[7] K. Gobel, *An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk*, Michigan Math. J. 16 (1969), pp. 381–383.
[8] R. Kannan, *Fixed point theorems in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), pp. 111–118.
[9] — *Construction of fixed point of a class of nonlinear mappings*, J. Math. Anal. and Appl. 41 (1973), pp. 430–438.
[10] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), pp. 591–597.
[11] — *Nonexpansive and monotone mappings in Banach spaces*, Lecture series No. 1, January 1967, Brown University.
[12] W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. and Appl. 14 (1966), pp. 276–284.
[13] S. Reich, *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull. 14 (1971), pp. 121–124.
[14] — *Fixed points of contractive functions*, Boll. Uni. Math. Italiana 5 (4) (1972), pp. 26–42.
[15] H. Schaefer, *Über die Methode sukzessiver Approximationen*, Jbr. Deutch. Math. Verein. 59 (1957), pp. 131–140.
[16] K. L. Singh, *Contraction mappings and fixed point theorems*, Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, 83 (1968), pp. 34–44.
[17] — *On some fixed point theorems I*, Riv. di Mat. Univ. Parma, 2 (10) (1969), pp. 13–21.
[18] — *Some further extensions of Banach's contraction principle*, ibid. (1969), pp. 139–155.
[19] — *Fixed point theorems for quasi-nonexpansive mappings*, Acad. Naz. De Lincei (Accepted).
[20] — *Fixed and common fixed points for generalized contraction mappings*, Bull. Acad. Polon. Sci. (Accepted).
[21] P. Soardi, *Su un problema di punto unito di S. Reich*, Boll. Uni. Math. Italiana (1971), pp. 841–845.
[22] C. S. Wong, *Approximation to fixed points of generalized nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), pp. 93–97.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TEXAS A & M UNIVERSITY
College Station, Texas

*Accepté par la Rédaction le 13. 4. 1977*

---

# Berechnung einiger Poincaré-Reihen

von

**Jürgen Herzog** und **Manfred Steurich** (Essen)

**Resümee.** In dieser Arbeit werden mit den Methoden von Shamash (siehe J. of Algebra 17, 19) Poincaré–Reihen $P_R$ gewisser lokaler Ringe berechnet. Es wird zunächst die Theorie von Shamash auf kommutative, endlich dimensionale $k$-Algebren ausgedehnt, eine obere Abschätzung der Poincaré–Reihe durch eine rationale Reihe und Kriterien für die Gleichheit in dieser Abschätzung angegeben. Als Anwendung davon werden Poincaré–Reihen von einigen $k$-Algebren der Gestalt $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$ bestimmt, wobei $\mathfrak{A}$ ein Ideal ist, das von Monomen in den Unbestimmten $X_i$ erzeugt wird. Außerdem wird gezeigt, daß jeder Cohen–Macauley-Ring, dessen Multiplizität kleiner oder gleich 5 ist, eine rationale Poincaré–Reihe besitzt. Schließlich wird für die Reduktion eines Ringes $R$ modulo eines Elementes aus dem Sockel die Abschätzung der Poincaré-Reihe $P_{\bar{R}}$ des reduzierten Rings $R$: $P_{\bar{R}} \leqslant P_R(1-X^2P_R)^{-1}$ hergeleitet. Mit den benutzten Methoden läßt sich zeigen, daß für eine gewisse Klasse von Gorensteinringen in dieser Abschätzung Gleichheit gilt.

Das letztgenannte Resultat für beliebige artinsche Gorensteinringe wurde mit anderen Methoden von L. Avramov and G. Levin in den Stockholm Lecture Notes, No. 15, 1976, bewiesen.

**Einleitung.** Mit den Methoden, die Shamash in seinen Arbeiten [10], [11], [12] entwickelt hat, sollen hier die Poincaré–Reihen gewisser lokaler Ringe berechnet werden.

Im ersten Paragraphen wird die Theorie von Shamash kurz skizziert und gleichzeitig auf kommutative, endlich-dimensionale $k$-Algebren ausgedehnt. Im allgemeinen erhält man für die Poincaré–Reihen eine obere Abschätzung durch eine rationale Reihe, vgl. (1.2). In den Folgerungen (1.7) und (1.9) werden dann Kriterien angegeben, wann in (1.2) Gleichheit gilt.

In § 2 wird die Theorie auf Algebren mit monomialen Relationen angewandt, das heisst auf Algebren der Gestalt $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ ein Ideal ist, das von Monomen in den Unbestimmten $X_i$ erzeugt wird.

In § 3 zeigen wir, dass jeder Cohen–Macaulay–Ring, dessen Multiplizität kleiner oder gleich 5 ist, eine rationale Poincaré–Reihe besitzt.

Schliesslich untersuchen wir in § 4 das Verhalten der Poincaré–Reihe bei der Reduktion eines Rings modulo einem Element aus dem Sockel.

Ist $(R, m)$ ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $m$ und ist $\sigma$ ein Element aus dem Sockel von $R$, dann gilt

$$P_{\bar{R}}(X) \leqslant P_R(X)(1-P_R(X)X^2)^{-1}, \tag{4.1}$$

wobei $\bar{R} = R/\sigma R$ und $P_R$ bzw. $P_{\bar{R}}$ die Poincaré-Reihe von $R$ bzw. $\bar{R}$ bezeichnet.

Wir zeigen dann in (4.7), dass für eine gewisse Klasse von Gorensteinringen sogar Gleichheit gilt.

## § 1. Die Berechnung von Poincaré-Reihen von $k$-Algebren nach Shamash

Es sei $k$ ein Körper. Unter einer $k$-Algebra $A$ wollen wir im folgenden stets eine endlich-dimensionale lokale $k$-Algebra verstehen, deren Restklassenkörper mit $k$ übereinstimmt. Falls $A$ ausserdem graduiert ist, dann soll $A$ entweder kommutativ oder strikt antikommutativ sein, sonst aber immer kommutativ.

Für den Fall, dass $A$ strikt antikommutativ ist, hat Shamash in den Arbeiten [10], [11], [12] eine Theorie entwickelt, die es in manchen Fällen gestattet, die Reihe

$$P_A(X, Y) = \sum_{p,q\geq 0} \dim_k \operatorname{Tor}^A_{pq}(k, k) X^p Y^q$$

zu berechnen. $\operatorname{Tor}_{pq}$ bezeichnet hierbei den $q$-ten homogenen Bestandteil von $\operatorname{Tor}_p$.

Seine Methoden können völlig analog auch auf kommutative $k$-Algebren angewandt werden.

Es soll hier kurz seine Theorie skizziert werden, ohne auf die Beweise im einzelnen einzugehen. Der Leser sei dazu auf die Originalarbeiten verwiesen.

**1. Die abgeleitete Basis von** $(x_1, \dots, x_n)$. $(x_1, \dots, x_n)$ sei ein minimales Erzeugendensystem des maximalen Ideals $m$ von $A$, $\mathscr{F}$ die Menge aller Folgen

$$\{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n,\ k \geq 1\}$$

und $\tau$: $\mathscr{F} \to m$ die Abbildung mit

$$\tau(i_1, \dots, i_k) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Es ist klar, dass $\tau(\mathscr{F})$ ein $k$-Vektorraum-Erzeugendensystem von $m$ bildet.

Wir ordnen die Menge aller Folgen $\mathscr{F}$ lexikographisch und definieren eine Teilmenge $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{F}$ wie folgt:

Ein Element $I \in \mathscr{F}$ soll genau dann zu $\mathscr{B}^*$ gehören, wenn $\tau(I)$ nicht enthalten ist in dem Vektorraum, der erzeugt wird von den Elementen $J \in \mathscr{F}$ mit $J < I$.

Man überzeugt sich leicht, dass

1) $\tau|\mathscr{B}^*$ injektiv und

2) $\tau(\mathscr{B}^*)$ eine Basis von $m$ ist.

$\mathscr{B} = \tau(\mathscr{B}^*)$ heisst dann die *abgeleitete* Basis von $(x_1, \dots, x_n)$. Es ist klar, dass $\mathscr{B}^*$ und $\mathscr{B}$ nach der Wahl von $(x_1, \dots, x_n)$ eindeutig bestimmt sind.

