each n, R^n is hereditarily Lindelöf but R is not hereditarily separable is omitted here since it is analogous to the arguments that S (in Example 1) is not hereditarily Lindelöf but that S^n is hereditarily separable for each n.

Finally, the author wishes to thank J. W. Rogers, Jr. for bringing Juhasz's Lemmas to his attention.

Added in proof. Using the continuum hypothesis, K. Kunnen has recently obtained an example of a perfectly normal space X so that X^{ω} is hereditarily separable but X is not Lindelöf.

References

[1] T. J. Jech, *Lectures in set theory*, Lecture Notes in Set Theory, 217 (1971), Springer-Verlag, New York.

[2] F. B. Jones, *Concerning normal and completely normal spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), pp. 671–677.

[3] I. Juhasz, *Cardinal functions in topology*, Math. Centre Tracts, 34 (1971), Amsterdam.

[4] E. Michael, *Paracompactness and the Lindelöf property in finite products and countable cartesian products*, Comp. Math. 23 (1971), pp. 199–214.

[5] M. E. Rudin and V. L. Klee, Jr., *A note on certain function spaces*, Arch. Math. 7 (1956), pp. 469–470.

AUBURN UNIVERSITY
Auburn, Alabama

Accepté par la Rédaction le 11. 7. 1977

О размерности произведений топологических пространств

В. В. Филиппов (Москва)

Abstract. The inequality $\dim X\times Y \leqslant \dim X+\dim Y$ is established if (1) X and Y are completely regular spaces and the projection of $X\times Y$ onto Y is closed, and if (2) $X\times Y$ is a normal countably paracompact space and Y is a paracompact p-space. Counterparts for Ind ard also obtained under the additional assumption that $X\times Y$ is normal and the finite sum theorem for Ind holds in X and in Y.

В этой заметке мы получим некоторые условия, достаточные для выполнения неравенств

(*) $$\dim X\times Y \leqslant \dim X+\dim Y,$$

(**) $$\operatorname{Ind} X\times Y \leqslant \operatorname{Ind} X+\operatorname{Ind} Y,$$

$$\operatorname{ind} X\times Y \leqslant \operatorname{ind} X+\operatorname{ind} Y.$$

Наиболее сильным из предшествующих результатов, связанных с выполнением (*) является теорема Кодамы [10], существенным усилением которой является теорема 2.4 настоящей работы, решающая одну из проблем Нагаты [13].

Отметим, что неравенство (**) не верно даже для бикомпактов, см. [6]. Положительные результаты, связанные с (**) будут нами получены в дополнительных предположениях, а именно, в предположении выполнения теоремы суммы для размерности Ind в сомножителях.

Будем говорить, что *пространство* X *удовлетворяет условию* (Σ), если для любого конечного семейства γ его замкнутых подмножеств

$$\operatorname{Ind}(\bigcup\gamma) = \max\{\operatorname{Ind} F\colon F\in\gamma\} \quad (\text{см. [14]}).$$

Результаты этой заметки были сообщены без доказательств в [7].

§ 1. Случай первый: проектирование на один из сомножителей является замкнутым отображением

Пусть X — топологическое пространство. Будем говорить, что действительная функция ϱ, определенная на произведении $X\times X$, есть *непрерывная (на пространстве X) псевдометрика*, если она удовлетворяет аксиомам псевдометрики, см. [9], и тождественное отображение топологического пространства X на псевдометрическое пространство (X,ϱ) непрерывно.

Лемма 1.1. *Пусть в произведении $X\times Y$ проектирование на Y является замкнутым отображением, $\eta_i\colon X\times Y\to[0,1]$, $i=1,\dots,i_0$ — конечное число непрерывных функций. Тогда $\varrho(y_1,y_2)=\sup\{|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_2)|\colon x\in X,\ i=1,\dots,i_0\}$ есть непрерывная на Y псевдометрика.*

Доказательство. I. Из аксиом псевдометрики:

(а) $\varrho(y_1,y_2)=\varrho(y_2,y_1)\geqslant 0$,

(b) $\varrho(y_1,y_2)\leqslant\varrho(y_1,y_3)+\varrho(y_3,y_2)$.

(а) выполняется тривиально. Убедимся в справедливости (б). Для любой точки $x\in X$ и любого $i=1,\dots,i_0$

$$|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_2)| = |(\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_3))+(\eta_i(x,y_3)-\eta_i(x,y_2))|\leqslant$$
$$\leqslant|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_3)|+|\eta_i(x,y_3)-\eta_i(x,y_2)|\leqslant C,$$

где

$$C=\sup\{|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_3)|\colon x\in X, i=1,\dots,i_0\}+$$
$$+\sup\{|\eta_i(x,y_3)-\eta_i(x,y_2)|\colon x\in X, i=1,\dots,i_0\}=$$
$$=\varrho(y_1,y_3)+\varrho(y_3,y_2),$$

поэтому

$$\varrho(y_1,y_2)=\sup\{|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_2)|\colon x\in X,\ i=1,\dots,i_0\}\leqslant C,$$

что и означает выполнение (б).

II. Покажем, что для любой точки $y_0\in Y$ и любого $\varepsilon>0$ найдется окрестность Oy_0 точки y_0 такая, что как только $y\in Oy_0$, $\varrho(y_1,y_0)<\varepsilon$.

Рассмотрим функции $\varphi_i(x,y)=|\eta_i(x,y)-\eta_i(x,y_0)|$, $i=1,\dots,i_0$. Как композиции непрерывных функций эти функции непрерывны на $X\times Y$. Множество $M_i=\{(x,y)\colon (x,y)\in X\times Y,\ \varphi_i(x,y)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon\}$, $i=1,\dots,i_0$, замкнуто и не пересекается с множеством $X\times\{y_0\}$, на котором функция φ_i принимает значение 0. Мы предположили проектирование на Y— замкнутым отображением, поэтому замкнута проекция M_i множества M_i^* на пространство Y, а в силу предыдущего замечания эта проекция не содержит точки y_0. Пусть $Oy_0=Y\setminus\bigcup_{i=1}^{i_0}M_i^*$.

Тогда для произвольной точки $y\in Oy_0$ и любой точки $x\in X$ и любого $i=1,\dots,i_0$

$$|\eta_i(x,y)-\eta_i(x_1,y_0)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

В силу определения ϱ $\varrho(y,y_0)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$, что и требовалось.

III. В силу одного из эквивалентных определений непрерывного отображения (см. [18]) II означает, что тождественное отображение топологического пространства Y на псевдометрическое пространство (Y,ϱ) непрерывно, что и утверждалось.

Очевидно

Лемма 1.2. *Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — непрерывные на пространстве Y псевдометрики. Тогда функция $\varrho=\max\{\varrho_1,\varrho_2\}$ есть непрерывная на пространстве Y псевдометрика.*

Лемма 1.3. *Пусть пространство Y — вполне регулярно, $\dim\beta Y<\infty$, X — бикомпакт, $f\colon\beta(X\times Y)\to\beta Y$ — продолжение на стоун-чеховское расширение проектирования произведения $X\times Y$ на сомножитель Y. Тогда для любой точки $y_0\in\beta Y$*

$$\dim f^{-1}(y_0)\leqslant\dim X.$$

Доказательство. I. Пусть $y_0\in\beta Y$, $\omega=\{\Omega_1,\dots,\Omega_p\}$ — произвольное открытое конечное покрытие пространства $f^{-1}(y_0)$. В дальнейшем мы впишем в это покрытие кратности $\leqslant\dim X+1$.

II. Пространство $f^{-1}(y_0)$ нормально (даже бикомпактно), поэтому существует замкнутое покрытие $\delta=\{\Delta_1,\dots,\Delta_p\}$, поэлементно (=комбинаторно, см. [2] стр. 68) вписанное в ω: $\Delta_i\subseteq\Omega_i$, $i=1,\dots,p$ (см. [2], стр. 113, теорема 14). По лемме Урысона ([2], стр. 60) для каждого $i=1,\dots,p$ существует непрерывная функция $\eta_i\colon\beta(X\times Y)\to[0,1]$, такая, что $\Delta_i\subseteq\eta_i^{-1}(1)$ и $f^{-1}(y_0)\setminus\Omega_i\subseteq\eta_i^{-1}(0)$.

III. По лемме 1.1 псевдометрика

$$\varrho(y_1,y_2)=\sup\{|\eta_i(x,y_1)-\eta_i(x,y_2)|\colon x\in X,\ i=1,\dots,p\}$$

непрерывна на Y.

IV. Рассмотрим псевдометрическую, с псевдометрикой ϱ, топологию на Y. Соответствующее топологическое пространство обозначим Y_1, тождественное отображение Y на Y_1 — $\pi\colon Y\to Y_1$. Отображение π имеет единственное непрерывное продолжение $\pi_1\colon\beta Y\to\beta Y_1$. Подпространство $\tilde{Y}=\pi^{-1}(Y_1)\subseteq\beta Y$ как совершенный прообраз метрического пространства является паракомпактным p-пространством. Кроме того, $Y\subseteq\tilde{Y}\subseteq\beta Y$, поэтому $\beta\tilde{Y}=\beta Y$ и $\dim\tilde{Y}=\dim\beta Y$ (см. [2], стр. 296).

V. Пусть λ_0 — семейство открытых в пространстве $\tilde{Y}$ множеств, являющихся прообразами при отображении π_1 открытых в пространстве Y_1 множеств диаметра $<\frac{1}{3}$. Как легко видеть $\bigcup\lambda_0=Y$. По [2, стр. 374, следствие 2] существуют дискретные семейства γ_j, $j = 1, \dots, \dim\beta Y+1$, открытых в $\tilde{Y}$ множеств, вписанные в покрытие λ_0, $\bigcup\gamma = \tilde{Y}$, где $\gamma = \bigcup\{\gamma_j: j = 1, \dots$ $\dots, \dim\beta Y+1\}$. Из вписанности семейства γ в покрытие λ_0 следует, что для любого $\Gamma\in\gamma$ $\operatorname{diam}\pi_1(\Gamma)<\frac{1}{3}$.

VI. Множества $\Omega_i^* = \{t: t\in\beta(X\times Y),\ \eta_i(t)>\frac{2}{3}\}$, $i = 1, \dots, p$ открыты в пространстве $\beta(X\times Y)$ и покрывают множество $f^{-1}(y_0)$. В силу совершенности отображения f найдется окрестность Oy_0 точки y_0 в βY такая, что

$$f^{-1}([Oy_0])\subseteq\bigcup_{i=1}^{p}\Omega_i^*.$$

VII. Пусть $\gamma^* = \{\Gamma: \Gamma\in\gamma, \Gamma\cap[Oy_0]\neq\emptyset\}$.

Для каждого $\Gamma\in\gamma^*$ выберем $y_\Gamma\in\Gamma\cap[Oy_0]$. Пусть $V_{\Gamma i} = \{x: x\in X, (x, y_\Gamma)\in\in\Omega_i^*\}$, $i = 1, \dots, p$.

Мы взяли $y_\Gamma\in[Oy_0]$, поэтому $\bigcup_{i=1}^{p} V_{\Gamma i} = X$ при любом $\Gamma\in\gamma^*$.

VIII. Пусть $\omega_\Gamma = \{U_{\Gamma 1}, \dots, U_{\Gamma p}\}$, $\Gamma\in\gamma^*$ — открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant\dim X+1$, поэлементно вписанное в покрытие $\{V_{\Gamma 1}, \dots, V_{\Gamma p}\}$, $\{\varphi_{\Gamma 1}, \dots, \varphi_{\Gamma p}\}$ — разбиение единицы, поэлементно подчиненное покрытию ω_Γ, т.е. при любом $i = 1, \dots, p$ $\varphi_{\Gamma i}^{-1}((0, 1])\subseteq U_{\Gamma i}$.

Пусть $\{\Psi_\Gamma: \Gamma\in\gamma\}$ — разбиение единицы на $\tilde{Y}$ поэлементно подчиненное покрытию γ, т.е. $\Psi_\Gamma^{-1}((0, 1])\subseteq\Gamma$ при любом $\Gamma\in\gamma$.

IX. Рассмотрим непрерывные на $\tilde{Y}$ функции $\Psi_j(y) = \sum_{\Gamma\in\gamma_j}\Psi_\Gamma(y)$, $j = 1, \dots$ $\dots, \dim\beta Y+1$ и их продолжения Ψ_j на $\beta\tilde{Y} = \beta Y$. Так как $\sum_{j=1}^{\dim\beta Y+1}\Psi_j(y) = \sum_{\Gamma\in\gamma}\Psi_\Gamma(y) = 1$, то $\sum_{j=1}^{\dim\beta Y+1}\Psi_j\equiv 1$, поэтому при некотором $j_0 = 1, \dots, \dim\beta Y+1$ $\Psi_{j_0}(y_0)>0$.

X. Пусть для $x\in X$, $y\in Y$, $i = 1, \dots, p$

$$\chi_i(x,y) = \sum_{\Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}}\varphi_{\Gamma_i}(x)\cdot\Psi_\Gamma(y).$$

Семейство функций $\{\varphi_{\Gamma_i}(x)\Psi_\Gamma(y): \Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}\}$ поэлементно подчинено дискретному семейству $\{X\times(\Gamma\cap Y): \Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}\}$ и поэтому каждая из функций χ_i, $i = 1, \dots, p$, непрерывна на $X\times Y$.

Пусть χ_i^* — непрерывное продолжение функции χ_i на $\beta(X\times Y)$. При любых $x\in X$, $y\in Y$, $i = 1, \dots, p$, $0\leqslant\chi_i(x, y)\leqslant 1$, поэтому при любом $t\in\beta(X\times Y)$ $0\leqslant\chi_i^*(t)\leqslant 1$.

XI. Пусть $U_i = \chi_i^{*-1}((0, 1])$, $i = 1, \dots, p$.

Покажем, что $f^{-1}(y_0)\subseteq\bigcup_{i=1}^{p} U_i$.

Для любых точек $x\in X$ и $y\in[Oy_0]\cap Y$

$$\sum_{i=1}^{p}\chi_i(x, y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{\Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}}\varphi_{\Gamma i}(x)\Psi_\Gamma(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{\Gamma\in\gamma_{j_0}}\varphi_{\Gamma i}(x)\Psi_\Gamma(y) =$$

$$= \sum_{\Gamma\in\gamma_{j_0}}\Big(\sum_{i=1}^{p}\varphi_{\Gamma i}(x)\Big)\Psi_\Gamma(y) =$$

$$= \sum_{\Gamma\in\gamma_{j_0}}\Psi_\Gamma(y) = \Psi_{j_0}(y).$$

В силу непрерывности и замкнутости отображения проектирования $X\times Y$ на сомножитель Y $f^{-1}([Oy_0]) = [X\times Oy_0]_{\beta(X\times Y)}$, поэтому для любой точки $t\in f^{-1}(y_0)\subseteq f^{-1}([Oy_0]) = [X\times Oy_0]_{\beta(X\times Y)}$

$$\sum_{i=1}^{p}\chi_i^*(t) = \Psi_{j_0}(y_0)>0$$

и потому найдется $i = 1, \dots, p$, $\chi_i^*(t)>0$ и $t\in U_i$, что и требовалось.

