telgársky, *Scattered compactification and points of extremal disconnectedness*, Bull. Acad. Polon. Sci. 25 (1977), pp. 159–163.

Accepté par la Rédaction le 12. 9. 1977

$L_{\omega_1\omega}$ equivalence between countable and uncountable linear orderings *

by

Charles K. Landraitis (Boston, Mass.)

Abstract. The complete $L_{\omega_1\omega}$ theory of an arbitrary denumerable (linear) order type $\mathfrak{A}$ is either (i) categorical, (ii) satisfied in all powers $\leqslant 2^{\aleph_0}$, or (iii) satisfied in all infinite powers. This holds even if $\mathfrak{A}$ is permitted to carry unary predicates. Algebraic properties necessary and sufficient for $\mathfrak{A}$ to be of type (i) or (iii) are stated.

§ 1. Preliminaries. Notation and terminology, where not specifically introduced, will follow [1] or [5]. $|A|$ will denote the cardinality of the set A, and $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ that the structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are isomorphic. By an *ordering* we mean a structure $\mathfrak{A} = (A, \leqslant, P_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I}$, where $\leqslant$ is a reflexive linear ordering of A, $|I| \leqslant \aleph_0$, and each $P_i^{\mathfrak{A}}$ is a unary predicate on A. When no unary predicates are present $\mathfrak{A}$ will be referred to as an *order type*. Throughout the paper we assume that L is a first-order finitary language for the orderings currently being considered and that $L_{\omega_1\omega}$ and $L_{\infty\omega}$ are the infinitary languages with the same predicate symbols as L. By a *Scott sentence* we mean a complete $L_{\omega_1\omega}$ sentence satisfied by an ordering.

The universes of orderings $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ are denoted by $A, B, C, A_0, A_1, \ldots$ An ordering is referred to as *densely ordered* or *dense* if it satisfies

$$\exists x \exists y (x \neq y) \wedge \forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y)).$$

$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ is referred to as *dense* in $\mathfrak{A}$ if $\mathfrak{A}$ is dense and satisfies

$$\forall x, y \in A\, (x < y \to \exists z \in B (x < z < y)).$$

If $\mathfrak{A}$ contains a densely ordered subset, then $\mathfrak{A}$ is *nonscattered*. Otherwise $\mathfrak{A}$ is *scattered*. $\mathfrak{B}$ is an *interval* of $\mathfrak{A}$ if $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ and $\forall x, y \in B \forall z \in A (x < z < y \to z \in B)$. By a *nontrivial interval* we mean one with at least two elements. An interval without endpoints is *open*. The notations (a, b), $[a, b]$ for intervals are to be interpreted as usual, while $\mathfrak{A}^{\leqslant a}$, $\mathfrak{A}^{<a}$, $\mathfrak{A}^{\geqslant a}$, $\mathfrak{A}^{>a}$ denote the intervals $\{b \in A\colon b \leqslant a\}$, $\{b \in A\colon b < a\}$, $\{b \in A\colon b \geqslant a\}$, $\{b \in A\colon b > a\}$. Topological notions, such as neighborhood and limit point, are relative to the topology generated by the open intervals of a dense ordering.

* The author wishes to thank Dr. V. Harnik for his support and assistance.