Offensichtlich gehören die Elemente $x_i$ zu $\mathscr{B}$. Sie heissen *primär*, die übrigen Elemente heissen *sekundär*.

**2. Gute und schlechte Elemente.** Der Komplex

$$\mathscr{X} \dots \to m \otimes_k m \otimes_k m \xrightarrow{d_3} m \otimes_k m \xrightarrow{d_2} m \xrightarrow{d_1} k \to 0,$$



wo also $\mathscr{X}_p = \overset{p}{\otimes}\, m$ das $p$-fache Tensorprodukt von $m$ über $k$ ist, $d_1 = 0$ und

$$d_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_p$$

für $p \geq 2$, heisst der *Bar-Komplex* der $k$-Algebra $(A, m)$, wenn $A$ kommutativ ist.

Falls $A$ strikt antikommutativ ist, setzt man $d_1 = 0$ und

$$d_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{i} \alpha_j + (i+1)} a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_p$$

für $p \geq 2$, $a_i$ homogen, $\deg(a_i) = \alpha_i$.

Bekanntlich ist $H(\mathscr{X}) \simeq \operatorname{Tor}^A(k, k)$. Ist $A$ graduiert und setzt man

$$\deg(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \sum \deg(a_i), \quad a_i \text{ homogen},$$

dann sind die Differentiationen $d_p$ homogen vom Grad 0 und daher ist dann $H_p(\mathscr{X})$ für alle $p$ ein graduierter $k$-Vektorraum.

Bezeichnet $H_p(\mathscr{X})_q$ den $q$-ten homogenen Bestandteil von $H_p(\mathscr{X})$, dann gilt

$$H_p(\mathscr{X})_q \cong \operatorname{Tor}^A_{pq}(k, k).$$

Im folgenden sollen gewisse Untervektorräume $F(p)$ und $G(p)$ von $\mathscr{X}_p$ definiert werden, die wesentlich von der abgeleiteten Basis $\mathscr{B}$ eines minimalen Erzeugendensystems $(x_1, \dots, x_n)$ von $m$ abhängen.

Für $p \geq 1$ sei $\mathscr{B}_p$ die Vektorraumbasis von $\mathscr{X}_p$, bestehend aus den Elementen $a_1 \otimes \dots \otimes a_p$, $a_i \in \mathscr{B}$.

Es soll zunächst gesagt werden, welche Elemente von $\mathscr{B}_p$ *gut* bzw. *schlecht* sind.

a) Die primären Elemente von $\mathscr{B}_1$ heissen gut.

b) Ein Element $a_1 \otimes a_2 \in \mathscr{B}_2$ heisst schlecht, wenn $a_1$ primär ist, etwa $a_1 = x_i$, und wenn es ein Element $(i_1, \dots, i_r, i) \in \mathscr{B}^*$ gibt, so dass

$$a_2 = \tau(i_1, \dots, i_r).$$

c) Ein Element $a_1 \otimes \dots \otimes a_p \in \mathscr{B}_p$, $p \geq 2$, heisst gut, wenn $a_1 \otimes \dots \otimes a_{p-1}$ gut ist und wenn gilt: Entweder ist $a_p$ primär und $a_{p-1} \otimes a_p$ ist nicht schlecht, oder $a_{p-1}$ ist primär, und es gilt

α) $a_{p-1} \otimes x_i$ ist schlecht, wobei $a_p = \tau(i_1, \dots, i_r, i)$ und

β) $a_{p-1} \otimes a_p$ ist nicht schlecht.

d) Ein Element $a_1 \otimes \dots \otimes a_p \in \mathscr{B}_p$, $p \geq 2$, heisst schlecht, wenn $a_1 \otimes \dots \otimes a_{p-1}$ gut und $a_{p-1} \otimes a_p$ schlecht ist.

Die Untervektorräume $F(p)$, $G(p) \subseteq \mathscr{X}_p$ werden nun wie folgt definiert:

Wir setzen $G(0) = k$. Für $p \geq 1$ soll $G(p)$ der Untervektorraum von $\mathscr{X}_p$ sein, der von den guten Elementen aus $\mathscr{B}_p$ erzeugt wird.

Für $p\geqslant 2$ sei $F_p$ der Untervektorraum von $\mathscr{X}_p$, der von den schlechten Elementen aus $\mathscr{B}_p$ erzeugt wird. Dann wird $F(0) = F(1) = 0$, $F(2) = F_2$ gesetzt und $F(p) = F(p-1)\otimes m\oplus F_p$ für $p\geqslant 2$.

Nach dieser Fülle von Definitionen und Bezeichnungen können wir im nächsten Abschnitt die wichtigsten Resultate formulieren.

**3. Die Sätze von Shamash und Folgerungen.** Alle Resultate dieser Arbeit gründen sich auf die beiden Sätze dieses Abschnitts, die Shamash für strikt antikommutative Algebren bewiesen hat, die aber genauso für kommutative Algebren gelten.

SATZ 1.1 (Shamash, [12], Cor. 2 zu Lemma 4). *Für alle* $p\geqslant 0$ *gilt*:

1) $\mathscr{X}_p = F(p)\oplus dF(p+1)\oplus G(p)$,

2) *$d$ ist injektiv auf $F(p)$.*

Aus 1.1 lässt sich leicht eine Abschätzung herleiten: Sei $Y$ der Unterkomplex von $\mathscr{X}$ mit $Y_p = F(p)\oplus dF(p+1)$, $p\geqslant 0$, und sei $\overline{\mathscr{X}}$ der Quotientenkomplex $\mathscr{X}/Y$.

Aus der exakten Sequenz

$$0\to Y\to\mathscr{X}\to\overline{\mathscr{X}}\to 0$$

und aus 1.1, 2) erhält man $H(Y) = 0$ und $H(\mathscr{X})\cong H(\overline{\mathscr{X}})$. Aus 1.1, 1) folgt dann weiter

$$\dim_k G(p) = \dim\overline{\mathscr{X}}_p, \quad \text{für} \quad p\geqslant 0\,.$$

Insgesamt ergibt sich daher, wenn man $g(p) = \dim_k G(p)$ setzt

FOLGERUNG 1.2. $P_A(X)\leqslant \sum_{p\geqslant 0} g(p)X^p$.

Ungleichungen zwischen formalen Potenzreihen verstehen wir dabei koeffizientenweise.

Wir zeigen als Nächstes, dass die Reihe $G_A(X) = \sum_{p\geqslant 0} g(p)X^p$ stets rational ist.

Dazu definieren wir eine $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $M(A;\underline{x}) = (\alpha_{ij})$, die von der Algebra $A$ und von der Wahl eines minimalen Erzeugendensystems $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von $m$ abhängt.

Die ganzen Zahlen $\alpha_{ij}$, $i, j = 0, \ldots, n$ sind folgendermaßen erklärt:

1) $\alpha_{00} = 0$,

2) $\alpha_{ij} = 1$ für $i\geqslant 1$ und $j\leqslant i-1$,

3) $\alpha_{0j}$ = Anzahl der guten Elemente $x_j\otimes a$, wobei $a$ sekundär ist, für $j = 1, \ldots, n$.

4) Für $i\geqslant 1$ und $j\geqslant i$ ist

$$\alpha_{ij} = \begin{cases}1, & \text{falls } x_j\otimes x_i \text{ gut},\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Sei nun $v_0$ der Spaltenvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ und $v_p = M(A;\underline{x})^p v_0$, $p\geqslant 0$.



Setzt man $|v| = \sum_{i=0}^{n} r_i$ für einen Vektor $v = \begin{pmatrix}r_0\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}$, dann folgt unmittelbar aus der Definition von $G(p)$

LEMMA 1.3. $g(p) = |v_p|$ *für* $p\geqslant 0$.

Aus 1.3 lässt sich leicht die Rationalität von $G_A(X)$ ableiten. Sei nämlich $M = M(A;x)$ und $\mathfrak{A} = M^0+MX+M^2X^2+\ldots$ die Matrix mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}[\![X]\!]$, dann ist $|\mathfrak{A}v_0| = G_A(X)$. Andererseits gilt $\mathfrak{A} = (\mathscr{E}-MX)^{-1}$, wobei $\mathscr{E}$ die Einheitsmatrix vom Rang $n+1$ darstellt.