XII. Покажем, что при любом $i = 1, \dots, p$ $U_i\cap f^{-1}(y_0)\subseteq\Omega_i$. Если $y\in\Gamma$, то $\varrho(y, y_\Gamma)<\frac{1}{3}$, поэтому при любых $i = 1, \dots, p$ и $x\in V_{\Gamma i}$

$$|\eta_i(x, y)-\eta_i(x, y_\Gamma)|<\tfrac{1}{3},$$

$$\eta_i(x, y)>\eta_i(x, y_\Gamma)-\tfrac{1}{3}>\tfrac{1}{3}.$$

Если $x\in X$, $y\in Y$ и $\chi_i^*(x, y) = \chi_i(x, y)>0$, то (см. определение χ_i в IX) при некотором $\Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}$ $\varphi_{\Gamma i}(x)>0$ и $\Psi_\Gamma(y)>0$,

$$x\in V_{\Gamma i}\quad\text{и}\quad y\in\Gamma,$$

$$\eta_i(x, y)>\tfrac{1}{3}.$$

В силу непрерывности функций χ_i^* и η_i, если $t\in f^{-1}(y_0)$, $\chi_i^*(t)>0$ (т.е. $t\in U_i$), то $\eta_i(t)\geqslant\frac{1}{3}$ и $t\in\Omega_i$.

XIII. Покажем, что кратность семейства

$$\{U_i: i = 1, \dots, p\}\leqslant\dim X+1.$$

Если это не так, что в силу плотности $X\times Y$ в $\beta(X\times Y)$, найдется точка $(x, y)\in X\times Y$, в которой $>\dim X+1$ функций семейства $\{\chi_i: i = 1, \dots, p\}$ отличны от нуля, а значит, в силу определения функций $\chi_i>\dim X+1$ функций семейства $\{\varphi_{\Gamma i}: i = 1, \dots, p\}$, где $y\in\Gamma\in\gamma^*\cap\gamma_{j_0}$, отличны от нуля, что не возможно, так как это семейство поэлементно подчинено покрытию ω_Γ кратности $\leqslant\dim X+1$.

XIV. Подведем итог. Для произвольного открытого конечного покрытия ω пространства $f^{-1}(y_0)$ мы указали вписанное в ω открытое покрытие $\{U_1\cap f^{-1}(y_0), \ldots, U_p\cap f^{-1}(y_0)\}$ кратности $\leqslant \dim X+1$, что и означает, что

$$\dim f^{-1}(y_0)\leqslant \dim X .$$

Лемма доказана.

Теорема 1.4. *Пусть в произведении $X\times Y$ вполне регулярных пространств проектирование на пространство Y является замкнутым отображением, $\dim \beta Y<\infty$, f: $\beta(X\times Y)\to\beta Y$ — продолжение на стоун-чеховские расширения проектирования. Тогда $\dim f=\dim\beta X$.*

Доказательство. I. Пространство $\beta(\beta X\times Y)$ является бикомпактным расширением пространства $X\times Y$, поэтому существует непрерывное отображение φ: $\beta(X\times Y)\to\beta(\beta X\times Y)$ оставляющее неподвижными точки множества $X\times Y$ $(\subseteq\beta(X\times Y)$ и $\subseteq\beta(\beta X\times Y))$ (см. [1], стр. 107, теорема 12).

II. Пусть π: $\beta(\beta X\times Y)\to\beta Y$ продолжение на стоун-чеховские расширения проектирования $\beta X\times Y\to Y$.

III. Как легко видеть $f|_{X\times Y}=\pi\varphi|_{X\times Y}$ и, в силу плотности $X\times Y$ в $\beta(X\times Y)$ $f=\pi\varphi$.

IV. В силу замкнутости отображения проектирования при $y\in Y$

$$f^{-1}(y)=[X\times\{y\}]_{\beta(X\times Y)}$$

(см. [4], стр. 352, задача 73).

В силу III $f^{-1}(y)=\varphi^{-1}(\pi^{-1}(y))$.

В силу замкнутости отображения проектирования $\beta X\times Y\to Y$ (ибо βX есть бикомпакт)

$$\pi^{-1}(y)=[\beta X\times\{y\}]_{\beta(\beta X\times Y)}=\beta X\times\{y\} .$$

Таким образом, $[X\times\{y\}]_{\beta(X\times Y)}=\varphi^{-1}(\beta X\times\{y\})$.

Но βX есть максимальное бикомпактное расширение пространства X, поэтому φ есть гомеоморфизм на $\varphi^{-1}(\beta X\times\{y\})$ и взаимно однозначно на $\varphi^{-1}(\beta X\times Y)$. Как ограничение замкнутого отображения φ на полный прообраз, $\varphi|_{\varphi^{-1}(\beta X\times Y)}$ есть замкнутое отображение на $\varphi^{-1}(\beta X\times Y)$ (см. [4], стр. 97, задача 319). Вместе это позволяет утверждать, что φ есть гомеоморфизм на $\varphi^{-1}(\beta X\times Y)$. В силу максимальности стоун-чеховского бикомпактного расширения $\beta(\beta X\times Y)$ φ есть гомеоморфизм на $\beta(X\times Y)$.

V. Для любой точки $y\in\beta Y$ по III $f^{-1}(y)=\varphi^{-1}(\pi^{-1}(y))$ а так как φ — гомеоморфизм, то $\dim f^{-1}(y)=\dim\pi^{-1}(y)$. По лемме 1.3 $\dim\pi^{-1}(y)\leqslant\dim\beta X$ Если $y\in Y$, то $\dim\pi^{-1}(y)=\dim\beta Y$. Таким образом, $\dim f=\dim\beta X$.

Теорема 1.5 (1). *Если в произведении вполне регулярных пространств $X\times Y$ проектирование на один из сомножителей есть замкнутое отображение, то $\dim\beta(X\times Y)\leqslant\dim\beta X+\dim\beta Y$.*

(1) Близкий результат был получен К. Моритой [12].

Доказательство. Утверждение тривиально справедливс, если по крайней мере один из сомножителей бесконечномерен. Рассмотрим случай конечномерных сомножителей. Пусть для определенности, проектирование на Y есть замкнутое отображение. Пусть f: $\beta(X\times Y)\to\beta Y$ — непрерывное продолжение проектирования. По теореме 1.4 $\dim f=\dim\beta X$. По формуле Гуревича (см. [14])

$$\dim\beta(X\times Y)\leqslant\dim\beta Y+\dim f=\dim\beta Y+\dim\beta X ,$$

что и утверждалось.

Следствие. *Пусть произведение $X\times Y$ нормально и проектирование на один из сомножителей является замкнутым отображением. Тогда*

$$\dim X\times Y\leqslant\dim X+\dim Y .$$

Это следует из теоремы 1.5 с учетом равенств

$$\dim\beta(X\times Y)=\dim X\times Y,\quad \dim\beta X=\dim X,\quad \dim\beta Y=\dim Y ,$$

выполненных в сплу нормальности рассматриваемых пространств (см. [2], стр. 296).

Теорема 1.6. *Пусть пространства X и Y удовлетворяют условию (Σ), произведение $X\times Y$ нормально и проектирование на один из сомножителей является замкнутым отображением. Тогда*

$$\operatorname{Ind} X\times Y\leqslant\operatorname{Ind} X+\operatorname{Ind} Y .$$

Доказательство. Неравенство тривиально выполнено, если по крайней мере один из сомножителей бесконечномерен. Рассмотрим случай конечномерных сомножителей. Пусть, для определенности проектирование π: $X\times Y\to Y$ замкнуто.

I. Пусть подпространство $Z\subseteq X\times Y$ замкнуто, $Z=\bigcup\lambda$, где семейство λ состоит из замкнутых множеств вида $F'\times F''$, где F' — замкнуто в X, F'' — замкнуто в Y и $\operatorname{Ind} F'\times\operatorname{Ind} F''\leqslant k$, ϱ — непрерывная на Y псевдометрика, ω — открытое и локально конечное относительно ϱ покрытие пространства Y, каждое множество вида $X\times\Omega$, $\Omega\in\omega$, пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ.

В дальнейшем индукцией по k мы покажем, что $\operatorname{Ind} Z\leqslant k$. Первый шаг тривиален: если $k=-1$, то $Z=\emptyset$ и $\operatorname{Ind} Z=-1$.

II. Пусть F_0 и F_1 — произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества подпространства Z. Множество Z замкнуто в $X\times Y$, поэтому множества F_0 и F_1 замкнуты в $X\times Y$ и по лемме Урысона ([2], стр. 60) существует непрерывная функция η: $X\times Y\to[0, 1]$, принимающая значение 0 на F_0 и значение 1 на F_1.

По лемме 1.1 псевдометрика ϱ_1,

$$\varrho_1(y_1, y_2) = \sup\{|\eta(x, y_1)-\eta(x, y_2)|:\ x \in X\},$$

непрерывна на Y.

III. По лемме 1.2 псевдометрика $\varrho_2 = \max\{\varrho_1, \varrho\}$ непрерывна на Y и, как легко видеть, всякое множество открытое на Y относительно псевдометрики ϱ открыто и относительно псевдометрики ϱ_2, поэтому покрытие ω открыто и локально конечно относительно этой псевдометрики и семейство $\gamma = \{G\colon\ G \subseteq Y,\ G$ открыто относительно псевдометрики ϱ_2, пересекается с конечным числом элементов покрытия ω, $\operatorname{diam}_{\varrho_2} G \leqslant \frac{1}{8}\}$ покрывает пространство Y. В силу паракомпактности метрического (псевдометрического) пространства существует покрытие ω_1 пространства Y, открытое и локально конечное относительно псевдометрики ϱ_2, вписанное в ω и γ. В силу нормальности псевдометрического пространства каждому элементу Ω покрытия ω_1 можно поставить в соответствие замкнутое относительно псевдометрики ϱ_2 множество $F(\Omega) \subseteq \Omega$ таким образом, что $\bigcup\{F(\Omega)\colon\ \Omega \in \omega_1\} = Y$ (см. [2], стр. 118, предложение 6).

IV. Пусть $\omega_2 = \{\Omega\colon\ \Omega \in \omega_1,\ F(\Omega) \neq \emptyset\}$. В силу III семейство ω_2 покрывает пространство Y, состоит из открытых относительно псевдометрики ϱ_2 множеств диаметра $\leqslant \frac{1}{8}$ и вписано в покрытие ω.

V. Множество $\Omega \in \omega_2$ лежит в некотором элементе покрытия ω и потому множество $X \times \Omega$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ. Пусть это будут $F_i' \times F_i''$, $i = 1, \ldots, i_0$, множество F_i' замкнуто в X, F_i'' — в Y, $\operatorname{Ind} F_i' + \operatorname{Ind} F_i'' \leqslant k$.

Возьмем произвольно $y_1 \in F(\Omega)$. Пусть

$$M_0 = \{x\colon\ x \in X, \eta(x, y_1) \leqslant \tfrac{1}{4}\}, \quad M_1 = \{x\colon\ x \in X, \eta(x, y_1) \geqslant \tfrac{3}{4}\},$$

$$M_0^* = \{x\colon\ x \in X, \eta(x, y_1) \leqslant \tfrac{1}{2}\}, \quad M_1^* = \{x\colon\ x \in X, \eta(x, y_1) \geqslant \tfrac{1}{2}\},$$

Имеем $M_0^* \cup M_1^* = X$, $M_0 \cap M_1^* = M_0^* \cap M_1 = \emptyset$. Пусть

$$X_j = \bigcup\{F_i'\colon\ \operatorname{Ind} F_i' \leqslant j,\ i = 1, \ldots, i_0\},$$

$$Y_j = \bigcup\{F_i''\colon\ \operatorname{Ind} F_i'' \leqslant j,\ i = 1, \ldots, i_0\}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

По предположению в пространствах X и Y выполнено условие (Σ), поэтому всегда $\operatorname{Ind} X_j \leqslant j$, $\operatorname{Ind} Y_j \leqslant j$ и для каждого $j = 0, \ldots, k$ существуют открытые в X_j множества $U(j)$

$$U(j) \supseteq M_0^* \cap X_j, \quad [U(j)] \cap M_1 = \emptyset, \quad \operatorname{Ind}([U(j)] \setminus U(j)) \leqslant j-1,$$

и открытые в Y_j множества $V(j)$

$$F(\Omega) \cap Y_j \subseteq V(j) \subseteq [V(j)] \subseteq \Omega, \quad \operatorname{Ind}([V(j)] \setminus V(j)) \leqslant j-1.$$

Пусть

$$W(\Omega) = \Big(\bigcup_{j=0}^{k} (X_j \times Y_{k-j})\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{k} \big((X_j \times Y_{k-j}) \setminus (U(j) \times V(k-j))\big)\Big).$$

По своему определению множество $W(\Omega)$ открыто в подпространстве $\big(\bigcup_{j=0}^{k} (X_j \times Y_{k-j})\big) \cap (X \times \Omega)$ и потому открыто в подпространстве Z.

Имеем

$$W(\Omega) \subseteq \Big(\bigcup_{j=0}^{k} (X_j \times Y_{k-j})\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{k} \big((X_j \times Y_{k-j}) \setminus ((X \setminus M_1) \times \Omega)\big)\Big) \subseteq (X \setminus M_1) \times \Omega.$$

Но множество $\Omega \in \omega_2$ имеет относительно псевдометрики ϱ_2, а следовательно и псевдометрики ϱ_1 диаметр $\leqslant \frac{1}{8}$. Это означает, что для любых $x \in X \setminus M_1$ и $y \in \Omega$

$$|\eta(x, y) - \eta(x, y_1)| \leqslant \tfrac{1}{8},$$

$$\eta(x, y) \leqslant \eta(x, y_1) + \tfrac{1}{8} \leqslant \tfrac{7}{8},$$

то есть, если $t \in W(\Omega)$, то $\eta(t) \leqslant \frac{7}{8}$.

