a point $a \in A$. For each $g \in G$, let h_g denote a homeomorphism of A onto g which takes a to 0. Assume that φ permutes the elements of G and defines the homeomorphism $\hat{\varphi}$ induced by φ by $\hat{\varphi}(x) = h_{\varphi(g)}h_g^{-1}(x)$ for all $x \in g$ and $g \in G$.

The homeomorphism $\hat{\varphi}$ is period i. We will now define a period 2 homeomorphism r on M and the product $\hat{\varphi}r$ will be the desired period $2i$ homeomorphism. From each cycle c of φ choose an element g_c, of G which is operated on by c. There may be only one cycle. On each of the elements g_c, r is a period two homeomorphism which fixes only the point 0. On each other element of G, r is the identity.

Now consider $\hat{\varphi}r$. If c is a cycle of order j and $x \in g_c$, then $(\hat{\varphi}r)^j(x) = \hat{\varphi}^j r(x) = r(x)$ and $(\varphi r)^{2j}(x) = r^2(x) = x$. The period of φr must therefore be an even multiple of the order of each cycle of φ. The smallest such integer is $2i$. This completes the proof.

References

[1] B. L. Brechner, *Periodic homeomorphisms on chainable continua*, Fund. Math. 64 (1969), pp. 197–202.

[2] O. H. Hamilton, *Fixed points under transformations of continua which are not connected im kleinen*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), pp. 18–24.

[3] S. Mardešić and J. Segal, *ε-mappings onto polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), pp. 146–164.

[4] R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. XIII, Revised edition, Providence, R. I., 1962.

[5] M. J. Russell, *Monotone decompositions of continua irreducible about a finite set*, Fund. Math. 72 (1971), pp. 255–264.

Accepté par la Rédaction le 15. 11. 1976

Eigentlich operierende Gruppen von Isometrien

by

P. Strantzalos (Athen)

Abstract. It is known that the group $I(X)$ of isometries of a locally compact, connected, metric space X is a locally compact (topological) group (Theorem of van Dantzig–van der Waerden) and that the action $(I(X), X)$ is proper. Both properties hold true also if X has a finite number of (connected) components, but neither of them remains still true, in general, if X has infinitely many components.

In this paper a necessary and sufficient condition is given in order to answer the question, when a subgroup of $I(X)$ is a locally compact group, which acts properly on X, allthough X may have infinitely many components. In the proof of the corresponding result is the Theorem of van Dantzig–van der Waerden not used, so that the main result is a strict generalization of this theorem.

As a corollary is shown, that the aforementioned two properties of $I(X)$ are valid, if the space $\bar{Z}(X)$ of the components of X is compact; this assertion does not hold (in general) in the absence of the compactness of $\bar{Z}(X)$. Further, it is indicated how the theories of non-compact proper actions on connected spaces and on spaces with infinitely many components are related.

Einleitung. Fragen über Gruppen von Isometrien lokal-kompakter, metrischer Räume stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der Untersuchung der eigentlichen Transformationsgruppen [16; Kor. 5.2]. Es ist bekannt, daß die Gruppe der Isometrien eines derartigen Raumes mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten eine lokal-kompakte (topologische) Gruppe ist, die eigentlich auf diesem Raum operiert [15; Lemma 2]. Durch Beispiele wird gezeigt, daß (im allgemeinen) weder die Gruppe der Isometrien lokal-kompakt ist (vgl. 2.1) noch die lokal-kompakten Untergruppen davon eigentlich auf dem Raum operieren, wenn dieser Raum unendlich viele Zusammenhangskomponenten hat (vgl. 2.2). Die daraus resultierende Frage nach der Untergruppen der Gruppe der Isometrien eines derartigen Raumes, die eigentlich auf diesem Raum operieren (und damit notwendigerweise lokal-kompakt nach 1.3 sind), wird durch eine notwendige und hinreichende Bedingung beantwortet (vgl. 2.4). Folgerung des entsprechenden Satzes, die den Satz von van Dantzig–van der Waerden (echt) verallgemeinert, ist die nachfolgende Aussage:

I. *Sei X ein lokal-kompakter, metrischer Raum mit kompaktem Raum von Zusammenhangskomponenten* $\bar{Z}(X)$; *dann ist die Gruppe der Isometrien* $I(X)$ *von* X *eine lokal-kompakte topologische Gruppe, die eigentlich auf* X *operiert* (*vgl.* 2.5); *das gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn* $\bar{Z}(X)$ *nicht kompakt ist.*

Die Ausführungen dieser Arbeit stellen nicht nur den ersten Vorstoß dar für die Untersuchung der eigentlichen Aktionen auf Räumen mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten (bzw. für die Untersuchung der Gruppe der Isometrien derartiger Räume), sondern sie geben auch Anlaß, die Theorien der eigentlichen Aktionen auf zusammenhängenden Räumen und auf Räumen mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten zu vergleichen (vgl. § 3): Es stellt sich heraus, daß beide Theorien nicht zusammenhangslos sind; ein Beiprodukt dieser Betrachtungen ist die Aussage 3.1, in der die Gruppe $BH(X)$ der Biholomorphismen eines beschränkten Gebietes $X\subset C^n$, $n>1$, bezüglich ihrer Kompaktheit untersucht ist; dabei spielt die Endenkompaktifizierung X^+ von X (vgl. [1; 2]) und das Hauptresultat von [4] eine zentrale Rolle. Genauer: Es wird folgendes benutzt:

II. *Sei $X\subset C^n$ mit $n>1$ ein beschränktes Gebiet und $\tilde{X}\subset C^n$ das Gebiet, das aus X und aus den kompakten Zusammenhangskomponenten K_i von C^n-X besteht; dann gilt:*

(a) *X^*, der Quotientenraum, der aus C^n durch Identifizieren eines jeden K_i und der unbeschränkten Zusammenhangskomponenten Z von C^n-X zu einem Punkt ensteht, ist zu X^+ homöomorph* [3; 2.2, 2.5 (e)].

(b) *Die Einschränkungsabbildung $BH(\tilde{X})\ni g\mapsto (g\,|\,X)\in BH(X)$, falls $g(X)=X$, ist ein Isomorphismus von Lie-Gruppen* [4; Satz 2].

1. Aktionen auf Räumen mit nur endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Sei X ein lokal-kompakter, metrischer Raum und $I_d(X)$ die Gruppe der Isometrien von X bezüglich der (zulässigen) Metrik d auf X versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Der Satz von van Dantzig–van der Waerden besagt:

1.1. *$I_d(X)$ ist eine lokal-kompakte (topologische) Gruppe, falls X (wie oben) endlich viele Zusammenhangskomponenten hat; wenn X kompakt ist, ist $I_d(X)$ ebenfalls kompakt.*

Der wesentliche Teil des Beweises dieses Satzes ist dem Beweis der Behauptung gewidmet, daß

$$(\{x\},U_y):=\{f\in I_d(X):\ f(x)\in U_y\}$$

relativ-kompakt in $I_d(X)$ ist, wobei U_y eine geeignete kompakte Umgebung von $y\in X$ ist (vgl. [12; I, Cor. 4.9]). Das ist auch wesentlich um folgendes zu zeigen:

1.2. *Unter der Voraussetzungen von* 1.1 *operiert $G<I_d(X)$ genau dann eigentlich auf X, wenn G abgeschlossen (also lokal-kompakt) ist.*

Der Beweis folgt aus der Tatsache, daß $I_d(X)$ eigentlich auf X operiert [15; Lemma 2] und aus der nachfolgenden Aussage:

1.3. *Jede Gruppe G, die eigentlich auf einem lokal-kompakten Raum X operiert ist lokal-kompakt.*

Beweis. Aus der Eigentlichkeit der Aktion folgt, daß jeder Orbit $G(x)$ abgeschlossen in X also lokal-kompakt ist und daß die Abbildung $G\to G(x)\subset X$ mit $G\in g\ \mapsto\ gx\in X$ eigentlich ist [6; III, § 4, No 2, Prop. 4a)]; daraus und aus [6; I, § 10, No 3, Prop. 7] folgt die Behauptung.