Setzt man $\mathfrak{L} = \mathscr{E}-MX$ und bezeichnet $\mathfrak{L}_{ij}$ die Matrix, die aus $\mathfrak{L}$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte hervorgeht, dann ergibt sich aus der Kramerschen Regel

$$\mathfrak{A} = (\det\mathfrak{L})^{-1}(c_{ij}), \quad \text{wobei} \quad c_{ij} = (-1)^{i+1}\det\mathfrak{L}_{ji}\,.$$

Wir erhalten also

LEMMA 1.4. $G_A(X) = \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\det\mathfrak{L}_{0j}\right)(\det\mathfrak{L})^{-1}$.

Falls die Algebra $A$ graduiert ist, dann gilt das bisher Gesagte mit geringfügigen Änderungen auch für die Reihen

$$P_A(X, Y) = \sum_{p,q\geqslant 0}\dim\mathrm{Tor}^A_{pq}(k, k)X^pY^q$$

und

$$G_A(X, Y) = \sum_{p,q\geqslant 0} g(p, q)X^pY^q\,.$$

Es ist klar, wie $g(p, q)$ zu definieren ist: Bezeichnet $G(p)_q$ den Vektorraum, der von den guten Elementen aus $\mathscr{B}_p$ vom Grad $q$ erzeugt wird, dann ist

$$g(p, q) = \dim G(p)_q\,.$$

Es gilt dann

1) $P_A(X, Y)\leqslant G_A(X, Y)$,

2) $G_A(X, Y)$ ist eine rationale Funktion.

Der folgende Satz von Shamash gibt an, wann in 1.2 Gleichheit gilt.

SATZ 1.5 (Shamash, [12], Main Lemma). *Falls* $d\mathscr{X}_3 = dF(3)$, *dann gilt* $d\mathscr{X}_p = dF(p)$ *für alle* $p\geqslant 0$.

Gilt $d\mathscr{X}_p = dF(p)$ für alle $p\geqslant 0$, dann ist die Differentiation auf $\overline{\mathscr{X}}$ trivial, also $H(\overline{\mathscr{X}}) = \overline{\mathscr{X}}$.

Aus 1.5 folgt daher

FOLGERUNG 1.6. *Falls* $d\mathscr{X}_3 = dF(3)$, *dann gilt* $P_A(X) = G_A(X)$. *Ein entsprechender Satz gilt natürlich auch im graduierten Fall.*

Wir sagen $A$ erfüllt bezüglich einem minimalen Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ des maximalen Ideals $m$ von $A$ die Bedingung (S), wenn $d\mathscr{X}_3 = dF(3)$.

Man beachte, dass $F(3)$ nicht nur von $A$, sondern auch von der Wahl von $(x_1, \ldots, x_n)$ abhängt!

Wir geben nun zu (S) äquivalente Bedingungen an, die sich in konkreten Fällen oft leichter verifizieren lassen.

LEMMA 1.7. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *A erfüllt bezüglich* $(x_1, \ldots, x_n)$ *die Bedingung* (S).

b) $\dim_k \mathrm{Tor}_2^A(k, k) = g(2)$.

Beweis. Es gilt $d\mathscr{X}_3 = dF(3)$ genau dann, wenn $H_2(\overline{\mathscr{X}}) = \overline{\mathscr{X}}_2$. Da $\dim_k \overline{\mathscr{X}}_2 = g(2)$ und $\dim H_2(\overline{\mathscr{X}}) = \dim \mathrm{Tor}_2^A(k, k)$, folgt die Behauptung.

Sei nun $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ eine kommutative $k$-Algebra. Wir stellen $A$ dar als Faktorring eines Polynomrings $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A} \subset (X_1, \ldots, X_n)^2$. Die $x_i$ seien die Restklassen der Unbestimmten $X_i$ und $\mathscr{B}$ sei die abgeleitete Basis von $(x_1, \ldots, x_n)$.

Für $i<j$ sind die Elemente $x_i \otimes x_j$ stets gut. Die übrigen guten Elemente von $\mathscr{B}_2$ nennen wir *wesentlich* und bezeichnen mit $G_w$ die Menge der guten, wesentlichen Elemente von $\mathscr{B}_2$.

Jedem Element $g \in G_w$ ordnen wir dann ein Polynom $F_g \in \mathfrak{A}$ zu.

Sei $g = x_i \otimes a$, $g \in G_w$, dann gibt es genau ein Element $c \in F(2)$, so dass

$$dc = dg\,.$$

$c$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$c = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes a_j, \quad a_j \in A\,.$$

Seien $F_1, \ldots, F_n, F$ Polynome aus $k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $a_j = F_j + \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, n$ und $a = F + \mathfrak{A}$, dann setzen wir

$$F_g = \sum_{j=1}^{n} X_1 F_j - X_i F\,.$$

Es ist dann klar, dass $F_g$ ein Element von $\mathfrak{A}$ ist. Ferner sieht man sofort, dass $F_g$ bis auf Elemente aus $(X_1, \ldots, X_n)\,\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt ist.

LEMMA 1.8. *Die Polynome* $F_g$, $g \in G_w$ *bilden ein Erzeugendensystem von* $\mathfrak{A}$.

FOLGERUNG 1.9. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *A erfüllt bezüglich* $(x_1, \ldots, x_n)$ *die Bedingung* (S).

b) *Die Polynome* $F_g$, $g \in G_w$ *bilden ein minimales Erzeugendensystem von* $\mathfrak{A}$.

Beweis. Nach [7], 1.4.15 ist

$$\dim_k \mathrm{Tor}_2^A(k, k) = \binom{n}{2} + \dim_k \mathfrak{A}/(X_1, \ldots, X_n)\mathfrak{A}\,,$$

und es ist

$$g(2) = \binom{n}{2} + \text{Anzahl der Elemente von } G_w\,.$$

Aus 1.7 und 1.8 folgt somit die Behauptung.



Beweis von 1.8. Wie im Abschnitt 1 ordnen wir jeder Folge $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathscr{F}$ ein Monom $\tau(i_1, \ldots, i_k) = X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}$ zu und übertragen die lexikographische Ordnung auf $\mathscr{F}$ auf die Monome in $k[X_1, \ldots, X_n]$. Ist $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $F = \sum a_\nu X^\nu$, ein Polynom, dann setzen wir $\deg F = \max\{\tau^{-1}(X^\nu)/a_\nu \neq 0\}$.

Für Elemente $F \in \mathfrak{A}$ zeigen wir nun durch Induktion nach $\deg F$, dass $F \in (F_g)_{g \in G_w}$.

Der Induktionsbeginn ist trivial.

Sei nun $F \in \mathfrak{A}$ mit $(i_1, \ldots, i_k) = \deg F > (0, \ldots)$. Da $F$ ein Element von $\mathfrak{A}$ ist, folgt $(i_1, \ldots, i_k) \notin \mathscr{B}^*$, und es gibt eine Zahl $r$, $1 < r \leqslant k$, so dass

$$(i_1, \ldots, i_{r-1}) \in \mathscr{B}^* \quad \text{aber} \quad (i_1, \ldots, i_r) \notin \mathscr{B}^*\,.$$

Das bedeutet aber, dass entweder das Element $g_1 = x_{i_r} \otimes x_{i_1} \ldots x_{i_{r-1}}$ oder $g_2 = x_{i_r} \otimes x_{i_{r-1}}$ ein gutes, wesentliches Element ist. Man überlegt sich leicht, dass $F_{g_1}$ so gewählt werden kann, dass $\deg F_{g_1} = (i_1, \ldots, i_r)$. Es ist dann $\deg F_{g_1} X_{i_{r+1}} \ldots X_{i_k} = \deg F$. Folglich gibt es ein Element $\lambda \in k$, so dass

$$\deg(F - \lambda F_{g_1} X_{i_{r+1}} \ldots X_i) < \deg F\,.$$

Nach Induktionsannahme gibt es ein Element $H \in (F_g)_{g \in G_w}$, so dass

$$F - \lambda F_{g_1} X_{i_{r+1}} \ldots X_{i_k} = H\,.$$

Also ist $F \in (F_g)_{g \in G_w}$. Entsprechend schliesst man, falls $g_2$ ein gutes Element ist.