По построению, при любом $j = 0, \ldots, k$

$$(M_0^* \times F(\Omega)) \cap (X_j \times Y_{k-j}) = (X_j \cap M_0^*) \times (F(\Omega) \cap Y_{k-j}) \subseteq U(j) \times V(k-j),$$

а так как

$$(M_0^* \times F(\Omega)) \cap Z \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} (X_j \times Y_{k-j}),$$

то в силу определения $W(\Omega)$

$$(M_0^* \times F(\Omega)) \cap Z \subseteq W(\Omega).$$

К семейству $\lambda(\Omega)$ отнесем множества

$$X_j \times Y_{k-j-1}, \quad j = 0, \ldots, k-1,$$

$$[U(j)] \times ([V(j)] \setminus V(j)), \quad j = 0, \ldots, k,$$

$$([U(j)] \setminus U(j)) \times [V(j)], \quad j = 0, \ldots, k.$$

Отметим сразу, что каждое из этих множеств имеет вид $F' \times F''$ где $\operatorname{Ind} F' \times \operatorname{Ind} F'' \leqslant k-1$.

Покажем, что $[W(\Omega)] \setminus W(\Omega) \subseteq \bigcup \lambda(\Omega)$. Пусть

$$(x, y) \in [W(\Omega)] \setminus W(\Omega), \quad j_1 = \min\{j\colon\ x \in X_j\}, \quad j_2 = \min\{j\colon\ y \in Y_j\}.$$

Если $j_1 + j_2 < k$, то $(x, y) \in X_{j_1} \times Y_{k-j_1-1} \in \lambda(\Omega)$.

Рассмотрим случай $j_1 + j_2 = k$

$$(x, y) \in [W(\Omega)] \subseteq \Big[\Big(\bigcup_{j=0}^{k} (X_j \times Y_{k-j})\Big) \setminus \big((X_{j_1} \times Y_{j_2}) \setminus (U(j_1) \times V(j_2))\big)\Big] =$$

$$= \bigcup_{j=0}^{k} \Big[(X_j \times Y_{k-j}) \setminus \big((X_{j_1} \times Y_{j_2}) \setminus (U(j_1) \times V(j_2))\big)\Big] \subseteq$$

$$\subseteq \Big(\bigcup_{j=0,\ j \neq j_1}^{k} (X_j \times Y_{k-j})\Big) \cup [U(j_1) \times V(j_2)].$$

Учитывая, что $(x, y) \notin X_j \times Y_{k-j}$ при $j \neq j_1$ получаем

$$(x, y) \in [U(j_1) \times V(j_2)].$$

$(x, y) \notin W(\Omega)$, поэтому $(x, y) \in (X_{j_1} \times Y_{j_2}) \setminus (U(j_1) \times V(j_2))$.

Таким образом,

$$(x, y) \in [U(j_1) \times V(j_2)] \setminus (U(j_1) \times V(j_2)) =$$
$$= \big([U(j_1)] \times ([V(j_2)] \setminus V(j_2))\big) \cup \big(([U(j_1)] \setminus U(j_1)) \times [V(j_2)]\big) \subseteq \bigcup \lambda(\Omega).$$

VI. Семейство $\{W(\Omega) \colon \Omega \in \omega_2\}$ поэлементно вписано в локально конечное семейство $\{X \times \Omega \colon \Omega \in \omega_2\}$: $W(\Omega) \subseteq X \times \Omega$ и потому само локально конечно.

VII. Пусть $W^* = \bigcup \{W(\Omega) \colon \Omega \in \omega_2\}$. Покажем, что $F_0 \subseteq W^*$. Пусть $(x, y) \in F_0$, $y \in F(\Omega) \subseteq \Omega$. Тогда, как легко видеть, $x \in M_0$ (в обозначениях V),

$$(x, y) \in (M_0 \times F(\Omega)) \cap Z \subseteq W(\Omega) \subseteq W^*.$$

Покажем, что $F_1 \cap [W^*] = \emptyset$. Как мы знаем (V), если $\Omega \in \omega_2$ и $t \in W(\Omega)$, то $\eta(t) \leqslant \frac{7}{8}$. То есть при $t \in [W^*]$ $\eta(t) \leqslant \frac{7}{8}$ и, следовательно, $t \notin F_1$.

VIII. Пусть $\lambda_1 = \bigcup \{\lambda(\Omega) \colon \Omega \in \omega_2\}$.

По предположению покрытие ω_2 локально конечно относительно псевдометрики ϱ_2, поэтому существует открытое и локально конечное относительно псевдометрики ϱ_3 покрытие ω_3 пространства Y, каждый элемент которого пересекается с конечным числом элементов покрытия ω_2.

Так как семейство $\lambda(\Omega)$ конечно и $\bigcup \lambda(\Omega) \subseteq X \times \Omega$, то каждое множество вида $X \times \Omega'$, где $\Omega' \in \omega_3$, пересекается (по построению покрытия ω_3) не более чем с конечным числом элементов семейства λ_1. По V каждый элемент семейства λ_1 имеет вид $F' \times F''$, где $\operatorname{Ind} F' + \operatorname{Ind} F'' \leqslant k-1$.

Пусть $Z_1 = \bigcup \lambda_1$. В силу сказанного, по предположению индукции (см. I) $\operatorname{Ind} Z_1 \leqslant k-1$.

IX. В силу локальной конечности семейства $\{W(\Omega) \colon \Omega \in \omega_3\}$ (см. VI) и определения W^* (см. VII)

$$[W^*] \setminus W^* \subseteq \bigcup \{[W(\Omega)] \setminus W(\Omega) \colon \Omega \in \omega_2\} \subseteq \bigcup \lambda_1 = Z_1$$

поэтому $\operatorname{Ind}([W^*] \setminus W^*) \leqslant k-1$.

В силу произвольности замкнутых множеств F_0, F_1, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ и VII это означает, что $\operatorname{Ind} Z \leqslant k$.

X. При $Z = X \times Y$, $\lambda = \{X \times Y\}$, $\varrho \equiv 0$, $\omega = \{Y\}$ (см. I) получаем $\operatorname{Ind} X \times Y \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$. Теорема доказана.

§ 2. Случай второй: один из сомножителей является паракомпактным p-пространством

В этом параграфе мы получим обобщение теоремы Кодамы [10] и близкий результат для размерности Ind. Начнем с предварительных рассмотрений.

Лемма 2.1. *Пусть $\pi \colon Y \to Y_0$ — совершенное отображение, β — база пространства Y_0, $\eta_i \colon X \times Y \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, i_0$ — конечное число непрерывных функций, $\varepsilon > 0$.*

Существуют дизъюнктные семейства $s(B, n)$, $B \in \beta$, $n = 1, 2, \ldots$, открытых в X множеств, такие, что

(а) *если $x_1, x_2 \in S \in s(B, n)$, $y \in \pi^{-1}(B)$, то при любом $i = 1, \ldots, i_0$ $|\eta_i(x_1, y) - \eta_i(x_2, y)| < \varepsilon$,*

(б) $\bigcup\limits_{B \in \beta} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup \{S \times B \colon S \in s(B, n)\} = X \times Y_0$.

Доказательство. I. Покажем, что для любых $x_1, x_2 \in X$, $y_0 \in Y_0$, $\delta > 0$ найдутся $B \in \beta$, $y_0 \in B$, открытые в X множества $Ox_1 \ni x_1$, $Ox_2 \ni x_2$ такие, что как только $y' \in \pi^{-1}(B)$, $x' \in Ox_1$, $x'' \in Ox_2$, $i = 1, \ldots, i_0$,

$$|\eta_i(x', y') - \eta_i(x'', y')| < \sup\{|\eta_i(x_1, y) - \eta_i(x_2, y)| \colon \; y \in \pi^{-1}(y_0), \; i = 1, \ldots, i_0\} + \delta$$

и как только $y' \in \pi^{-1}(B)$, $x', x'' \in Ox_p$ ($p = 1$ или 2), $i = 1, \ldots, i_0$, $|\eta_i(x', y') - \eta_1(x'', y')| < \delta$.

Возьмем произвольно точку $y \in \pi^{-1}(y_0)$. В силу непрерывности функций $\eta_1, \ldots, \eta_{i_0}$ найдутся окрестности вида $Ox_1(y) \times Oy$, $Ox_2(y) \times Oy$ точек (x_1, y), (x_2, y) на всяких двух точках, каждой из которых значения любой из этих функций отличаются менее чем на $\frac{1}{2}\delta$. Из покрытия $\{Oy \colon y \in \pi^{-1}(y_0)\}$ бикомпакта $\pi^{-1}(y_0)$ выбираем конечное $\{Oy_1, \ldots, Oy_j\}$. Пусть $Ox_1 = \bigcap\limits_{q=1}^{j} Ox_1(y_q)$, $Ox_2 = \bigcap\limits_{q=1}^{j} Ox_2(y_q)$. В силу замкнутости отображения π множество $\pi(Y \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{j} Oy_q)$ замкнуто, а так как оно не содержит точки y_0, то найдется $B \in \beta$, $y_0 \in B$, $B \cap \pi(Y \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{j} Oy_q) = \emptyset$.

Если $x' \in Ox_1$, $x'' \in Ox_2$, $y' \in \pi^{-1}(B)$, то при некотором $q = 1, \ldots, j$, $y' \in Oy_q$ и

$$(x', y') \in Ox_1 \times \pi^{-1}(B) \subseteq Ox_1(y_q) \times Oy_q,$$
$$(x'', y') \in Ox_2 \times \pi^{-1}(B) \subseteq Ox_2(y_q) \times Oy_q$$

и для любого $i = 1, \ldots, i_0$

$$|\eta_i(x', y') - \eta_i(x'', y')| \leqslant$$
$$\leqslant |\eta_i(x', y') - \eta_i(x_1, y_q)| + |\eta_i(x_1, y_q) - \eta_i(x_2, y_q)| + |\eta_i(x_2, y_q) - \eta_i(x'', y')| <$$
$$< \tfrac{1}{2}\delta + \sup\{|\eta_i(x_1, y) - \eta_i(x_2, y)| \colon y \in \pi^{-1}(y_0), \; i = 1, \ldots, i_0\} + \tfrac{1}{2}\delta$$

— первая оценка получена.

Пусть теперь обе точки x', x'' принадлежат одному из множеств Ox_p, $p=1$ или 2, $y'\in\pi^{-1}(B)$. При некотором $q=1,\dots,j$ $y'\in Oy_q$ и для любого $i=1,\dots,i_0$

$$|\eta_i(x',y')-\eta_i(x'',y')|\leqslant|\eta_i(x',y')-\eta_i(x_p,y_p)|+|\eta_i(x_p,y_q)-\eta_i(x'',y')|\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\delta=\delta$$

— вторая оценка получена.

II. Пусть $g(B,n)=\{G\colon G\subseteq X,\ G$ — открыто в X, если $y\in\pi^{-1}(B)$, $x_1,x_2\in G$, то при любом $i=1,\dots,i_0$ $|\eta_i(x_1,y)-\eta_i(x_2,y)|<1/n\}$, $\tilde g(B,n)=\{G\times B\colon G\in g(B,n)\}$.

III. По теореме Цермело множество X мы можем вполне упорядочить [1]. Пусть $<$ — соответствующее отношение порядка.

IV. Пусть $R(x,B,n)=\{x'\colon x'\in X$, при любом $i=1,\dots,i_0$, любом $y\in\pi^{-1}(B)$, $|\eta_i(x',y)-\eta_i(x,y)|\leqslant\varepsilon/2-1/n\}$,

$$S(x,B,n)=g(B,2n)\big(R(x,B,n)\setminus\bigcup_{x'<x}g(B,n)R(x',B,n)\big)$$

(здесь γM есть звезда множества M относительно семейства γ). По своему определению множества $S(x,B,n)$ открыты в пространстве X.

Пусть $s(B,n)=\{S(x,B,n)\colon x\in X\}$.

V. Покажем, что семейство $s(B,n)$ дизъюнктно. Пусть $x_1\neq x_2\in X$. Примем для определенности $x_1<x_2$. Покажем, что $S(x_1,B,n)\cap S(x_2,B,n)=\varnothing$. Допустим противное. В силу определения (см. IV) это означает, что существуют множества G_1 и G_2 такие, что

1) $G_1,G_2\in g(B,2n)$, $G_1\cap G_2\neq\varnothing$,

2) $G_1\cap R(x_1,B,n)\neq\varnothing$,

3) $G_2\cap\big(R(x_2,B,n)\setminus g(B,n)R(x_1,B,n)\big)\neq\varnothing$.

Из 1) и определения $g(B,n)$ (см. II) следует, что $G=G_1\cup G_2\in g(B,n)$. Из 2) следует, что $G\subseteq g(B,n)$, $R(x_1,B,n)$, что противоречит 3). Таким образом, наше допущение не верно, что и означает дизъюнктность семейства $s(B,n)$.

VI. Проверим выполнение (б). Возьмем произвольно $(x,y_0)\in X\times Y_0$. Пусть x_1 — наименьшая из тех точек $x'\in X$, для которых

$$\sup\{|\eta_i(x',y)-\eta_i(x,y)|\colon y\in\pi^{-1}(y_0),\ i=1,\dots,i_0\}=\varepsilon(x')<\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

(такие точки существуют, например, сама точка x). Пусть n таково, что $\varepsilon(x')<\varepsilon/2-2/n$. Пусть $B\in\beta$, $Ox\ni x$, $Ox_1\ni x_1$ построены в соответствии с I по $\delta=1/2n$.

Покажем, что $x\notin g(B,n)R(x',B,n)$, если $x'<x_1$.

Допустим противное. Тогда существует $G\in g(B,n)$, $G\ni x$, $G\cap R(x',B,n)\neq\varnothing$. Пусть $\bar x\in R(x',B,n)$. Имеем для $y\in\pi^{-1}(B)$, $i=1,\dots,i_0$,

$$|\eta_i(x',y)-\eta_i(x,y)|\leqslant|\eta_i(x',y)-\eta_i(\bar x,y)|+|\eta_i(\bar x,y)-\eta_i(x,y)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{n},$$

что противоречит выбору точки x_1.

Таким образом, $x\in R(x_1,B,n)\setminus\bigcup_{x'<x_1}g(B,n)R(x',B,n)$ и $x\in Ox\in g(B,2n)$, то есть $x\in Ox\subseteq S(x_1,B,n)$ и $(x,y_0)\in S(x_1,B,n)\times B$, что и требовалось.