## § 2. Algebren mit monomialen Relationen

Eine $k$-Algebra $A$ heisst Algebra mit monomialen Relationen, wenn

$$A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}\,,$$

wobei $\mathfrak{A}$ von Monomen in den Unbestimmten $X_i$ erzeugt wird.

Für solche Algebren wollen wir in einigen Fällen mit den Methoden von § 1 die Poincaré-Reihe berechnen.

Folgende Resultate sind bereits bekannt:

1) Ghione–Gulliksen, [4]:
$P_A$ ist rational, falls $n \leqslant 3$ oder falls $\mathfrak{A}$ von höchstens 3 Monomen erzeugt wird.

2) Golod, [5]:
$P_A$ ist rational, falls $\mathfrak{A} = (X_1 \ldots X_n)^m$.

3) Froeberg, [3]:
Wird $\mathfrak{A}$ von Monomen vom Grad 2 erzeugt, dann gilt

$$P_A(X) = H_A(-X)^{-1}\,.$$

Hierbei ist $H_A(X)$ die Hilbertfunktion von $A$.

Wir studieren hier den Fall, für den $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subseteq (X_1, \ldots, X_n)^2$ und $A$ artinsch ist. Es gibt dann eine natürliche Zahl $k>0$, so dass $X_i^k \in \mathfrak{A}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Mit $x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) bezeichnen wir die Restklassen der Unbestimmten $X_i$. Es ist dann klar, dass die abgeleitete Basis von $(x_1, \ldots, x_n)$ gerade aus den Monomen in den $x_i$ besteht, die von Null verschieden sind.

$x_j \otimes a$, $a \in \mathscr{B}$ ist ein gutes, wesentliches Element, wenn gilt: Entweder ist $a = x_i$, $i \leqslant j$ und $x_i x_j = 0$ oder $a = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k = n$, $k \geqslant 2$, $i_k \leqslant j$, $x_{i_k} x_j \neq 0$, aber $a x_j = 0$.

Aus (1.9) folgt nun sofort

Lemma 2.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *$A$ erfüllt bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung* (S).

b) *$\mathfrak{A}$ wird von folgenden Monomen minimal erzeugt*:

1) $X_i X_j$, $i \leqslant j$, $X_i X_j \in \mathfrak{A}$,

2) $X_{i_k} \ldots X_{i_{k+1}}$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{k+1}$, $k \geqslant 2$, *so dass*

$$X_{i_1} \ldots X_{i_{k+1}} \in \mathfrak{A}, \quad X_{i_1} \ldots X_{i_k} \notin \mathfrak{A} \quad \textit{und} \quad X_{i_k} X_{i_{k+1}} \notin \mathfrak{A}.$$

Ein minimales Erzeugendensystem $\mathscr{E}$ von $\mathfrak{A}$, bestehend aus Monomen $X^\nu = X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, ist eindeutig bestimmt: Ein Monom $X^\nu \in \mathfrak{A}$ gehört genau dann zu $\mathscr{E}$, wenn für alle $X^\mu \in \mathfrak{A}$ gilt: $(X^\nu) \not\subset (X^\mu)$ $(\nu \neq \mu)$. Insbesondere gehören alle Monome vom Grad 2 aus $\mathfrak{A}$ zu $\mathscr{E}$.

Aus diesen Bemerkungen ergibt zusammen mit (2.1)

Lemma 2.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *$A$ erfüllt bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung* (S).

b) *Ist $X_{i_1} \ldots X_{i_{k+1}} \in \mathfrak{A}$, $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{k+1}$, $k \geqslant 2$, so dass $X_{i_k} X_{i_{k+1}} \notin \mathfrak{A}$ und $X_{i_1} \ldots X_{i_k} \notin \mathfrak{A}$, dann gilt*:

$$X_{i_1} \ldots X_{i_{j-1}} X_{i_{j+1}} \ldots X_{i_{k+1}} \notin \mathfrak{A} \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, k+1.$$

Wir untersuchen nun einige Spezialfälle: Für das minimale Erzeugendensystem $\mathscr{E}$ von $\mathfrak{A}$ gelte

$$\mathscr{E} \setminus (X_1, \ldots, X_n)^3 \subseteq \{X_1^2, \ldots, X_n^2\}.$$

Aus der Formel 1.4 ergibt sich dann

$$(*) \qquad G_A(X) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (1-d_i X) + X \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (X+1-d_i X) \prod_{i=j+1}^{n} (1-d_i X)}{\prod_{i=1}^{n} (1-d_i X) - X^2 \sum_{j=1}^{n} r_j \prod_{i=1}^{j-1} (X+1-d_i X) \prod_{i=j+1}^{n} (1-d_i X)},$$

wobei

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } X_i^2 \in \mathscr{E}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $r_j$ = Anzahl der guten Elemente $x_j \otimes a$, $a$ sekundär.



Wir spezialisieren weiter

I. *Es gelte* $\mathfrak{A} \subseteq (X_1, \ldots, X_n)^3$. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $C_i$ die Menge der Monome in den Variablen $X_1, \ldots, X_{i-1}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. (Für alle $i$ wollen wir 1 als Element von $C_i$ auffassen.) Für $i = 1, \ldots, n$ und $X^\nu \in C_i$ sei $\alpha_i(\nu)$ die kleinste Zahl mit

$$X^\nu X_i^{\alpha_i(\nu)} \in \mathfrak{A}.$$

Aus (2.2) folgt dann sofort

Lemma 2.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *$A$ erfüllt bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung* (S).

b) *Für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $X^\nu$, $X^\mu \in C_i$ gilt*:

$$\alpha_i(\nu) < \alpha_i(\mu), \quad \textit{falls} \quad (X^\nu) \subsetneq (X^\mu).$$

Gelten die äquivalenten Bedingungen von (1.3), dann folgt aus (1.6) und Formel (*)

$$P_A(X) = \frac{(1+X)^n}{1 - X^2(1 + r_2(1+X) + \ldots + r_n(1+X)^{n-1})},$$

wobei $r_i$ = Anzahl der Elemente von $C_i$.

Beispiele. 1) Die Bedingung 2.3, b) ist für $\mathfrak{A} = (X_1^3, X_2^3)$ nicht erfüllt.

2) Für $\mathfrak{A} = (X_1^4, X_1^2 X_2, X_1 X_2^2, X_2^3)$ ist die Bedingung 2.3, b) ebenfalls nicht erfüllt. Nach Umnumerierung $X_1 \mapsto X_2$, $X_2 \mapsto X_1$ ist sie jedoch erfüllt.

3) Für alle $n \geqslant 1$ und alle $m \geqslant 1$ erfüllt $\mathfrak{A} = (X_1, \ldots, X_n)^m$ die Bedingung 2.3, b). In diesem Fall ist $r_i = \binom{m+i-2}{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n$.

II. *Es gelte* $\mathscr{E} \setminus (X_1, \ldots, X_n)^3 = \{X_1^2, \ldots, X_n^2\}$. Aus Lemma 2.2 ergibt sich sofort

Lemma 2.4. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

a) *$A$ erfüllt bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung* (S).

b) *Ist $X_{i_1} \ldots X_{i_k} \in \mathfrak{A}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, und ist $X_{i_1} \ldots X_{i_{k-1}} \notin \mathfrak{A}$, dann gilt*:

$$X_{i_1} \ldots X_{i_{k-1}} X_j \in \mathfrak{A} \quad \textit{für alle} \quad j < i_k.$$

Gelten die äquivalenten Bedingungen von (2.4), dann folgt wieder aus (1.6) und Formel (*)

$$P_A = \frac{1}{(1-X)^n - X^2(r_n + r_{n-1}(1-X) + \ldots + r_3(1-X)^{n-3})},$$

wobei $r_j$ = Anzahl der Monome

$$X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k} \in \mathscr{E}, \quad i_1 < \ldots < i_k, \ i_k = j.$$

Beispiele. 1) Das Ideal

$$\mathfrak{A} = (X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2, X_6^2, X_1 X_2 X_3, X_4 X_5 X_6)$$

erfüllt nicht die Bedingung 2.4, b), auch nicht nach beliebiger Umnumerierung der Variablen. Die Ideale

$$\mathfrak{A}_1 = (X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_1X_2X_3), \quad \mathfrak{A}_2 = (X_4^2, X_5^2, X_6^2, X_4X_5X_6)$$

erfüllen die Bedingung 2.4 b).

Seien $A_1 = k[X_1, X_2, X_3]/\mathfrak{A}_1$, $A_2 = k[X_4, X_5, X_6]/\mathfrak{A}_2$, dann ist $A = A_1 \underset{k}{\otimes} A_2$ und es folgt

$$P_A(X) = P_{A_1}(X)P_{A_2}(X) = \frac{1}{[(1-X)^3 - X^2]^2}.$$

2) Sei $A_n = k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2, \ldots, X_n^2)$ und $A_{nm} = A_n/(x_1, \ldots, x_n)^m$.

Für alle $n$ und alle $m \geqslant 3$ erfüllt $A_{nm}$ bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung (S) und es gilt:

$$P_{A_{nm}}(X) = \frac{1}{(1-X)^n - X^2 \sum\limits_{\nu=3}^{n} \binom{\nu-1}{m-1}(1-X)^{n-\nu}}.$$

Abschliessend betrachten wir noch den Fall, wo $\mathscr{E}$ nur Monome vom Grad 2 enthält. Es gilt dann

Lemma 2.5. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) *$A$ erfüllt bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung (S).*

b) *Für alle Indices $i<j<k$ gilt:*

*Ist $X_iX_j \notin \mathfrak{A}$ und $X_jX_k \notin \mathfrak{A}$, dann folgt $X_iX_k \notin \mathfrak{A}$.*

Bedingung 2.5 b) ist auch nach beliebiger Umnumerierung nicht immer erfüllt.

Beispiel. $\mathfrak{A} = (X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_1X_5)$.

Gelten die äquivalenten Bedingungen von (2.5) und ist $H_A$ die Hilbertfunktion von $A$, dann ist

$$P_A(X) = H_A(-X)^{-1}.$$

Dies ist mit einigen Einschränkungen das Resultat von Froeberg.

Den Zusammenhang zwischen Hilbert- und Poincaré-Reihen kann man folgendermaßen einsehen: Gelten die äquivalenten Bedingungen von (2.5), dann haben alle guten Elemente von $\mathscr{B}_p$, $p \geqslant 1$, die Gestalt $a_1 \otimes \ldots \otimes a_p$, wobei alle $a_i$ primär sind. Hieraus folgt sofort, dass

$$P_A(X, Y) = \sum_{p=0} \beta_p (XY)^p, \quad \text{wobei} \quad \beta_p = \dim \operatorname{Tor}_p^A(k, k).$$

Andererseits gilt stets

$$H_A(Y)P_A(-1, Y) = 1,$$

und hieraus folgt die Behauptung.



## § 3. Cohen-Macaulay-Ringe kleiner Multiplizität

Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ eine $k$-Algebra, $m$ bezeichne das maximale Ideal von $A$.

Proposition 3.1. *Es sei $m^3 = 0$ und $\dim_k m^2 = 1$; dann gilt*

$$P_A(X) = \frac{1}{1-nX} \quad \textit{oder} \quad P_A(Y) = \frac{1}{1-nX+X^2}.$$

Beweis. Induktion nach $n$: Falls $n = 1$, dann ist $A$ ein vollständiger Durchschnitt und damit $P_A(X) = 1/(1-X)$. Sei $n>1$. Wir zeigen zunächst, dass man nach geeigneter Wahl von $(x_1, \ldots, x_n)$ $x_1^2 = 0$ annehmen darf. Sei nämlich $x_1^2 \neq 0$, dann gibt es Zahlen $\lambda$, $\mu \in k$ mit $x_2^2 - \lambda x_1^2 = x_1x_2 - \mu x_1^2 = 0$. Falls $\lambda = 0$, dann braucht man nur $x_1$ in $x_2$ und $x_2$ in $x_1$ umzubenennen. Sei also $\lambda \neq 0$, dann findet man gegebenenfalls nach geeigneter Grundkörpererweiterung ein $\alpha \in k$ mit $(x_1+\alpha x_2)^2 = 0$. Man ersetzt dann $x_1$ durch $x_1+\alpha x_2$.

Es sei nun also $m = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x_1^2 = 0$.

1. Fall. $x_1x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Bezeichne $\bar{A} := k[x_2, \ldots, x_n]$, dann gilt nach [7], 3.4.4

$$P_A(X) = \frac{P_{\bar{A}}(X)}{1-P_{\bar{A}}(X)X} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-nX}, & \text{falls } P_{\bar{A}}(X) = \dfrac{1}{1-(n-1)X}, \\[2ex] \dfrac{1}{1-nX+X^2}, & \text{falls } P_{\bar{A}}(X) = \dfrac{1}{1-(n-1)X+X^2}. \end{cases}$$

2. Fall. Es gibt ein $i>1$ mit $x_1x_i \neq 0$.

Nach Umnumerierung dürfen wir annehmen, dass $x_1x_2 \neq 0$. Es ist dann $\mathscr{B}^* = \{(1), (1,2), (2), \ldots, (n)\}$ und $G_w = \{x_i \otimes x_j \mid i \geqslant j, (i,j) \neq (2,1)\}$. Die Polynome $F_g$ für $g \in G_w$ sind $X_1^2$, $X_iX_j - \lambda_{ij}X_1X_2$, $i \geqslant j$, $(i,j) \neq (2,1)$. Diese Polynome bilden offensichtlich ein minimales Erzeugendensystem von dem Ideal $\mathfrak{A}$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$, wobei $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$.

Nach (1.9) erfüllt daher $A$ die Bedingung (S) bzgl. $(x_1, \ldots, x_n)$. Man errechnet sofort

$$P_A(X) = \frac{1}{1-nX+X^2}.$$

Beispiele. 1) $A = k[X_1, X_2, X_3]/(X_1^2 - X_2^2, X_1^2 - X_3^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3)$ ist ein Gorensteinring und

$$P_A(X) = \frac{1}{1-3X+X^2}$$

(vgl. auch [14], Satz 9).

2) Sei $A = k[X_1, X_2, X_3]/(X_1^2, X_2^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, X_3^3)$, dann ist

$$P_A(X) = \frac{1}{1-3X}.$$

Die Algebren in 1) und 2) besitzen dieselbe Hilbertreihe!

Als Anwendung von (3.1) erhalten wir sehr leicht

PROPOSITION 3.2. *Sei $(R, m, k)$ ein lokaler, equicharakteristischer Cohen–Macaulay-Ring mit Multiplizität $m(R) \leqslant 5$, dann ist $P_R$ rational. Für* $\dim R = d$ *gilt*

$$P_R(X) = \frac{(1+X)^d}{1-nX} \qquad (n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}),$$

$$P_R(X) = \frac{(1+X)^d}{1-nX+X^2} \qquad (n \in \{2, 3\}).$$

Beweis. Indem wir zu Komplettierung von $R$ übergehen, dürfen wir annehmen, dass $R$ seinen Restklassenkörper enthält. Ausserdem habe $k$, gegebenenfalls nach geeigneter Grundkörpererweiterung, unendlich viele Elemente. Dann kann man eine reguläre Folge $\underline{x}$ in $m \setminus m^2$ finden, so dass $m(R)$ gleich Länge von $\bar{R} = R/\underline{x}R$. Damit ist

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{P_R(X)}{(1+X)^d}.$$

Es genügt daher, $P_R$ für artinsche Ringe $R$ mit Länge von $R \leqslant 5$ zu bestimmen.

Falls $e\dim R \leqslant 2$, dann ist $R$ ein Golod–Ring oder ein vollständiger Durchschnitt (vgl. [7], 4.3.5 und 9). In beiden Fällen ist $P_R$ bekannt.