VII. Выполнение (а) легко следует из определения $S(x,B,n)$ (см. IV). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть произведение $X\times Y$ нормально и счетно паракомпактно, Y — метризуемое пространство, ω — σ-дизъюнктное открытое покрытие пространства $X\times Y$. Тогда существуют дискретные семейства $\{C'_\alpha\colon \alpha\in A_i\}$, $\{C''_\alpha\colon \alpha\in A_i\}$, $i=1,2,\dots$, открытых в пространстве Y множеств, $[C'_\alpha]\subseteq C''_\alpha$, $\alpha\in A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$; и дискретные семейства $\{D'_\beta\colon \beta\in B_\alpha\}$, $\{D''_\beta\colon \beta\in B_\alpha\}$, $\alpha\in A$, открытых в пространстве X множеств, $[D'_\beta]\subseteq D''_\beta$, $\beta\in\bigcup\{B_\alpha\colon \alpha\in A\}$, такие, что семейство $\{[D''_\beta\times C''_\alpha]\colon \beta\in B_\alpha,\ \alpha\in A\}$ вписано в покрытие ω, семейство $\{D'_\beta\times C'_\alpha\colon \beta\in B_\alpha,\ \alpha\in A\}$ покрывает пространство $X\times Y$.*

Доказательство. Пусть ϑ — σ-дискретная база пространства Y: $\vartheta=\bigcup_{m=1}^{\infty}\vartheta_m$, где ϑ_m, $m=1,2,\dots$ дискретное семейство. Пусть $\omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n$, где ω_n, $n=1,2,\dots$ — дизъюнктное семейство.

I. Пусть $W_n=\bigcup\omega_n$, $n=1,2,\dots$ Имеем $\bigcup_{n=1}^{\infty}W_n=\bigcup\omega=X\times Y$. В силу счетной паракомпактности и нормальности пространства $X\times Y$ существуют открытые множества V''_n, $n=1,2,\dots$, $[V''_n]\subseteq W_n$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty}V''_n=X\times Y$ [5].

II. Пусть $v_n=\{V''_n\cap\Omega\colon \Omega\in\omega_n\}$. Имеем

$$\bigcup v_n=V''_n\cap\bigcup\{\Omega\colon \Omega\in\omega_n\}=V''_n\cap W_n=V''_n$$

и для $v=\bigcup_{n=1}^{\infty}v_n$, $\bigcup v=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup v_n=X\times Y$. Так как $V''(\Omega)=V''_n\cap\Omega\subseteq\Omega$, где $\Omega\in\omega_n$ и семейство ω_n дизъюнктно, то для $\Omega'\neq\Omega$, $\Omega'\in\omega$, $V''(\Omega)\cap\Omega'=\varnothing$, поэтому $[V''(\Omega)]\cap\Omega'=\varnothing$, а так как, $[V''(\Omega)]\subseteq[V''_n]\subseteq W_n$, то $[V''(\Omega)]\subseteq\Omega$. Отсюда следует дискретность семейства v_n: для точки $t\in X\times Y$ возьмем окрестность $Ot=(X\times Y)\setminus[V''_n]$, если $t\in(X\times Y)\setminus(\bigcup\omega_n)$ и $Ot=\Omega$, если $t\in\Omega\subseteq\bigcup\omega_n$. В первом случае окрестность Ot не пересекается с множествами семейства v_n, во втором — пересекается лишь с одним, именно с $V''(\Omega)$.

III. Пусть для $\theta \in \vartheta$ и $V \subseteq X \times Y$

$$g(\theta, V) = \bigcup \{G\colon G \text{ открыто в } X,\ G \times \theta \subseteq V\},$$
$$\tilde{g}(\theta, V) = g(\theta, V) \times \theta.$$

Пусть $\gamma(m, n) = \{\tilde{g}(\theta, V'')\colon \theta \in \vartheta_m,\ V'' \in \nu_n\}$. Из дизъюнктности семейств ϑ_m и ν_n следует дизъюнктность семейства $\gamma(m, n)$. Пусть

$$\gamma = \bigcup \{\gamma(m, n)\colon m, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Покажем, что $\bigcup \gamma = X \times Y$. Возьмем произвольно $t \in X \times Y$. Так как ν — покрытие пространства $X \times Y$, некоторый его элемент V'' содержит точку t. Так как ϑ — база пространства Y при некотором $\theta \in \vartheta$ и открытом в X множестве G $t \in G \times \theta \subseteq V''$. Тогда $t \in G \times \theta \subseteq \tilde{g}(\theta, V'') \subseteq \bigcup \gamma$.

IV. Пусть $\Gamma(m, n) = \bigcup \gamma(m, n)$. По III

$$\bigcup \{\Gamma(m, n) : m, n = 1, 2, \ldots\} = \bigcup \gamma = X \times Y.$$

В силу счетной паракомпактности и нормальности пространства $X \times Y$ существуют открытые в $X \times Y$ множества $V'(m, n)$ такие, что $[V'(m, n)] \subseteq \Gamma(m, n)$ и $\bigcup \{V'(m, n)\colon m, n = 1, 2, \ldots\} = X \times Y$ [5].

Пусть $\lambda(m, n) = \{V'(\theta, V'') = V'(m, n) \cap \tilde{g}(\theta, V'')\colon \theta \in \vartheta_m,\ V'' \in \nu_n\}$. Имеем $[V'(\theta, V'')] \subseteq \tilde{g}(\theta, V'')$ и семейство $\lambda(m, n)$ дискретно (см. аналогичное утверждение в II).

V. Пусть $\chi\colon N \to N \times N \times N$ — некоторое взаимно однозначное соответствие ($N = \{1, 2, \ldots\}$),

$$A_i = \{(\theta_1, \theta_2, i_3)\colon \theta_1 \in \vartheta_{i_1}, \theta_2 \in \vartheta_{i_2}, \theta_1 \neq \varnothing, [\theta_1] \subseteq \theta_2,\ \chi(i) = (i_1, i_2, i_3)\},$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Пусть для $\alpha = (\theta_1, \theta_2, i_3) \in A_i$, где $\chi(i) = (i_1, i_2, i_3)$, $C'_\alpha = \theta_1$. Покажем, что семейство $\{C'_\alpha\colon \alpha \in A_i\}$ дискретно. В самом деле, $C'_\alpha = \theta_1 \in \vartheta_{i_1}$ и семейство ϑ_{i_1} дискретно. Наша цель будет достигнута, если мы покажем, что при $\alpha \neq \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in A_i$, $C'_\alpha \neq C'_{\alpha'}$. Допустим, что $C'_\alpha = C'_{\alpha'}$, тогда $\alpha' = (\theta_1, \theta'_2, i_3)$. В силу дискретности семейства ϑ_{i_2} и включений (см. определение A_i) $[\theta_1] \subseteq \theta_2$ и $[\theta_1] \subseteq \theta'_2$, $\theta'_2 = \theta_2$, что невозможно, так как $\alpha \neq \alpha'$.

Таким образом, семейство $\{C'_\alpha : \alpha \in A_i\}$ дискретно и существует дискретное семейство $\{\overline{C}_\alpha\colon \alpha \in A_i\}$ открытых в метрическом пространстве Y множеств, такое, что $[C'_\alpha] \subseteq \overline{C}_\alpha$. Пусть для $\alpha = (\theta_1, \theta_2, i_3) \in A_i$, C''_α — любое множество удовлетворяющее условию $[C'_\alpha] \subseteq C''_\alpha \subseteq [C''_\alpha] \subseteq \overline{C}_\alpha \cap \theta_2$. Семейство $\{C''_\alpha\colon \alpha \in A_i\}$ поэлементно вписано в дискретное семейство $\{\overline{C}_\alpha\colon \alpha \in A_i\}$ и потому дискретно.

VI. Пусть для $\alpha \in A_i$, $\chi(i) = (i_1, i_2, i_3)$,

$$B_\alpha = \{(\theta_1, \theta_2, V'')\colon \alpha = (\theta_1, \theta_2, i_3),\ V'' \in \nu_{i_3}\},$$

для $\beta = (\theta_1, \theta_2, V'') \in B_\alpha$

$$D'_\beta = g(\theta_1, V'(\theta_2, V'')) \quad \text{и} \quad D''_\beta = g_2(\theta_2, V'').$$

VII. Покажем, что $[D'_\beta] \subseteq D''_\beta$ при любом $\beta \in \bigcup \{B_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Возьмем произвольно $x \in [D'_\beta]$ и $y \in \theta_1 \neq \varnothing$. По определению D'_β (см. VI) и $g(\theta, V)$ (см. III)

$$(x, y) \in [g(\theta_1, V'(\theta_2, V'')) \times \theta_1] \subseteq [V'(\theta_2, V'')] \subseteq$$
$$\subseteq \tilde{g}(\theta_2, V'') = g(\theta_2, V'') \times \theta_2 = D''_\beta \times \theta_2$$

откуда следует требуемое.

VIII. Покажем, что семейство $\{D''_\beta\colon \beta \in B_\alpha\}$ дискретно при любом $\alpha \in A$. Пусть $\alpha = (\theta_1, \theta_2, i_3) \in A_i$.

Возьмем произвольно $x \in X$ и $y \in \theta_1$. По II семейство ν_{i_3} дискретно в пространстве $X \times Y$, поэтому найдется окрестность точки $(x, y) \in X \times Y$ вида $Ox \times Oy$ пересекающаяся не более чем с одним элементом этого семейства. Пусть $(Ox \times Oy) \cap V'' = \varnothing$ при $V'' \in \nu_{i_3}$ и $V'' \neq V''_0$, где V''_0 — некоторый элемент семейства ν_{i_3}. Тогда, в силу включения

$$g(\theta_2, V'') \times \theta_2 \subseteq V''(Ox \times Oy) \cap (g(\theta_2, V'') \times \theta_2) = \varnothing$$

и $Ox \cap g(\theta_2, V'') = \varnothing$ при $V'' \neq V''_0$, $V'' \in \nu_{i_3}$. Следовательно, семейство $\{g(\theta_2, V'')\colon V'' \in \nu_{i_3}\} = \{D''_\beta : \beta \in B_\alpha\}$ дискретно.

IX. В силу того что ϑ — база пространства Y для любого открытого в $X \times Y$ множества V $\bigcup \{\tilde{g}(\theta, V)\colon \theta \in \vartheta\} = V$, поэтому

$$\bigcup \{D'_\beta \times C'_\alpha\colon \beta \in B_\alpha, \alpha \in A\} =$$
$$= \bigcup \{g(\theta_1, V'(\theta_2, V'')) \times \theta_1\colon \theta_1, \theta_2 \in \vartheta;\ [\theta_1] \subseteq \theta_2,\ V'' \in \nu\} =$$
$$= \bigcup \{\tilde{g}(\theta_1, V'(\theta_2, V''))\colon \theta_1, \theta_2 \in \vartheta; [\theta_1] \subseteq \theta_2, V'' \in \nu\} \supseteq$$

(в силу включения $V'(\theta_2, V'') \subseteq X \times \theta_2$)

$$\supseteq \bigcup \{V'(\theta_2, V'')\colon \theta_2 \in \vartheta,\ V'' \in \nu\} =$$
$$= \bigcup \{V'(m, n)\colon m, n = 1, 2, \ldots\} = X \times Y.$$

X. Покажем, что семейство $\{[D''_\beta \times C''_\alpha]\colon \beta \in B_\alpha, \alpha \in A\}$ вписано в покрытие ω.

Пусть $\beta = (\theta_1, \theta_2, V'')$, $\alpha = (\theta_1, \theta_2, i)$, где $V'' \in \nu_i$.

По V $[C''_\alpha] \subseteq \theta_2$, по VI и II $[D''_\beta] \times \theta_2 \subseteq [\tilde{g}(\theta_2, V'')] \subseteq [V''] \subseteq \Omega \in \omega$, откуда следует требуемое.

Лемма 2.3. *Пусть X — нормальное пространство*, $\dim X \leqslant n$, $Y \subseteq X$, ω — *конечное семейство открытых в X множеств, покрывающее подпространство Y, γ_i, $i = 1, 2, \ldots$ — дизъюнктные семейства открытых в пространстве X мно-*

жеств, $\eta_i\colon X \to [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$ — *непрерывные на* X *функции,* $V_i = \eta_i^{-1}((0,1])$, $i = 1, 2, \ldots,$ *и*

(а) *для любого* $\Gamma \in \gamma_i$ *функция*

$$\xi_\Gamma = \begin{cases} \eta_i & \text{на } \Gamma, \\ 0 & \text{вне } \Gamma \end{cases}$$

непрерывна на X, $i = 1, 2, \ldots,$

(б) $V_i \cap Y \subseteq \bigcup \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots,$

(в) $\bigcup \gamma_i \subseteq \bigcup \omega$, $i = 1, 2, \ldots,$

(г) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i \supseteq Y$.

Тогда в семейство ω *можно вписать покрытие* ω^* *кратности* $\leqslant n+1$ *пространства* Y *открытыми в* Y *множествами.*

Доказательство. I. Пусть $U_{ij} = \{x\colon x \in X, \eta_i(x) > 1/j\}$, $\lambda = \{U_{ij}\colon i, j = 1, 2, \ldots\}$, $T = \bigcup \lambda$.

II. Подпространство $T \subseteq X$ есть открытое F_σ — множество пространства X, потому нормально (см. [2], стр. 56, предложение 3) и $\dim T \leqslant \dim X \leqslant n$ (см. [2], стр. 279, предложение 1).

III. Покажем, что если при некотором $\Lambda \in \lambda$, $M \subseteq \Lambda$, то $[M]_X = [M]_T$. Пусть $\Lambda = U_{i,j}$. Имеем $[M]_X \subseteq [U_{ij}]_X \subseteq U_{i,j+1} \subseteq T$. $[M]_T = [M]_X \cap T = [M]_X$. В дальнейшем символом $[M]$ для $M \subseteq \Lambda \in \lambda$ мы будем обозначать множество $[M]_X = [M]_T$, подразумевая ссылку на приведенные рассуждения.

IV. $\lambda = \{U_{ij}\colon i, j = 1, 2, \ldots\}$ есть счетное покрытие пространства T открытыми F_σ — множествами, поэтому (см. [2], стр. 131, лемма 4) существует счетное локально конечное открытое покрытие λ_1, вписанное в покрытие λ. По теореме Даукера (см. [2], стр. 290, теорема 24) существует открытое покрытие λ_2 кратности $\leqslant n+1$, вписанное в покрытие λ_1 и, следовательно, в покрытие λ. Переходя, если нужно, к укрупнению (см. [2], стр. 69) мы можем считать, что семейство λ_2 поэлементно вписано в семейство λ: $\lambda_2 = \{U_{ij}^*\colon i, j = 1, 2, \ldots\}$, $U_{ij}^* \subseteq U_{ij}$. По лемме об ужатии (см. [2], стр. 118, предложение 6) существует открытое покрытие $\lambda_3 = \{U_{ij}^{**}\colon i, j = 1, 2, \ldots\}$ поэлементно с замыканиями вписанное в покрытие λ_2: $[U_{ij}^{**}] \subseteq U_{ij}^*$.