Falls $e\dim R = 4$, dann ist $m^2 = 0$ und damit $R$ ein Golod–Ring.

Es bleibt der Fall $e\dim R = 3$ und $m(R) = 4$ oder $m(R) = 5$. Im ersten Fall gilt wieder $m^2 = 0$, im zweiten Fall können wir (3.1) anwenden. Es ist klar, dass nur die angegebenen Poincaré-Reihen auftreten können.

## § 4. Reduktion modulo Sockelelementen

Sei $(R, m, k)$ ein noetherscher lokaler Ring. Das Ideal $0 : m = \{x \in R |\ xm = 0\}$ heisst der Sockel von $R$. Wir wollen hier in einigen Fällen den Zusammenhang von $P_R$ mit $P_{\bar{R}}$ untersuchen, wobei $\bar{R} = R/\sigma R$, $\sigma \in 0 : m$. Zwei Resultate sind bekannt:

1) Falls $\sigma \in m \setminus m^2$, dann ist

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{P_R(X)}{1+P_R(X)X} \qquad \text{(vgl. [7], 3.4.4)}.$$

2) Falls $R$ ein 0-dimensionaler vollständiger Durchschnitt mit $n = \dim m/m^2 > 1$ ist, dann gilt:

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{1}{(1-X)^n - X^2} \qquad \text{(vgl. [6], Th. 1).}$$



Da $P_R(X) = \dfrac{1}{(1-X)^n}$, kann man die Formel in (2) auch in der Form

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{P_R(X)}{1-P_R(X)X^2} \text{ schreiben}.$$

Ganz allgemein gilt:

SATZ 4.1.

$$P_{\bar{R}}(X) \leqslant \frac{P_R(X)}{1-P_R(X)X^2}.$$

Beweis. Sei $F$ eine minimale freie $R$-Auflösung von $k$ und $\bar{F}$ der Komplex $F \otimes_R \bar{R}$. Aus der langen exakten Homologiesequenz von

$$0 \to \sigma F \to F \to \bar{F} \to 0$$

ergibt sich sofort, dass $H_0(F) \cong k$ und

$$H_i(\bar{F}) \cong \operatorname{Tor}^R_{i-1}(k, k) \quad \text{für} \quad i > 0.$$

Ausgehend von dem Komplex $\bar{F}$ kann man nun die Eagon–Auflösung $E$ von $k$ über $\bar{R}$ konstruieren. $E_i$ ist dann die $i$-te homogene Komponente des Tensorprodukts graduierter $R$-Moduln $\bar{F} \otimes_{\bar{R}} Y$, wobei $Y = \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i$ mit $X_i$ frei vom Rang

$$\dim H_{i-1}(\bar{F}) = \dim \operatorname{Tor}^R_{i-2}(k, k) \quad \text{(vgl. [7], Chap. 4, § 1)}.$$

Hieraus folgt sofort die Ungleichung.

Wir wollen nun Fälle untersuchen, bei denen in (4.1) Gleichheit gilt. Dabei bezeichne $H(R)$ für einen lokalen Ring $R$ die Homologiealgebra des Koszulkomplexes $K(R)$ von $R$.

Es sei im Folgenden $R$ ein Gorensteinring mit $\dim R = 0$ und $\dim m/m^2 = n > 1$. Dann ist $H_n(R) \cong 0 : m = \sigma R$, wobei $\sigma \in 0 : m$, $\sigma \neq 0$. $H_n(R)$ ist also eindimensional. Mit $\overline{H(R)}$ bezeichnen wir die $k$-Algebra $H(R)/H_n(R)$. Es ist also $\overline{H(R)}_i = H_i(R)$ für $i \leqslant n-1$ und $\overline{H(R)}_n = 0$.

PROPOSITION 4.2. a) *Das Bild der kanonischen Abbildung $H(R) \to H(\bar{R})$ ist isomorph zu $\overline{H(R)}$.*

b) *Für $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, \binom{n}{i-1}$ seien $X_{ij}$ Unbestimmte mit $\deg X_{ij} = i$. $A$ sei die graduierte $k$-Algebra $k[X_{ij}]/(X_{ij})^2$. Dann gilt:*

$$H(\bar{R}) \cong \overline{H(R)} \amalg_k A.$$

Beweis. Wir betrachten zu

$$0 \to \sigma R \to R \to \bar{R} \to 0$$

die lange exakte Homologiesequenz

$$\ldots \to H_i(R) \to H_i(\bar{R}) \to H_{i-1}(\sigma R) \to \ldots.$$

und zeigen zunächst, dass

$$H_i(\bar{R}) \to H_{i-1}(\sigma R) \text{ surjektiv ist für } i = 1, \ldots, n.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne $(T_{j_1} \ldots T_{j_i})$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leqslant n$ die kanonische Basis von $K_i(R)$. Offensichtlich ist $H_{i-1}(\sigma R) = \sigma K_{i-1}(R)$. Für ein Element $T_{j_1} \ldots T_{j_{i-1}}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{i-1} \leqslant n$ müssen wir ein Urbild in $H_i(\bar{R})$ angeben. Da $R$ ein Gorensteinring ist, ergibt sich, dass die bilineare Abbildung

$$m/m^2 \times 0 : m^2/0 : m \to 0 : m$$

eine perfekte Paarung ist, d.h. es gibt für ein minimales Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von $m$ Elemente $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in 0 : m^2$ mit $x_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma$. Wir wählen nun ein $l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $l \neq j_1, \ldots, j_{i-1}$. Dann sieht man sofort, dass

$$d(\sigma_l T_l T_{j_1} \ldots T_{j_{i-1}}) = \sigma T_{j_1} \ldots T_{j_{i-1}}.$$

Aus der langen Homologiesequenz folgt nun, dass $H_i(R) \to H_i(\bar{R})$ injektiv ist für $i = 0, \ldots, n-1$. Da ausserdem $H_n(R) \cong H_n(\sigma R)$, ergibt sich a).

Für $i = 1, \ldots, n$ und eine Basis in $H_{i-1}(\sigma R)$ wählen wir Urbilder $u_{ij}$ in $H_i(\bar{R})$ wie oben angegeben. Dann ist $H(\bar{R}) = \overline{H(R)}[u_{ij}]$. Da die $u_{ij}$ im Sockel von $H(\bar{R})$ liegen, folgt sofort b).

Folgerung 4.3. *Unter den Voraussetzungen von* 4.2 *gilt*:

$$P_{H(\bar{R})}(X, Y) = \frac{P_{\overline{H(R)}}(X, Y)}{1 - P_{\overline{H(R)}}(X, Y) X \left( \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} Y^i \right)}.$$

Beweis. Ist $A$ eine graduierte $k$-Algebra, $\sigma \in 0 : m$, $\sigma \neq 0$, $\deg \sigma = n$, $\sigma \in m \setminus m^2$, dann erhält man analog wie in 1)

$$P_A(X, Y) = \frac{P_{\bar{A}}(X, Y)}{1 - P_{\bar{A}}(X, Y) X Y^n} \quad (\bar{A} = A/\sigma A).$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Formel ergibt sich die Behauptung.

Falls gewisse Masseyoperationen auf $K(R)$ existieren, dann gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Poincaré–Reihe $P_{H(R)}(X, Y)$ der Homologiealgebra von $K(R)$ und der Poincaré–Reihe von $R$. Es gilt dann nämlich nach Shamash [11], Th. 2

$$(*) \qquad P_R(X) = (1+X)^n P_{H(R)}(X, X),$$

wobei $n$ die Einbettungsdimension von $R$ ist.

Für den Fall, dass $(R, m, k)$ seinen Restklassenkörper $k$ enthält (was in den Anwendungen häufig zutrifft), dann lassen sich die Masseyoperationen sehr einfach beschreiben:

Sei $Z(R)$ die Unteralgebra der Zykeln von $K(R)$. Die Homologieklasse eines Zykels $z \in Z(R)$ bezeichnen wir mit $[z]$.



Ist nun $n \geqslant 1$ eine ganze Zahl, dann sagt man $R$ besitzt Masseyoperationen der Ordnung $n$, wenn gilt:

Für $p = 1, \ldots, n$ gibt es homogene, $k$-lineare Abbildungen

$$\gamma_p : \bigotimes^p \tilde{H}(R) \to mK(R)$$

vom Grad $p-1$, wobei $\tilde{H}(R)$ das maximale Ideal von $H(R)$ ist, so dass

1) $\gamma_1(\tilde{H}(R)) \subseteq Z(R)$ und $[\gamma_1(x)] = x$, für alle $x \in \tilde{H}(R)$.

2) Für alle $p$, $n \geqslant p \geqslant 2$, und alle homogenen Elemente $a_1, \ldots, a_p \in \tilde{H}(R)$, $\deg a_i = \alpha_i$, gilt:

$$d\gamma_p(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j)+1} \gamma_i(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) \gamma_{p-i}(a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j)+i+1} \gamma_{p-1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_p).$$

Besitzt $R$ Masseyoperationen jeder Ordnung, dann gilt die Formel $(*)$.

Im allgemeinen wird der Zusammenhang zwischen $P_R(X)$ und $P_{H(R)}(X, Y)$ durch eine Spektralsequenz

$$(**) \qquad \mathrm{Tor}_{pq}^{H(R)}(k, k) \otimes E(m/m^2) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^{R}(k, k)$$

beschrieben, die Avramov in [1], 5.1 hergeleitet hat. ($E(m/m^2)$ bezeichnet dabei die äußere Algebra von $m/m^2$.) Degeneriert die Spektralsequenz $(**)$, dann erhält man gerade die Formel $(*)$.

Folgerung 4.4. *Wenn $R$ Masseyoperationen jeder Ordnung besitzt, dann gilt*

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{(1+X)^n P_{\overline{H(R)}}(X, X)}{1 - P_{\overline{H(R)}}(X, X) X^2 [(1+X)^n - X^n]}.$$

Beweis. Es ist leicht einzusehen, dass $R$ genau dann Masseyoperationen jeder Ordnung besitzt, wenn auch $\bar{R}$ Masseyoperationen jeder Ordnung hat. Mit $(*)$ und (4.3) ergibt sich sofort die Behauptung.

Aus (4.4) folgt direkt

Folgerung 4.5. *Wenn $R$ Masseyoperationen jeder Ordnung hat, dann sind äquivalent*:

a) $P_{\bar{R}}(X) = \dfrac{P_R(X)}{1 - P_R(X) X^2}$,

b) $P_{\overline{H(R)}}(X, X) = \dfrac{P_{H(R)}(X, X)}{1 - P_{\overline{H(R)}}(X, X) X^{n+2}}$.

Für (4.4) und (4.5) braucht man natürlich nur vorauszusetzen, dass die Spektralsequenz $(**)$ für $R$ und $\bar{R}$ degeneriert.

Wir wollen nun die Formel 4.5. b) und damit 4.5. a) in einigen Fällen beweisen.

$H(R)$ ist nach [1], eine Poincaré-Algebra mit Sockel $H_n(R)$. Sei $\sigma$ jetzt ein Element von $H_n(R)$, $\sigma \neq 0$. Dann ist $\overline{H(R)} = H(R)/\sigma H(R)$.

Sei $\mathscr{A} = (x_1, \ldots, x_t)$ ein homogenes minimales Erzeugendensystem des maximalen Ideals $\tilde{H}(R)$ von $H(R)$. Die Bilder der $x_i$ in $\overline{H(R)}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $x_i$. Da wir $\dim m/m^2 > 1$ voraussetzen, gehört $\sigma$ nicht zu $\mathscr{A}$ und $(x_1, \ldots, x_t)$ ist auch ein minimales homogenes Erzeugendensystem des maximalen Ideals $\mathfrak{M}$ von $\overline{H(R)}$.

Proposition 4.6. *Genau dann erfüllt $H(R)$ die Bedingung* (S) *bzgl. $\mathscr{A}$, wenn $\overline{H(R)}$ die Bedingung* (S) *bzgl. $\mathscr{A}$ erfüllt.*

Beweis. Seien $\mathscr{B}^*$ für $H(R)$ bzw. $\overline{\mathscr{B}}^*$ für $\overline{H(R)}$ definiert, wie in § 1 angegeben. $G(2)$ seien die guten Elemente in $\mathscr{X}_2(\tilde{H}(R))$ und $\overline{G(2)}$ die guten Elemente in $\mathscr{X}_2(\mathfrak{M})$.

Es gibt nun ein Element $(1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathscr{B}^*$ mit $\tau(1, i_2, \ldots, i_r) = \varkappa\sigma$ mit $\varkappa \neq 0$. Es ist unmittelbar klar, dass $\mathscr{B}^* = \overline{\mathscr{B}}^* \cup \{(1, i_2, \ldots, i_r)\}$. Damit folgt, dass

$$\overline{G(2)} \subseteq G(2) \cup \{x_{i_r} \otimes x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_{r-1}}\}.$$

Andererseits ist auch jedes Element $u \otimes v \in G(2)$ auch ein Element von $\overline{G(2)}$, wenn $u, v \neq x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r}$. Gilt aber $u = x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ oder $v = x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r}$, dann ist $u \otimes v$ ein Rand in $\mathscr{X}_2(\tilde{H}(R))$ und damit nicht gut. Somit gilt

$$\overline{G(2)} = G(2) \cup \{x_{i_r} \otimes x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r}\}.$$

Nach (1.7) genügt es daher zu zeigen, dass

$$\dim \operatorname{Tor}_2^{\overline{H(R)}}(k, k) = \dim \operatorname{Tor}_2^{H(R)}(k, k) + 1.$$

Dazu betrachten wir eine freie $H(R)$-Auflösung $F$ von $k$. Wie im Beweis von (4.1) zeigt man, dass

$$H_1(\bar{F}) \cong \operatorname{Tor}_0^{H(R)}(k, k) \cong k,$$

wobei $\bar{F} = F \underset{H(R)}{\otimes} \overline{H(R)}$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Für den Übergang von $H(R)$ zu $\overline{H(R)}$ haben wir die Änderung von $G(2)$ zu $\overline{G(2)}$ beschrieben. Es ist jedoch nicht direkt ersichtlich, wie man mit Hilfe der in (1.4), (1.6) beschriebenen Methode, die Änderung der Poincaré-Reihen von $P_{H(R)}$ zu $P_{\overline{H(R)}}$ angibt. Deshalb wird hier noch eine weitere Möglichkeit der Berechnung von Poincaré-Reihen angedeutet für den Fall, dass $H(R)$ die Bedingung (S) für ein minimales Erzeugendensystem von $\tilde{H}(R)$ erfüllt.

Sei dazu $F_2$ bzw. $\bar{F}_2$ der Untermodul, der von den schlechten Elementen in $\mathscr{X}_2(\tilde{H}(R))$ bzw. in $\mathscr{X}_2(\mathfrak{M})$ erzeugt wird. Bezeichne weiter

$$F_{2,l} = \bigcap_{j=0}^{l} \big(\overset{j}{\otimes}\, \tilde{H}(R)\big) \otimes F_2 \otimes \big(\overset{l-j}{\otimes}\, \tilde{H}(R)\big).$$



$\bar{F}_{2,l}$ sei entsprechend definiert. Die Graduierung auf $H(R)$ induziert eine Graduierung auf $\mathscr{X}$ und für einen Untermodul $U \subseteq \mathscr{X}_1$ bezeichne $H_U(Y)$ die Hilbertfunktion von $U$. Durch sorgfältiges Abzählen (vgl. [13]), erhält man:

Erfüllt $H(R)$ die Bedingung (S) bzgl. eines minimalen homogenen Erzeugendensystems $\mathscr{A}$ von $\tilde{H}(R)$, dann gilt:

$$P_{H(R)}(X, Y) = \frac{1}{1 - H_{\tilde{H}(R)}(Y)X + \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l H_{F_{2,l-2}}(Y)(X^l + X^{l-1})}.$$

Bezeichne wieder $\mathscr{A} = (x_1, \ldots, x_t)$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von $\tilde{H}(R)$, so kann man, wie in (4.2) angegeben, durch Hinzunahme von homogenen Elementen $x_{ij}$, ein minimales homogenes Erzeugendensystem $\bar{\mathscr{A}} = (x_1, \ldots, x_t, x_{ij})$ von $\tilde{H}(\bar{R})$, dem maximalen Ideal von $H(\bar{R})$, erhalten.