V. Пусть $T_k = \{x\colon x \in T, x$ принадлежит не более чем k элементам покрытия $\lambda_3\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Построим по индукции семейство

$$\varkappa_k = \{C(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)\colon \Lambda_1, \ldots, \Lambda_k \in \lambda, \Lambda_j \neq \Lambda_{j'} \quad \text{при} \quad j \neq j'\}$$

состоящее из открытых в T множеств, замыкания которых попарно не пересекаются и $[C(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})] \subseteq \bigcap \{U_{i_1 j_1}^{**}, \ldots, U_{i_k j_k}^{**}\}$, $T_k \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{k} \bigcup \varkappa_i$.

Множество T_0 пусто. В качестве $\varkappa_0$ возьмем $\{\varnothing\}$. Пусть мы уже построили $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{k-1}$.

Как легко видеть (см. аналогичные рассмотрения в [18]), множество $T_k \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \bigcup \varkappa_i$ есть объединение счетного дискретного в пространстве T семейства замкнутых множеств

$$\{M(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k}) = T_k \setminus (\bigcup \{\Lambda\colon \Lambda \in \lambda_3,\ \Lambda \neq U_{i_1 j_1}^{**}, \ldots, U_{i_k j_k}^{**}\} \cup \\ \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup \varkappa_i),\ U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k} \in \lambda\}$$

и поэтому существуют попарно не пересекающиеся окрестности

$$\overline{C}(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k}) \subseteq \bigcap \{U_{i_1 j_1}^{**}, \ldots, U_{i_k j_k}^{**}\}$$

этих множеств. Множество $M(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$ не пересекается с замыканием любого элемента семейств $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{k-1}$, если в наборе его индексов есть U_{ij} — отличный от $U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k}$, так как любой такой элемент лежит с замыканием в множестве $U_{ij}^{**} \subseteq T \setminus M(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$. В силу локальной конечности семейств $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{k-1}$, найдется окрестность $\overline{\overline{C}}(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$ множества $M(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$, пересекающаяся лишь возможно с теми элементами этих семейств, в наборах индексов которых нет отличных от $U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k}$. Пусть $C(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$ — произвольная окрестность множества $M(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$, лежащая с замыканием в множестве $\overline{C}(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k}) \cap \cap \overline{\overline{C}}(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_k j_k})$, семейство $\varkappa_k$ состоит из всех таких множеств.

VI. Выделим следующее свойство семейств $\varkappa_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ которое обеспечивается нашим построением:

Замыкания любых двух элементов этих семейств пересекаются лишь тогда, когда набор индексов одного из них есть часть набора индексов другого.

VII. Пусть $\delta = (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i) \times N$, для $\Delta_k = (\Gamma_k, j_k) \in \delta$, $k = 1, \ldots, l$, $\Gamma_k \in \gamma_{i_k}$.

$$Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l) = (\bigcap_{k=1}^{l} \Gamma_k) \cap [C(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_l j_l})].$$

VIII. Покажем, что множество $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$ замкнуто в X.

Пусть в обозначениях VII $x \in [Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)]$. Тогда при любом $k = 1, \ldots, l$ $x \in [C(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_l j_l})] \subseteq U_{i_k j_k}^{**}$ и поэтому $\eta_{i_k}(x) \geqslant 1/j_k$. Так как $x \in [\Gamma_k]$, то в силу (а) $\xi_\Gamma(x) = \eta_{i_k}(x) \geqslant 1/j_k$ и $x \in \Gamma_k$. Поэтому $x \in Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$, что и требовалось.

IX. Покажем, что два множества $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1})$, $Q(\Delta_l, \ldots, \Delta_m)$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_m \in \delta$ могут пересекаться лишь тогда, когда набор индексов одного из них есть часть набора индексов другого.

Пусть $\Delta_k = (\Gamma_k, j_k)$, $k = 1, \ldots, m$, $\Gamma_k \in \gamma_{i_k}$. Пусть, для определенности, набор индексов второго множества не меньше набора индексов первого, то есть $l-1 \leqslant m-l+1$.

Пусть $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1}) \cap Q(\Delta_l, \ldots, \Delta_m) \neq \emptyset$.

Тогда $[\{C(U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_{l-1} j_{l-1}})] \cap [C(U_{i_l j_l}, \ldots, U_{i_m j_m})] \neq \emptyset$ и по VI

$$\{U_{i_1 j_1}, \ldots, U_{i_{l-1} j_{l-1}}\} \subseteq \{U_{i_l j_l}, \ldots, U_{i_m j_m}\}.$$

Допустим, что набор $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1}\}$ не есть часть набора $\{\Delta_l, \ldots, \Delta_m\}$. Положим для определенности, что Δ_1 не входит во второй набор и $U_{i_1 j_1} = U_{i_l j_l}$, то есть $i_1 = i_l$ и $j_1 = j_l$. Так как $\Delta_1 \neq \Delta_l$, то $\Gamma_1 \neq \Gamma_l$, но $\Gamma_1, \Gamma_l \in \gamma_{i_1}$ и потому $\Gamma_1 \cap \Gamma_l = \emptyset$ и значит

$$Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1}) \cap Q(\Delta_l, \ldots, \Delta_m) \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_l = \emptyset,$$

что противоречит первоначальным предположениям.

X. Покажем, что семейство $q = \{Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l): \Delta_1, \ldots, \Delta_l \in \delta, l = 1, 2, \ldots\}$ локально конечно в точках множества Y.

Пусть $y \in Y$. По (г) $y \in T$. В силу локальной конечности семейства λ_3 (см. IV) существует окрестность Oy этой точки в пространстве T пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства λ_3, а именно лишь с теми, в замыкании которых лежит точка y. Пусть это будут $U^{**}_{i_1 j_1}, \ldots, U^{**}_{i_k j_k}$. Тогда при $m = 1, \ldots, k$ $y \in [U^{**}_{i_m j_m}] \subseteq U^{*}_{i_m j_m} \subseteq V_{i_m}$, то есть $y \in V_{i_m} \cap Y$ и по (б) при некотором и единственном $\Gamma_m \in \gamma_{i_m}$, $y \in \Gamma_m$.

Покажем, что окрестность $O^*y = Oy \cap \bigcap_{m=1}^{k} \Gamma_m$ точки y пересекается лишь с теми элементами семейства q среди индексов которых нет отличия от (Γ_m, j_m), $m = 1, \ldots, k$.

Рассмотрим два случая.

1. $\Gamma \in \gamma_{i_m}$ для некоторого $m = 1, \ldots, k$, причем $\Gamma \neq \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $\Delta = (\Gamma, j_m)$

$$Q(\Delta, \ldots) \cap O^*y \subseteq \Gamma \cap \Gamma_m = \emptyset.$$

2. $\Gamma \in \gamma_i$ пары (i, j) нет среди пар (i_m, j_m), $\Delta = (\Gamma, j)$

$$Q(\Delta, \ldots) \cap O^*y \subseteq U^{**}_{ij} \cap Oy = \emptyset.$$

XI. Построим по индукции семейство $\omega(i) = \{\alpha_i(\Omega): \Omega \in \omega\}$, $i = 0, 1, \ldots$, подмножеств пространства X, $\alpha_{i+1}(\Omega) \subseteq \alpha_i(\Omega) \subseteq \Omega$, покрывающих подпространство Y, пересечение которых с Y открыто в Y.

Для индуктивного шага будет существенным выполнение следующего условия:

(*) семейство $\omega(i)$ высекает на всяком множестве $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$, $l > i$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_l \in \delta$ открытое покрытие этого множества.

Пусть $\alpha_0(\Omega) = \Omega$, $\omega(0) = \{\alpha_0(\Omega): \Omega \in \omega\}$.

Условие (*) выполняется в силу (в) и определения $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$ в VII.

Пусть мы уже построили семейство $\omega(i)$, построим $\omega(i+1)$.

Рассмотрим множество $Q = Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1})$. Q есть замкнутое подмножество пространства X (см. VIII) и потому $\dim Q \leqslant n$. Это означает, что в покрытие $\omega(i)$ этого подпространства можно поэлементно вписать покрытие кратности $\leqslant n+1$: $\omega(Q) = \{\alpha(\Omega, Q): \Omega \in \omega\}$, $\alpha(\Omega, Q) \subseteq \alpha_i(\Omega)$, открытыми в Q множествами.

Пусть

$$\alpha_{i+1}(\Omega) = \alpha_i(\Omega) \setminus \left(\bigcup \{Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1}) \setminus \alpha(\Omega, Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1})): \Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1} \in \delta\}\right),$$
$$\omega(i+1) = \{\alpha_{i+1}(\Omega): \Omega \in \omega\}.$$

Очевидно, $\alpha_{i+1}(\Omega) \subseteq \alpha_i(\Omega)$ и $\bigcup \omega(i+1) = \bigcup \omega(i)$.

Семейство $\{Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1}): \Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1} \in \delta\}$ локально конечно в точках множества Y (см. X) и потому каждое из множеств $\alpha_{i+1}(\Omega)$, $\Omega \in \omega$, высекает на Y открытое множество.

Условие (*) выполняется в силу того, что каждое из множеств $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_j)$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_j \in \delta$, $j > i+1$, пересекается не более чем с конечным числом элементов семейства $\{Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1}): \Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1} \in \delta\}$.

XII. Покажем теперь, что семейство $\omega(n+1)$ имеет в точках подпространства Y кратность $\leqslant n+1$.

Возьмем произвольно $y \in Y$. Кратность семейства λ_3 не превосходит $n+1$ (см. IV), поэтому при некотором $j_0 = 1, \ldots, n+1$ (см. V) $y \in T_{j_0}$. По V при некотором $j_1 \leqslant j_0$ $y \in \bigcup \varkappa_{j_1}$, то есть $y \in C(U_{i_1 k_1}, \ldots, U_{i_{j_1} k_{j_1}})$. В силу определения U_{ik} (см. I) и (б) $y \in \Gamma_j \in \gamma_{i_j}$ при любом $j = 1, \ldots, j_1$. По определению $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_j)$ (см. VII) $y \in Q = Q((\Gamma_1, k_1), \ldots, (\Gamma_{j_1}, k_{j_1}))$. По построению $\omega(j_1)$ это семейство в точках множества Q имеет кратность $\leqslant n+1$, а так как семейство $\omega(n+1)$ поэлементно вписано в семейство $\omega(j_1)$, то точка y принадлежит не более чем $n+1$ элементу семейства $\omega(n+1)$.

XIII. Нам осталось положить $\omega^* = \{\alpha_{n+1}(\Omega) \cap Y: \Omega \in \omega\}$. В силу XI и XII оно удовлетворяет поставленным условиям.

Теорема 2.4. *Пусть пространство $X \times Y$ нормально и счетно паракомпактно, Y — паракомпактно p-пространство. Тогда* $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$.

Доказательство. Утверждение тривиально выполняется, если по крайней мере один из сомножителей бесконечномерен, поэтому достаточно ограничиться случаем конечномерных сомножителей, что мы и сделаем.

I. Пространство Y есть паракомпактное p-пространство, поэтому существует совершенное отображение $\pi: Y \to Y_0$ пространства Y на метризуемое пространство Y_0 [3].

Отображение $\Pi: X \times Y \to X \times Y_0$, $\Pi(x, y) = (x, \pi(y))$ совершенно, пространство $X \times Y_0$ нормально [8]. Если пространство Y_0 дискретно, утверждение теоремы легко следует из теоремы 1.5. В дальнейшем будем предполагать, что пространство Y_0 недискретно. По теореме М. Рудин и Старберда [17] произведение $X \times Y_0$ счетно паракомпактно.

Пространство Y_0 обладает σ-дискретной базой δ: $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$, где семейство δ_n дискретно [9].

II. Пусть $\omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_p\}$ — произвольное конечное открытое покрытие пространства $X\times Y$. Нашей целью будет показать, что в это покрытие можно вписать покрытие кратности $\leqslant \dim X+\dim Y+1$.

III. В силу нормальности пространства $X\times Y$ существует замкнутое покрытие $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_p\}$ этого пространства, поэлементно вписанное в покрытие ω: $\Phi_i\subseteq\Omega_i$, $i = 1, \ldots, p$ (см. [2] или [11]). По лемме Урысона для каждого $i = 1, \ldots, p$ существует функция $\eta_i\colon X\times Y\to[0,1]$, принимающая значение 0 вне Ω_i и значение 1 на Φ_i.

IV. По лемме 2.1 существуют дизъюнктные семейства $s(\Delta, n)$, $\Delta\in\delta$, $n = 1, 2, \ldots$, открытых в X множеств, таких, что

(а) если $x_1, x_2\in S\in s(\Delta,n)$, $y\in\pi^{-1}(\Delta)$, то при любом $i = 1, \ldots, i_0$ $|\eta_i(x_1, y)-\eta_i(x_2, y)|<\frac{1}{8}$,

(б) $\bigcup\limits_{\Delta\in\delta}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta,n)\} = X\times Y_0$.

Пусть $g_{mn} = \{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta, m),\ \Delta\in\delta_n\}$, $g = \bigcup\{g_{mn}\colon m, n = 1, 2, \ldots\}$.

Как легко видеть, семейство g_{mn} дизъюнктно. В силу (б) $\bigcup g = X\times Y_0$.

V. По лемме 2.2 существуют дискретные семейства

$$\{C'_\alpha\colon \alpha\in A_i\},\qquad \{C''_\alpha\colon \alpha\in A_i\},\qquad i = 1, 2, \ldots,$$

открытых в пространстве Y_0 множеств, $[C'_\alpha]\subseteq C''_\alpha$, $\alpha\in A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, дискретные семейства $\{D'_\beta\colon \beta\in B_\alpha\}$, $\{D''_\beta\colon \beta\in B_\alpha\}$, $\alpha\in A$, открытых в пространстве X множеств, $[D'_\beta]\subseteq D''_\beta$, $\beta\in B = \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ такие, что семейство $\{[D''_\beta\times C''_\alpha]\colon \beta\in B_\alpha,\ \alpha\in A\}$ вписано в семейство g, семейство $\{D'_\beta\times C'_\alpha\colon \beta\in B_\alpha,\ \alpha\in A\}$ покрывает пространство $X\times Y_0$. Пусть для $\beta\in B$ $\alpha(\beta)$ есть тот элемент $\alpha\in A$, для которого $\beta\in B_\alpha$.