Satz 4.7. *Sei $(R, m, k)$ ein 0-dimensionaler Gorensteinring, $\sigma \in 0 : m$, $\sigma \neq 0$ und $\bar{R} = R/\sigma R$ und sei $\mathscr{A}$ ein minimales homogenes Erzeugendensystem von $\tilde{H}(R)$. Genau dann besitzt $R$ Masseyoperationen jeder Ordnung und erfüllt $H(R)$ die Bedingung* (S) *bzgl. $\mathscr{A}$, wenn $\bar{R}$ Masseyoperationen jeder Ordnung hat und $H(\bar{R})$ die Bedingung* (S) *für $\bar{\mathscr{A}}$ erfüllt.*

*In diesem Fall gilt:*

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{P_R(X)}{1 - P_R(X) X^2}. \tag{+}$$

Beweis. Es muss lediglich noch die Formel (+) unter den angegebenen Voraussetzungen bewiesen werden. Dazu genügt es, 4.5, b) zu zeigen.

Sei dazu wie oben $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r} = \varkappa\sigma$ mit $\varkappa \neq 0$, $(1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathscr{B}^*$, dann gilt:

$$F_2 = F_{2,0} \cong \bar{F}_{2,0} \oplus k(x_{i_r} \otimes x_1 \ldots x_{i_{r-1}}) = \bar{F}_2 \oplus k(x_{i_r} \otimes x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_r}).$$

Für $l > 0$ hat man

$$F_{2,l} = \bar{F}_{2,l}. \tag{$*$}$$

Es ist klar, dass jedes Element von $\bar{F}_{2,l}$ auch in $F_{2,l}$ liegt. Sei andererseits $y_1 \otimes \ldots \otimes y_{l+2} \in F_{2,l}$ mit $y_i \otimes y_{i+1} \in F_2$, $y_i, y_{i+1} \in \tau(\mathscr{B}^*)$ für $i = 1, \ldots, l+1$. Für ($*$) genügt es nun zu zeigen, dass $y_i \otimes y_{i-1} \neq x_{i_r} \otimes x_1 \ldots x_{i_{r-1}}$.

Für $i \leqslant l$ ist es klar, da sonst nach Definition von schlechten Elementen $r = 2$ folgen, und es damit ein Element $u \in \mathscr{B}^*$ geben würde, so dass $x_1 \otimes u$ schlecht wäre.

Sei also $i = l+1$ und angenommen, es sei

$$y_1 \otimes \ldots \otimes y_{l+2} = y_1 \otimes \ldots \otimes y_l \otimes x_{i_r} \otimes x_1 \ldots x_{i_{r-1}} \in F_{2,l}.$$

Dann wäre aber $y_l$ primär und damit $y_l \otimes x_1 \ldots x_{i_r} \in G(2)$, da

$$y_l \otimes x_{i_r} \in F_2.$$

$y_l \otimes x_1 \ldots x_{i_r}$ ist aber ein Rand und daher nicht gut.

Insgesamt erhalten wir somit

$$P_{\overline{H(R)}}(X, Y) = \frac{1}{1-H_{\tilde{H}(R)}(Y)X+\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i H_{F_{2,i-2}}(Y)(X^i+X^{i-1})-Y^n X^2}$$

und daher

$$P_{\overline{H(R)}}(X, Y) = \frac{P_{H(R)}(X, Y)}{1-P_{H(R)}(X, Y)\, Y^n X^2}.$$

Als eine Anwendung von (4.7) ergibt sich:

LEMMA 4.8. *Sei $R$ ein 0-dimensionaler Gorensteinring mit* $\dim m/m^2 = n>1$, $\sigma \in 0 : m$, $\sigma \neq 0$ und $\bar{R} = R/\sigma R$. *Dann sind äquivalent:*

a) *$R$ besitzt Masseyoperationen jeder Ordnung und $H_i(R)H_j(R) = 0$ für $i+j \neq n$.*

b) *$\bar{R}$ ist Golod-Ring.*

*In diesem Fall gilt:*

$$P_{\bar{R}}(X) = \frac{P_R(X)}{1-P_R(X)X^2}.$$

BEISPIELE. 1) Das Resultat von Wiebe [14] ist in (4.8) enthalten.

2) Von Gulliksen und Negård [8] stammt das Beispiel von Gorensteinidealen der Höhe 4, die von $(n-1)\times(n-1)$-Minoren einer $n\times n$-Matrix erzeugt werden. Für $n\geqslant 3$ sei $\tilde{R}_n = k[\![X_{ij}]\!]_{i,j=1,\dots,n}$ und $\Delta_n$ das von den $(n-1)\times(n-1)$-Minoren von $(X_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ erzeugte Ideal.

Teilt man nun $\tilde{R}_n/\Delta_n$ durch eine reguläre Folge der Länge $n^2-4$ von homogenen Elementen in $m\setminus m^2$ ($m$ bezeichne das maximale Ideal in $\tilde{R}_n/\Delta_n$), so erhält man Gorensteinringe $R_n$ mit $\dim H_1(R_n) = n^2$, $\dim H_2(R_n) = 2n^2-2$, $\dim H_3(R_n) = n^2$ und $\dim H_4(R_n) = 1$. Durch Nachrechnen erhält man (vgl. [13]), dass 4.8 a) erfüllt ist. Für den reduzierten Ring $R_n$ erhält man unter Verwendung von 4.2 b)

$$P_{R_n}(X) = \frac{(1+x)^4}{1-(n^2+1)X^2-(2n^2+2)X^3-(n^2+6)X^4-4x^5}$$

und daher

$$P_{R_n}(X) = \frac{(1+x)^4}{1-n^2X^2-(2n^2-2)x^3-n^2X^4+X^6}.$$

## Literatur

[1] L. L. Avramov, *On the Hopf-algebra of a local ring*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. Tom. 38 (2) (1974), S. 253–277; Mat. USSR Izv. 8 (1974), S. 259–284.

[2] — and E. S. Golod, *Homology algebra of the Koszul complex of a local Gorenstein ring*, Mat. Zametki 9 (1971), S. 53–58; Math. Notes 9 (1971), S. 30–32.

[3] R. Fröberg, *Determination of a class of Poincaré series*, Math. Scand. 37 (1975), S. 29–39.



[4] F. Ghione and T. H. Gulliksen, *Some reduction formulars for the Poincaré series of modules*, Preprint Series, 1974, Universitetet i Oslo, Oslo.

[5] E. S. Golod, *On the homology of some local rings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962), S. 479–482; Soviet Mat. Dokl. 3 (1962), S. 745–748.

[6] T. H. Gulliksen, *Massey operations and the Poincaré series of certain local rings*, J. Algebra 22 (1972), S. 223–232.

[7] — and G. Levin, *Homology of local rings*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 20, Queen's University Kingston, Ont., 1969.

[8] — and O. G. Negård, *Un complexe résolvant pour certains idéaux déterminantiels*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 274 (1972), S. 16–18.

[9] G. Scheja, *Über die Bettizahlen lokaler Ringe*, Math. Ann. 155 (1964), S. 155–172.

[10] J. Shamash, *The Poincaré series of a local ring*, J. Algebra 12 (1969), S. 453–470.

[11] — *The Poincaré series of a local ring II*, J. Algebra 17 (1971), S. 1–18.

[12] — *The Poincaré series of a local ring* IV, J. Algebra 19 (1971), S. 116–124.

[13] M. Steurich, *Über die Poincaré-Reihen einer speziellen Klasse von Ringen*, Dissertation an der Universität Essen — GHS,

[14] H. Wiebe, *Über homologische Invarianten lokaler Ringe*, Math. Ann. 179 (1969), S. 257–274.

FACHBEREICH 6 — MATHEMATIK
UNIVERSITÄT ESSEN — GHS
Essen

*Accepté par la Rédaction le 14. 4. 1977*