VI. Пусть для $\beta\in B$ $\overline{\vartheta}_\beta\colon X\to[0,1]$ — существующая по лемме Урысона [2] непрерывная на X функция, принимающая значение 0 вне D''_β и значение 1 на $[D'_\beta]$. Пусть $\overline{\xi}_\alpha = \sum\limits_{\beta\in B_\alpha}\overline{\vartheta}_\beta$. В силу дискретности семейства $\{D''_\beta\colon \beta\in B_\alpha\}$ функция $\overline{\xi}_\alpha$ непрерывна на X.

Пусть ϑ_β, ξ_α — непрерывные продолжения функций $\overline{\vartheta}_\beta$, $\overline{\xi}_\alpha$, соответственно, на βX (см. [1]).

VII. Пусть для $\alpha\in A$ $\mu_\alpha\colon Y\to[0,1]$ непрерывная на Y функция, принимающая значение 0 вне $\pi^{-1}(C''_\alpha)$ и значение 1 на $\pi^{-1}([C'_\alpha])$.

VIII. Пусть $\lambda_i(x,y) = \sum\limits_{\alpha\in A_i}\xi_\alpha(x)\mu_\alpha(y)$.

В силу дискретности семейства $\{C''_\alpha\colon \alpha\in A_i\}$ функция λ_i непрерывна на $\beta X\times Y$.

IX. Пусть для $\beta\in B$

$$G_\beta = \bigcup\{G\colon G \text{ открыто в } \beta X\times Y,\ G\cap(X\times Y)\subseteq(D''_\beta\times\pi^{-1}(C''_{\alpha(\beta)}))\},$$

для $i = 1, 2, \ldots$, $\gamma_i = \{G_\beta\colon \alpha(\beta)\in A_i\}$.

X. Как легко видеть, на множестве $[G_\beta]$, $\alpha(\beta)\in A_i$ функция λ_i может быть представлена в виде $\lambda_i(x, y) = \vartheta_\beta(x)\mu_{\alpha(\beta)}(y)$ и потому функция, совпадающая с λ_i на G_β и равная 0 вне G_β непрерывна на $\beta X\times Y$.

XI. На множествах $D'_\beta\times\pi^{-1}(C'_{\alpha(\beta)})$, $\alpha(\beta)\in A_i$, функция λ_i принимает значение 1 и $\bigcup\{D'_\beta\times\pi^{-1}(C'_{\alpha(\beta)}),\ \alpha(\beta)\in A\} = X\times Y$ (см. V).

XII. Пусть для $\Omega_i\in\omega$ $\Omega_i^* = \bigcup\{\Omega\colon \Omega \text{ открыто в } \beta X\times Y,\ \Omega\cap(X\times Y)\subseteq\Omega_i\}$, $\omega^* = \{\Omega_1^*, \ldots, \Omega_p^*\}$.

XIII. Покажем, что при любом $\beta\in B$ $G_\beta\subseteq\bigcup\omega^*$. Возьмем произвольно $(x', y)\in G_\beta$.

В наших предположениях найдется окрестность этой точки вида $U\times V$, где $U\cap X\subseteq D''_\beta$, $V\subseteq\pi^{-1}(C''_{\alpha(\beta)})$.

Пусть $x''\in U\cap X\subseteq D''_\beta$.

По III при некотором $i_0 = 1, \ldots, p$ $(x'', y)\in\Phi_{i_0}$ и потому $\eta_{i_0}(x'',y) = 1$. В силу непрерывности функции η_{i_0} существуют окресность Oy точки y, $Oy\subseteq V$, для любой точки y'', которой $|\eta_{i_0}(x'', y'')-1|<\frac{1}{8}$. Множество $(U\cap X)\times V\subseteq\subseteq D''_\beta\times\pi^{-1}(C''_{\alpha(\beta)})$ лежит в некотором элементе семейства g (см. V) и по IV а) для любой точки (x''', y''') множества $(U\cap X)\times Oy$

$$|\eta_{i_0}(x''', y''')-1|\leqslant\eta_{i_0}(x''', y''')-\eta_{i_0}(x'', y''')|+|\eta_{i_0}(x'', y''')-1|<\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4},$$

следовательно, $\eta_{i_0}(x''', y''')>\frac{3}{4}$, то есть по III $(U\cap X)\times Oy\subseteq\Omega_{i_0}$ и значит $U\times Oy\subseteq\Omega_{i_0}^*$. Таким образом, $(x', y)\in\Omega_{i_0}$, откуда, в виду произвольности точки $(x', y)\in G_\beta$, следует требуемое.

XIV. Применим лемму 2.3, взяв в качестве X пространство $\beta X\times Y$, в качестве Y — пространство $X\times Y$, в качестве γ_i — семейство γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, в качестве η_i — функцию λ_i, в качестве ω — ω^*. Условие (а) выполнено по X. Условие (б) тривиально выполняется по построению λ_i (см. VI—VIII). Условие (в) выполнено по XIII, (г) — по XI.

По лемме 2.3 существует покрытие кратности $\leqslant\dim(\beta X\times Y)+1$ пространства $X\times Y$ открытыми в нем множествами, вписанное в семейство ω^*, и, следовательно, в покрытие ω. В силу произвольности покрытия ω это означает, что

$$\dim X\times Y\leqslant\dim\beta X\times Y.$$

По теореме 1.5 $\dim\beta X\times Y\leqslant\dim\beta X+\dim Y$, по теореме Волмэна (см. [2], стр. 296) $\dim\beta X = \dim X$. Поэтому

$$\dim X\times Y\leqslant\dim X+\dim Y.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Пусть пространство $X\times Y$ нормально и счетно паракомпактно, Y — паракомпактное p-пространство, пространства X и Y удовлетворяют условию (Σ). Тогда*

$$\operatorname{Ind} X\times Y\leqslant\operatorname{Ind} X+\operatorname{Ind} Y.$$

Доказательство. I. Пространство Y есть паракомпактное p-пространство, поэтому существует совершенное отображение $\pi\colon Y\to Y_0$ пространства Y на метризуемое пространство Y_0 [11].

Отображение $\Pi\colon X\times Y\to X\times Y_0$, $\Pi(x,y)=(x,\pi(y))$, совершенно, пространство $X\times Y_0$ нормально и счетно паракомпактно [5].

Пространство Y_0 обладает σ-дискретной базой δ: $\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i$, где семейство δ_i дискретно [9].

II. Пусть подпространство $Z\subseteq X\times Y$ замкнуто, $Z=\bigcup\lambda$, где семейство λ состоит из замкнутых множеств, каждый его элемент лежит в замкнутом множестве вида $F'\times F''$, $\operatorname{Ind}F'+\operatorname{Ind}F''\leqslant k$ и существует σ-дизъюнктное открытое покрытие g пространства $X\times Y_0$, причем каждое множество вида $\Pi^{-1}(G)$, $G\in g$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ.

В дальнейшем индукцией по k мы покажем, что $\operatorname{Ind}Z\leqslant k$. Первый шаг тривиален: если $k=-1$, то $Z=\emptyset$ и $\operatorname{Ind}Z=-1$.

III. Пусть F_0 и F_1 — два произвольные замкнутые непересекающиеся подмножества множества Z. Множество Z замкнуто в $X\times Y$, поэтому F_0, F_1 замкнуты в $X\times Y$ и по лемме Урысона существует непрерывная функция $\eta\colon X\times Y\to[0,1]$, принимающая значение 0 на F_0 и значение 1 на F_1.

IV. По лемме 2.1 существуют дизъюнктные семейства $s(\Delta,n)$, $\Delta\in\delta$, $n=1,2,\ldots$, открытых в X множеств, причем

(а) если $x_1,x_2\in S\in s(\Delta,n)$, $y\in\pi^{-1}(\Delta)$, $\Delta\in\delta$, $n=1,2,\ldots$, то $|\eta(x_1,y)-\eta(x_2,y)|<\frac{1}{8}$,

(б) $\bigcup\{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta,n),\Delta\in\delta,n=1,2,\ldots\}=X\times Y_0$.

V. Пусть $\tilde s=\{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta,n),\Delta\in\delta,n=1,2,\ldots\}$. Семейство $\tilde s$ σ-дизъюнктно: $\tilde s=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta,n),\Delta\in\delta_n\}$, где семейство

$$\{S\times\Delta\colon S\in s(\Delta,n),\Delta\in\delta_m\},\qquad m,n=1,2,\ldots,$$

как легко видеть дизъюнктно.

VI. Пусть $\tilde g=\{G\cap S\colon G\in g,S\in\tilde s\}$. Семейство $\tilde g$ σ-дизъюнктно: если $g=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}g_i$, $\tilde s=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\tilde s_j$, g_i, $\tilde s_j$-дизъннктны, то, как легко видеть, семейство $\tilde g_{ij}=\{G\cap S\colon G\in g_i,S\in\tilde s_j\}$ дизъюнктно и $\tilde g=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}g_{ij}$.

VII. Покажем, что $\bigcup\tilde g=X\times Y_0$.

$$\bigcup\tilde g=\bigcup\{G\cap S\colon G\in g,S\in s\}=\bigcup_{G\in g}\Big(\bigcup_{S\in\tilde s}(G\cap S)\Big)=$$
$$=\bigcup_{G\in g}\Big(G\cap\Big(\bigcup_{S\in\tilde s}S\Big)\Big)=\bigcup_{G\in g}\big(G\cap(X\times Y_0)\big)=\bigcup_{G\in g}G=X\times Y_0.$$

VIII. По лемме 2.2 существуют дискретные семейства $\{\bar C'_\alpha\colon\alpha\in A_i\}$, $\{\bar C''_\alpha\colon\alpha\in A_i\}$, $i=1,2,\ldots$, открытых в пространстве Y_0 множеств, $\{\bar C'_\alpha]\subseteq\bar C''_\alpha$, $\bar C'_\alpha\neq\emptyset$, $\alpha\in A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, дискретные семейства $\{D'_\beta\colon\beta\in B_\alpha\}$, $\{D''_\beta\colon\beta\in B_\alpha,\alpha\in A\}$, открытых в пространстве X множеств, $[D'_\beta]\subseteq D''_\beta$, $\beta\in B=\bigcup\limits_{\alpha\in\beta}B_\alpha$, такие, что семейство $\{[D''_\beta\times C''_{\alpha(\beta)}]\colon\beta\in B\}$, где $\alpha(\beta)$ — тот единственный элемент A, при котором $\beta\in B_{\alpha(\beta)}$ вписано в покрытие $\tilde g$, семейство $\{D'_\beta\times C'_{\alpha(\beta)}\colon\beta\in B\}$ покрывает пространство $X\times Y_0$.

Пусть $C'_\alpha=\pi^{-1}(\bar C'_\alpha)$, $C''_\alpha=\pi^{-1}(\bar C''_\alpha)$, $\alpha\in A$.

IX. Пусть $\beta\in B$,

$$H'_\beta=D'_\beta\times C'_{\alpha(\beta)},\qquad H''_\beta=D''_\beta\times C''_{\alpha(\beta)},\qquad \bar H'_\beta=D'_\beta\times\bar C'_{\alpha(\beta)},\qquad \bar H''_\beta=D''_\beta\times\bar C''_{\alpha(\beta)}.$$

Имеем $H'_\beta=\Pi^{-1}(\bar H'_\beta)$, $H''_\beta=\Pi^{-1}(\bar H''_\beta)$.

X. Множество $[\bar H''_\beta]$, $\beta\in B$ лежит в некотором элементе семейства g и поэтому множество $[H''_\beta]\subseteq\Pi^{-1}([\bar H''_\beta])$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ. Пусть это будут Λ_i, $i=1,\ldots,i_0$, $\Lambda_i\subseteq F'_i\times F''_i$, F'_i, F''_i — замкнуты в X, Y, соответственно, $\operatorname{Ind}F'_i+\operatorname{Ind}F''_i\leqslant k$.

Возьмем произвольно $x_1\in D'_\beta$. Пусть $\alpha=\alpha(\beta)$

$$M_0=\{y\colon y\in[C''_\alpha],\eta(x_1,y)\leqslant\tfrac14\},$$
$$M_1=\{y\colon y\in\{C''_\alpha],\eta(x_1,y)\geqslant\tfrac34\},$$
$$M_0^*=\{y\colon y\in[C''_\alpha],\eta(x_1,y)\leqslant\tfrac12\},$$
$$M_1^*=\{y\colon y\in[C''_\alpha],\eta(x_1,y)\geqslant\tfrac12\}.$$

Имеем $M_0^*\cup M_1^*=\{C''_\alpha]$, $M_0\cap M_1^*=M_0^*\cap M_1=\emptyset$. Пусть

$$X_j=\bigcup\{F'_i\cap[D'_\beta]\colon\operatorname{Ind}F'_i\leqslant j,\ i=1,\ldots,i_0\},$$
$$Y_j=\bigcup\{F''_j\cap[C''_{\alpha(\beta)}]\colon\operatorname{Ind}F''_j\leqslant j,\ i=1,\ldots,i_0\},\ j=0,\ldots,k.$$

По предположению в пространствах X и Y выполнено условие (Σ), поэтому $\operatorname{Ind}X_j\leqslant j$, $\operatorname{Ind}Y_j\leqslant j$ и для каждого $j=0,\ldots,k$ существуют открытые в Y_j множества $U_p(j)$, $p=0,1$.

$$U_p(j)\supseteq M_p^*\cap Y_j,\qquad [U_p(j)]\subseteq C''_{\alpha(\beta)}\setminus M_{1-p},$$
$$\operatorname{Ind}\big([U_p(j)]\setminus U_p(j)\big)\leqslant j-1,$$

и открытые в X_j множества $V(j)$

$$[D'_\beta]\cap X_j\subseteq V(j)\subseteq[V(j)]\subseteq D''_\beta,\qquad \operatorname{Ind}\big([V(j)]\setminus V(j)\big)\leqslant j-1.$$

Пусть

$$W_p(\beta)=\Big(\bigcup_{j=0}^{k}(X_j\times Y_{k-j})\Big)\setminus\Big(\bigcup_{j=0}^{k}\big((X_j\times Y_{k-j})\setminus(V(j)\times U_p(k-j))\big)\Big),\quad p=0,1.$$

По своему определению множество $W_p(\beta)$ открыто в подпространстве

$$\bigcup_{j=0}^{k} X_j\times Y_{k-j}\supseteq(\bigcup\lambda)\cap H''_\beta = Z\cap H''_\beta.$$

Имеем

$$W_p(\beta)\subseteq\Big(\bigcup_{j=0}^{k}(X_j\times Y_{k-j})\Big)\setminus\Big(\bigcup_{j=0}^{k}\big((X_j\times Y_{k-j})\setminus(D''_\beta\times(C''_{\alpha(\beta)}\setminus M_{1-p}))\big)\Big)\subseteq$$

$$\subseteq D''_\beta\times(C''_{\beta(\beta)}\setminus M_{1-p}).$$

Множество $[H''_\beta]$ лежит в некотором элементе семейства s, поэтому $[D''_\beta]$ лежит в некотором элементе S семейства $\bigcup\{s(\Delta,n)\colon \Delta\in\delta, n=1,2,\ldots\}$ и в силу IV а) для любой точки $\{x,y\}\in D''_\beta\times(C''_{\alpha(\beta)}\setminus M_{1-p})$

$$|\eta(x,y)-\eta(x_1,y)<\tfrac{1}{8}\quad\text{при}\quad p=0,$$

$$\eta(x,y)<\eta(x_1,y)+\tfrac{1}{8}\leqslant\tfrac{1}{7}\quad\text{при}\quad p=1,$$

$$\eta(x,y)>\eta(x_1,y)-\tfrac{1}{8}\geqslant\tfrac{1}{8}\quad\text{при}\quad t\in W_0(\beta),$$

$$\eta(t)\leqslant\tfrac{7}{8}\quad\text{при}\quad t\in W_1(\beta),\ \eta(t)\geqslant\tfrac{1}{8}.$$

По построению, при любом $j=0,\ldots,k$

$$([D'_\beta]\times M_p^*)\cap(X_j\times Y_{k-j})=([D'_\beta]\cap X_j)\times(M_p^*\cap Y_{k-j})\subseteq V(j)\times U_p(k-j),$$

а так как $([D'_\beta]\times M_p^*)\cap Z\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}X_j\times Y_{k-j}$, то в силу определения $W_p(\beta)$ $([D'_\beta]\times M_p^*)\cap Z\subseteq W_p(\beta)$ и

$$[H'_\beta]\cap Z=[D'_\beta\times C'_{\alpha(\beta)}]\cap Z=\big([D'_\beta]\times(M_0^*\cup M_1^*)\big)\cap Z=$$

$$=\big(([D'_\beta]\times M_0^*)\cap Z\big)\cup\big(([D'_\beta]\times M_1^*)\cap Z\subseteq W_0(\beta)\cup W_1(\beta).$$

К семейству λ_β отнесем множества $X_j\times Y_{k-j-1}$ $(j=0,\ldots,k-1)$,

$$[V(j)]\times\big([U_p(k-j)]\setminus U_p(k-j)\big)\quad(j=0,\ldots,k,\ p=0,1),$$

$$\big([V(j)]\setminus V(j)\big)\times[U_p(k-j)]\quad(j=0,\ldots,k,\ p=0,1).$$

Отметим сразу, что каждое из этих множеств имеет вид $F'\times F''$, где $\operatorname{Ind}F'+\operatorname{Ind}F''\leqslant k-1$.

Покажем, что $[W_p(\beta)]\setminus W_p(\beta)\subseteq\bigcup\lambda_\beta$. Пусть

$$(x,y)\in[W_p(\beta)]\setminus W_p(\beta),\quad j_1=\min\{j\colon x\in X_j\},\quad j_2=\min\{j\colon y\in Y_j\}.$$

Если $j_1+j_2<k$, то $(x,y)\in X_{j_1}\times Y_{k-j_1-1}\in\lambda_\beta$. Рассмотрим случай $j_1+j_2=k$.

$$(x,y)\in[W_p(\beta)]\subseteq\Big[\Big(\bigcup_{j=0}^{k}(X_j\times Y_{k-j})\Big)\setminus\big((X_{j_1}\times Y_{j_2})\setminus(V(j_1)\times U_p(j_2))\big)\Big]=$$

$$=\bigcup_{j=0}^{k}\big[(X_j\times Y_{k-j})\setminus\big((X_{j_1}\times Y_{j_2})\setminus(V(j_1)\times U_p(j_2))\big)\big]\subseteq$$

$$\subseteq\Big(\bigcup_{j=0,j\neq j_1}^{k}(X_j\times Y_{k-j})\Big)\cup[V(j_1)\times U_p(j_2)].$$

Учитывая, что $(x,y)\notin X_j\times Y_{k-j}$ при $j\neq j_1$, получаем

$$(x,y)\in[V(j_1)\times U_p(j_2)](x,y)\notin W_p(\beta),$$

поэтому

$$(x,y)\in(X_{j_1}\times Y_{j_2})\setminus(V(j_1)\times U_p(j_2)).$$

Таким образом,

$$(x,y)\in[V(j_1)\times U_p(j_2)]\setminus(V(j_1)\times U_p(j_2))=$$

$$=\big([V(j_1)]\times([U_p(j_2)]\setminus U_p(j_2))\big)\cup\big(([V(j_1)]\setminus V(j_1))\times[U_p(j_2)]\big)\subseteq\bigcup\lambda_\beta.$$

Пусть $W_p^*(\beta)=W_p(\beta)\cap Z$, $p=0,1$.

Множество $W_p^*(\beta)$ открыто в Z, так как $Z\cap[H''_\beta]\subseteq\bigcup_{j=0}^{k}(X_j\times Y_{k-j})$, $W_p(\beta)$ открыто в $\bigcup_{j=0}^{k}(X_j\times Y_{k-j})$ и $W_p(\beta)\subseteq H''_\beta$:

$$W_p^*(\beta)=\big(Z\setminus(Z\setminus H''_\beta)\big)\cap\Big(Z\setminus\Big(\Big(\bigcup_{j=0}^{k}X_j\times Y_{k-j}\Big)\setminus W_p(\beta)\Big)\Big).$$

XI. Семейство $\{W_p^*(\beta)\colon\beta\in B_i\}$, где $B_i=\bigcup\{B_\alpha\colon\alpha\in A_i\}$, $p=0,1$, $i=1,2,\ldots$, поэлементно вписано в дискретное семейство $\{D''_\beta\times C''_{\alpha(\beta)}\colon\beta\in B_i\}$ и потому само дискретно.

Имеем

$$\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\beta\in B_n}W_d^*(\beta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\beta\in B_n}\big(W_0^*(\beta)\cup W_1^*(\beta)\big)\supseteq$$

$$\supseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\beta\in B_n}([H'_\beta]\cap Z)=$$

$$=(X\times Y)\cap Z=Z.$$

Так как при любом β и при $t\in[W_0(\beta)]$, $\eta(t)\leqslant\frac{7}{8}$, то в силу III $[W_0(\beta)]\cap\cap F_1=\emptyset$, при $t\in[W_1(\beta)]$, $\eta(t)\geqslant\frac{1}{8}$, то в силу III $[W_1(\beta)]\cap F_0=\emptyset$.

XII. Пусть

$$W^{**}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\Big(\bigcup_{\beta\in B_m}W_0^*(\beta)\Big)\setminus\bigcup_{n=1}^{m-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)]\Big).$$

Семейство $\{W_1^*(\beta)\colon \beta\in B_n\}$, $n=1,2,\ldots,$ дискретно, поэтому множество $\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)]$ замкнуто, а множество W^{**} открыто в Z.

XIII. Покажем, что $F_0\subseteq W^{**}$.

Пусть $Z\in F_0$. По XI при некотором $\beta_0\in B_{m_0}$, $Z\in W_0^*(\beta_0)$, а так как по XI при любом β $Z\notin[W_1(\beta)]$,

$$Z\in\Big(\bigcup_{\beta\in Bm_0}W_0^*(\beta)\Big)\diagdown\Big(\bigcup_{n=1}^{m_0-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)]\Big)\subseteq W^{**}\,.$$

XIV. Покажем, что $[W^{**}]\cap F_1=\emptyset$. $W^{**}\subseteq\bigcup_{\beta\in B}W_0^*(\beta)$ и поэтому для любой точки t множества $[W^{**}]$ $\eta(t)\leqslant\frac{7}{8}$, откуда следует требуемое.

XV. Пусть

$$\lambda_1=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\Lambda\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{m-1}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)\Big)\cap Z_1\colon\ \Lambda\in\lambda_\beta,\quad\text{где }\beta'\in B_m\}\,,$$

где $Z_1=[W^{**}]\diagdown W^{**}$.

Покажем, что $Z_1\subseteq\bigcup\lambda_1$. Пусть $z\in Z_1$. Так как по XI $Z\subseteq\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)$ то возможны лишь два случая.

1. При некоторых $\beta\in B_m$, $m=1,2,\ldots,$ $z\in W_1^*(\beta)$. Пусть m_0-наименьшее из возможных чисел m, $\beta_0\in B_{m_0}$, $z\in W_1^*(\beta_0)$.

Так как $z\in[W^{**}]$ и $W_1^*(\beta)$ — окрестность точки z, не содержащая точек множества $\bigcup_{m=m_0+1}^{\infty}\Big(\Big(\bigcup_{\beta\in B_m}W_0^*(\beta)\Big)\diagdown\Big(\bigcup_{n=1}^{m-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)]\Big)\Big)$ то

$$z\in\Big[\bigcup_{m=1}^{m_0}\Big(\Big(\bigcup_{\beta\in B_m}W_0^*(\beta)\Big)\diagdown\bigcup_{n=1}^{m-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1(\beta)]\Big)\Big]\subseteq\bigcup_{m=1}^{m_0}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_0^*(\beta)]$$

(последнее включение справедливо в силу дискретности семейств $\{W_0^*(\beta)\colon\ \beta\in B_m\}$, $m=1,\ldots,m_0$).

Пусть m_1 — наименьшее из таких чисел m, что $z\in[W_0^*(\beta)]$ при некотором $\beta\in B_m$, $\beta_1\in B_{m_1}$, $z\in[W_0^*(\beta)]$.

Имеем $m_1\leqslant m_0$. Если $z\notin W_0^*(\beta_1)$, то

$$z\in[W_0^*(\beta_1)]\diagdown W_0^*(\beta_1)\subseteq[W_0(\beta_1)]\diagdown W_0(\beta_1)$$

и по X $z\in\Lambda$ при некотором $\Lambda\in\lambda_{\beta_1}$. По выбору $m_0\geqslant m_1$

$$z\in(\Lambda\cap Z_1)\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{m_1-1}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)\Big)\in\lambda_1\,.$$

Если $z\in W_0^*(\beta_1)$, то, учитывая $z\notin W^{**}$, получаем $z\in\bigcup_{n=1}^{m_1-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)]$, то есть при некотором $m_2<m_1$, $\beta_2\in B_{m_2}$, $z\in[W_1^*(\beta_2)]$. По выбору m_0 $z\notin W_1^*(\beta_2)$, то есть

$$z\in[W_1^*(\beta_2)\diagdown W_1^*(\beta)]\subseteq[W_1(\beta_2)]\diagdown W_1(\beta_2)$$

и по X $z\in\Lambda$ при некотором $\Lambda\in\lambda_{\beta_2}$. По выбору $m_0\geqslant m_1$

$$z\in(\Lambda\cap Z_1)\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{m_2-1}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)\Big)\in\lambda_1\,.$$

2. При некотором m_0, $\beta_0\in B_{m_0}$, $z\in W_0^*(\beta_0)$ и при любом $\beta\in B$, $z\notin W_1^*(\beta)$. Пусть m_0 — наименьшее из возможных.

$$z\notin W^{**},\quad\text{поэтому}\quad z\in\bigcup_{n=1}^{m_0-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_1^*(\beta)],$$

то есть при некотором $m_1<m_0$, $\beta_1\in B_{m_1}$, $z\in[W_1^*(\beta)]$. По предположению $z\notin W_1^*(\beta_1)$, поэтому $z\in[W_1^*(\beta_1)]\diagdown W_1^*(\beta_1)$. По X $z\in\Lambda$ при некотором $\Lambda\in\lambda_{\beta_1}$. По выбору m_0

$$z\in(\Lambda\cap Z_1)\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{m_0-1}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)\Big)\in\lambda_1\,.$$

XVI. Пусть

$$G(\beta_1,\beta_2)=(H'_{\beta_1}\cap H''_{\beta_2})\diagdown\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1,n\neq n_1}^{n_2-1}\bigcup_{\beta\in B_n}[W_p^*(\beta)],$$

где $\beta_1\in B_{n_1}$, $\beta_2\in B_{n_2}$.

В силу дискретности семейств $\{W_p^*(\beta)\colon\ \beta\in B_n\}$ $p=0,1$, $n=1,2,\ldots,$ множество $G(\beta_1,\beta_2)$ открыто.

XVII. Покажем, что множество $G(\beta_1,\beta_2)$, $\beta_1\in B_{n_1}$, $\beta_2\in B_{n_2}$ пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ_1, а именно, только с элементами подсемейства

$$\lambda(\beta_1,\beta_2)=\{(\Lambda\cap Z_1)\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{m-1}\bigcup_{\beta'\in B_n}W_p^*(\beta')\Big)\colon\ \Lambda\in\lambda_\beta,\ \beta=\beta_1,\beta_2\}\subseteq\lambda_1\,.$$

Пусть $\beta\neq\beta_1,\beta_2$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $\beta\in B_{n_1}$. Любое множество вида

$$L=(\Lambda\cap Z_1)\diagdown\Big(\bigcup_{p=0,1}\bigcup_{n=1}^{n_1-1}\bigcup_{\beta\in B_n}W_p^*(\beta)\Big)$$

лежит внутри множества H''_β и

$$L\cap G(\beta_1,\beta_2)\subseteq H''_\beta\cap H'_{\beta_1}=\emptyset\,.$$

2. $\beta \in B_{n_2}$. Любое множество вида

$$L = (\Lambda \cap Z_1) \setminus \Big(\bigcup_{p=0,1} \bigcup_{n=1}^{n_2-1} \bigcup_{\beta \in B_n} W_p^*(\beta) \Big)$$

лежит внутри множества H''_β и

$$L \cap G(\beta_1, \beta_2) \subseteq H''_\beta \cap H''_{\beta_2} = \emptyset .$$

3. $\beta \in B_{n_0}$, $n_0 \neq n_1$, $n_0 < n_2$. Любое множество вида

$$L = (\Lambda \cap Z_1) \setminus \Big(\bigcup_{p=0,1} \bigcup_{n=1}^{n_0-1} \bigcup_{\beta \in B_n} W_p^*(\beta) \Big)$$

лежит в множестве $[W_0(\beta)] \cup [W_1(\beta)]$.

$G(\beta_1, \beta_2) \cap L = \emptyset$ по построению $G(\beta_1, \beta_2)$ в XVI.

4. $\beta \in B_{n_0}$, $n_0 > n_2$. Любое множество вида

$$L = (\Lambda \cap Z_1) \setminus \Big(\bigcup_{p=0,1} \bigcup_{n=1}^{n_0-1} \bigcup_{\beta \in B_n} W_p^*(\beta) \Big)$$

не пересекается с множеством $W_0^*(\beta_2) \cup W_1^*(\beta_2)$, поэтому

$$G(\beta_1, \beta_2) \cap L \subseteq (H'_{\beta_2} \cap Z) \cap L \subseteq \big(W_0^*(\beta_2) \cup W_1^*(\beta_2)\big) \cap L = \emptyset .$$

XVIII. Пусть $\overline{G}(\beta_1, \beta_2) = \bigcup \{G\colon G$ открыто в $X \times Y_0$

$$\Pi^{-1}(G) \subseteq G(\beta_1, \beta_2)\}, \quad \beta_1, \beta_2 \in B,$$

$$\bar{g}(m, n) = \{\overline{G}(\beta_1, \beta_2)\colon \beta_1 \in B_m, \beta_2 \in B_n\}, \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

$$\bar{g} = \bigcup \{\bar{g}(m, n)\colon m, n = 1, 2, \ldots\} .$$

Имеем

$$\Pi^{-1}(\overline{G}(\beta_1, \beta_2)) \subseteq G(\beta_1, \beta_2) \subseteq H'_{\beta_1} \cap H''_{\beta_2} = \Pi^{-1}(\overline{H}'_{\beta_1} \cap \overline{H}''_{\beta_2})$$

поэтому $\overline{G}(\beta_1, \beta_2) \subseteq \overline{H}'_{\beta_1} \cap \overline{H}''_{\beta_2}$. Отсюда немедленно следует дискретность семейства $\bar{g}(m, n)$.

XIX. Покажем, что $\bigcup \bar{g} = X \times Y_0$. Пусть $t \in X \times Y_0$,

$$n_1 = \min\{n\colon t \in \overline{H}'_\beta, \beta \in B_n\} ,$$

$$n_2 = \min\{n\colon t \in \overline{H}''_\beta, \beta \in B_n\} .$$

При любом $\beta \in B$, $p = 0, 1$, $[W_p^*(\beta)] \subseteq H''_\beta$, поэтому в силу определения n_2 при $\beta \in B_n$, $n < n_2$ $\Pi^{-1}(t) \cap [W_p^*(\beta)] = \emptyset$.

Это означает, что $\Pi^{-1}(t) \subseteq G(\beta_1, \beta_2)$, где $\beta_1 \in B_{n_1}$, $\beta_2 \in B_{n_2}$ таковы, что $t \in H'_{\beta_1}$, $t \in H''_{\beta_2}$.

В силу замкнутости отображения Π $t \in \overline{G}(\beta_1, \beta_2) \in \bar{g}$.

XX. Имеем: замкнутое подпространство $Z_1 \subseteq X \times Y$, $Z_1 = \bigcup \lambda_1$ (по XV), семейство λ_1 состоит из замкнутых подмножеств пространства $X \times Y$ каждый его элемент есть подмножество некоторого замкнутого множества вида $F' \times F''$, $\operatorname{Ind} F' + \operatorname{Ind} F'' \leqslant k-1$ (см. X), σ — дизъюнктное покрытие $\bar{g}$ пространства $X \times Y_0$ (по XVIII и XIX), причем каждое множество вида $\Pi^{-1}(G)$, $G \in \bar{g}$, пересекается лишь с конечным числом элементов семейства λ_1 (см. XVII и XVIII).

По предположению индукции (см. II) $\operatorname{Ind} Z_1 \leqslant k-1$.

В силу произвольности замкнутых множеств F_0 и F_1, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, XIII, XIV это означает, что $\operatorname{Ind} Z \leqslant k$.

XXI. При $Z = X \times Y$, $\lambda = \{X \times Y\}$, $g = \{X \times Y_0\}$ (см. II) получаем $\operatorname{Ind} X \times Y \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$.

Теорема доказана.

§ 3. Одно замечание о малой индуктивной размерности произведения

Мы покажем в этом параграфе, что если один из двух сомножителей в произведении $X \times Y$ — (метризуемый) компакт, то для малой индуктивной размерности выполнено неравенство

$$\operatorname{ind} X \times Y \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y .$$

Начинаем со следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть пространство X вполне регулярно, $I = [0, 1]$, $f_i\colon X \to I$, $i = 1, 2$ — непрерывные функции, $M_i = \{(x, y)\colon x \in X, y \in I, y = f_i(x)\} \subseteq X \times I$ — графики функций f_i, $i = 1, 2$, $M = M_1 \cup M_2$. Тогда* $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} X$.

Доказательство будем вести индукцией по $\operatorname{ind} X$. При $\operatorname{ind} X = -1$, т.е. $X = \emptyset$, утверждение очевидно.

I. Неравенство $\operatorname{ind} M \geqslant \operatorname{ind} X$ очевидно, ибо подпростарнство $M_1 \subseteq M$ гомеоморфно пространству X и

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} M_1 \leqslant \operatorname{ind} M .$$

II. Покажем, что $\operatorname{ind} M \leqslant \operatorname{ind} X$. Для этого достаточно убедиться, что всякая точка множества M имеет сколь угодно маленькую окрестность, размерность границы которой $\leqslant \operatorname{ind} X - 1$.

Пусть $(x_1, y_1) \in M$. Пусть для определенности $(x_1, y_1) \in M_1$.

Пусть U — произвольная окрестность этой точки в M, Ox_1 и Oy_1 — окрестности точек x_1 и y_1 в X и Y соответственно, $(Ox_1 \times Oy_1) \cap M \subseteq U$; такие окрестности существуют по определению топологий в произведении и в подпространстве.

Рассмотрим два случая.

III. $(x_1, y_1) \notin M_2$. В наших предположениях $y_1 = f_1(x_1) \neq f_2(x_1)$.

Пусть V_1 и V_2 — непересекающиеся окрестности точек $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ в I и $V_1 \subseteq Oy_1$. В силу непрерывности функций f_1 и f_2 существует окрестность $O_1 x_1 \subseteq Ox_1$ точки x_1 в пространстве X, для которой

$$f_1(O_1 x_1) \subseteq V_1 \quad \text{и} \quad f_2(O_1 x_1) \subseteq V_2 .$$

По определению малой индуктивной размерности найдется окрестность $O_2 x_1$ точки x_1 такая, что

$$[O_2 x_1] \subseteq O_1 x_1, \quad \operatorname{ind}([O_2 x_1] \setminus O_2 x_1) \leqslant \operatorname{ind} X - 1 .$$

Тогда множество $W = \{(x, y): x \in O_2 x_1, y = f_2(x)\}$ открыто в пространстве M, его граница $[W] \setminus W = \{(x, y): x \in [O_2 x_1] \setminus O_2 x_1, y = f_1(x)\}$ гомеоморфна множеству $[O_2 x_1] \setminus O_2 x_1$ и потому

$$\operatorname{ind}([W] \setminus W) \leqslant \operatorname{ind} X - 1 .$$

Нам осталось заметить, что

$$W \subseteq (O_2 x_1 \times V_1) \cap M \subseteq (Ox_1 \times Oy_1) \cap M \subseteq U .$$

IV $(x_1, y_1) \in M_2$. В этом случае $y_1 = f_1(x_1) = f_2(x_1)$.

В силу непрерывности функций f_1 и f_2 существует окрестность $O_1 x_1 \subseteq Ox_1$ точки x_1 в пространстве X, для которой $f_1(O_1 x_1), f_2(O_1 x_1) \subseteq Oy_1$. По определению малой индуктивной размерности найдется окрестность $O_2 x_1$ точки x_1 в пространстве X, для которой

$$[O_2 x_1] \subseteq O_1 x_1, \quad \operatorname{ind}([O_2 x_1] \setminus O_2 x_1) \leqslant \operatorname{ind} X - 1 .$$

Тогда множество $W = (O_2 x_1 \times I) \cap M \subseteq (O_2 x_1 \times Oy_1) \cap M \subseteq U$ открыто в пространстве M и его граница $[W] \setminus W = \{(x, y): x \in ([O_2 x] \setminus O_2 x),\ y = f_1(x)$ или $y = f_2(x)\}$ по предположению индукции имеет размерности $\leqslant \operatorname{ind} X - 1$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть пространство X вполне регулярно*, $R = (-\infty, +\infty)$. *Тогда* $\operatorname{ind}(X \times R) \leqslant \operatorname{ind} X + 1$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in X \times R$ и ее окрестность вида $Ox_0 \times (\alpha, \beta)$, где Ox_0 — открытое в X множество, $\alpha < y_0 < \beta$.

Так как пространство X вполне регулярно, то существует непрерывная функция $f: X \to I$, принимающая значение 1 в точке x_0 и значение 0 на множестве $X \setminus Ox_0$. Пусть

$$f_1(x) = y_0 + (\alpha - y_0) f(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = y_0 + (\beta - y_0) f(x) .$$

Имеем для $x \in X$ $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ и для $x \in X \setminus Ox_0$ $f_1(x) = f_2(x) = y_0$.
Пусть $U = \{(x, y): x \in X, y \in R, f_1(x) < y < f_2(x)\}$.

По своему определению множество U открыто в произведении $X \times R$, $(x_0, y_0) \in U \subseteq Ox \times (\alpha, \beta)$, его граница лежит в множестве $M = \{(x, y): x \in X, y \in R, y = f_1(x)$ или $y = f_2(x)\}$. По лемме $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} X$.

Таким образом, $\operatorname{ind} X \times R \leqslant \operatorname{ind} X + 1$.

Непосредственным следствием доказанного является

Теорема 3.3. *Пусть пространство X вполне регулярно, тогда* $\operatorname{ind} X \times I \leqslant \operatorname{ind} X + 1$.

Тривиальной индукцией по k получаем отсюда

Теорема 3.4. *Пусть пространство X вполне регулярно, тогда* $\operatorname{ind} X \times I^k \leqslant \operatorname{ind} X + k$.

Как заметил Б. А. Пасынков, из теоремы 3.4 легко следует следующее утверждение:

Пусть пространство X вполне регулярно, Y — (метризуемый) компакт; тогда $\operatorname{ind} X \times Y \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$.

В самом деле, по теореме Гуревича (см. [2], стр. 256, теорема 7) существует нульмерное непрерывное отображение $f: Y \to I^k$, где $k = \operatorname{ind} Y$, которое порождает нульмерное совершенное отображение $f_1: X \times Y \to X \times I^k$, где $f_1(x, y) = (x, f(y))$. Отсюда следует, что $\operatorname{ind} X \times Y \leqslant \operatorname{ind} X \times I^k$ (см. аналогичное рассуждение в [2], стр. 258, теорема 8), что вместе с теоремой 3.4 дает требуемое.

Заметим теперь, что всякое метрическое пространство со счетной базой гомеоморфно подпространству (метрического) компакта той же размерности. Отсюда, в силу монотонности размерности ind, получаем.

Теорема 3.5. *Пусть пространство X вполне регулярно, Y — метрическое пространство со счетной базой. Тогда* $\operatorname{ind} X \times Y \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$.

Литература

[1] П. С. Александров, *Введение в общую теорию множеств и функций*, Гостехиздат, 1948.
[2] — и Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, Москва 1973.
[3] А. В. Архангельский, *Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства*, Матем. сб. 67 (109) (1965), стр. 55—85.
[4] — и В. И. Пономарев, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, Москва 1974.
[5] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (2) (1951), pp. 219–224.
[6] В. В. Филиппов, *О размерности произведения бикомпактов*, ДАН СССР 202 (5), (1972) стр. 1016—1019.
[7] — *О размерности нормальных пространств*, ДАН СССР 209 (4) (1973), стр. 805—807.
[8] H. Henriksen and J. R. Isbell, *Some properties of compactifications*, Duke Math. J. 25 (1958), pp. 83–106.
[9] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, Москва 1968.
[10] Y. Kodama, *On subset theorem and dimension of products*, Amer. J. Math. 91 (1961), pp. 486–497.

[11] К. Куратовский, *Топология*, т. I, Мир, Москва 1966.
[12] K. Morita, *On the dimension of the product of Tychonoff spaces*, Gen. Top. Appl. 3 (2) (1973), pp. 125–133.
[13] J. Nagata, *A survey of dimension theory II*, Gen. Top. Appl. 1 (1) (1971), pp. 65–78.
[14] Б. А. Пасынков, *Об индуктивных размерностях*, ДАН СССР 189 (2) (1969), стр. 254—257.
[15] — *О размерности произведений нормальных пространств*, ДАН СССР 209 (4) (1973), стр. 792—794.
[16] — *О размерности прямоугольных произведений*, ДАН СССР 221 (2) (1975) стр. 291—294.
[17] M. E. Rudin and M. Starbird, *Product with a metric factor*, Gen. Top. Appl. 5 (3) (1975), pp. 235–248.
[18] А. В. Зарелуа, *О теореме Гуревича*, Матем. сб. 60 (102), 1963, стр. 17—38.

Accepté par la Rédaction le 1. 8. 1977

A note on transfinite sequences

by

Norman R. Howes (Copenhagen)

Abstract. The purpose of this paper is to show that transfinite sequences can be used to characterize topologies, various mappings and certain topological properties. The investigation leads to some set theoretic problems and a translation of the Axiom of Choice is obtained in terms of the existence of a certain type of well ordered neighborhood base at each point of any arbitrary topological space. Some of the properties characterized are: paracompactness, the Lindelöf property, compactness, the linearly Lindelöf property and the Hausdorff property. Furthermore, some of these characterizations demonstrate the interaction of the transfinite sequences with the uniform structure of the space.

Applications of these results by other authors to various problems are indicated and the paper concludes with characterizations of topologies and mappings (continuous, open, pseudo-open, closed, quotient) and a treatment of spaces whose topologies are determined by ordinary convergence of transfinite sequences as opposed to the clustering of transfinite sequences used elsewhere in the paper.

Introduction. The theory of convergence is fundamental to the study of topology and analysis. Classically, continuous functions were ones that preserved convergent sequences and metric spaces were compact if each sequence had a convergent subsequence. As metric spaces were generalized it was found that sequences were inadequate for characterizing topological properties. Suitable generalizations were sought; the most obvious being a transfinite sequence. However, preliminary work with transfinite sequences led investigators to the widely accepted conclusion that transfinite sequences are inadequate for describing topological properties.

To date the most fruitful generalizations have been nets and filters. Whereas nets lack two pleasant properties of sequences: 1) they are not well ordered and 2) the domain of a subnet need not be a subset of the domain of the original net, filters are better described as a generalization of a neighborhood base than a sequence. The purpose of this paper is to show that transfinite sequences, if properly applied, can be used to characterize topologies and certain topological properties. In addition, the investigation leads to some set theoretic problems and we obtain a translation of the Axiom of Choice (AC) in terms of the existence of a certain type of neighborhood base in an arbitrary space.