1.4. Bemerkung. Bezüglich des Zusammenhangs der Theorien der eigentlichen Aktionen auf X und der Gruppen $I_d(X)$ sei neben [16; Kor. 5.2] folgendes bemerkt:

1.4.1. *Jede eigentliche Aktion (G,X) mit parakompaktem Orbitraum X/G ist einer Aktion durch Isometrien von X bezüglich einer geeigneten Metrik auf X (äquivariant-) äquivalent* [13; I, 4, Th. 3].

Andererseits gilt folgendes:

1.4.2. *Sei $G<I_d(X)$ und $G(x)$ abgeschlossen in X für jedes $x\in X$; dann ist X/G metrisierbar also, insbesondere, parakompakt.*

Eine zulässige Metrik auf X/G wird durch $\tilde{d}(G(x),G(y)):=d(G(x),G(y))$ (vgl., [14; p. 319]) definiert.

2. Aktionen auf Räumen mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten. Wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von X nicht endlich ist, gelten die Aussagen 1.1, 1.2 im allgemeiner nicht mehr, wie es aus den nachfolgenden Beispielen hervorgeht:

2.1. Beispiel. Sei $\boldsymbol{Z}$ der diskreter Raum der ganzen Zahlen und $H(\boldsymbol{Z})$ die Gruppe der Homöomorphismen von $\boldsymbol{Z}$ mit der kompakt-offenen Topologie; bezüglich der Metrik d auf $\boldsymbol{Z}$ mit $d(x,y)=1$ für $x\neq y$ gilt $I_d(\boldsymbol{Z})=H(\boldsymbol{Z})$. $H(\boldsymbol{Z})$ ist zwar eine topologische Gruppe [5; 5, Th. 4] aber nicht lokal-kompakt: Sei $f\in H(\boldsymbol{Z})$; eine Umgebungsbasis von f besteht aus Mengen der Gestalt

$$(\{z_1,\ldots,z_k\},\{z_{k+1},\ldots,z_m\})$$

und jede derartige Menge enthält eine geeignete Folge von Translationen einer unendlichen Untermenge von $\boldsymbol{Z}-\{z_1,\ldots,z_m\}$; da die Konvergenz in $I_d(\boldsymbol{Z})$ mit der punktweisen Konvergenz übereinstimmt, gibt es in der betrachtenden Menge Folgen, die keine konvergende Teilfolge enthalten; daraus und aus der Tatsache, daß $H(\boldsymbol{Z})$ metrisierbar ist [7; X, 3.1, Cor.], folgt die Behauptung.

2.2. Beispiel. Sei $f\in H(\boldsymbol{Z})$ mit $f(z)=z+1$ für $z\neq -1,0$, $f(-1)=1$ und $f(0)=0$; ferner sei $G=\{f^z:\ z\in\boldsymbol{Z}\}$; G ist dann eine diskrete also lokal-kompakte Untergruppe von $H(\boldsymbol{Z})$: $(\{1\},\{n+1\})\cap G$ ist eine Umgebung von f^n in G, die einpunktig ist. Die lokal-kompakte Gruppe $G<I_d(\boldsymbol{Z})$ operiert nicht eigentlich auf $\boldsymbol{Z}$ wegen des Fixpunktes 0 der Aktion.

2.3. Bemerkung. Für den Raum X sei Z_x die Zusammenhangskomponente von $x\in X$; ferner sei $M\subset X$ und $Z(M):=\bigcup_{x\in M}Z_x$ und $\bar{Z}(M):=Z(M)/_\sim$, wobei $x\sim y$ genau dann gilt, wenn $Z_x=Z_y$; $\bar{Z}$ heißt der *Raum der Zusammenhangskomponenten von M in X.* Im Beispiel 2.2 tritt folgende Situation auf: Es gibt Punkte $x=y=0$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt keine Umgebung U_y von y derart, daß $((\{x\},U_y)\cap G)(z)$ (:Orbit von z bezüglich der Untermenge $(\{x\},U_y)\cap G$ von G) relativ-kompakt bis auf einige Punkte $z\in M$ ist, wobei $\bar{Z}(M)$ kompakt ist. Diese Bemerkung liefert eine Motivation für den nachfolgenden Satz:

2.4. SATZ. *Sei X ein lokal-kompakter, metrischer Raum und $G<I_d(X)$ eine (topologische) Gruppe. G operiert genau dann eigentlich auf X, wenn folgendes gilt: Für jedes $(x, y) \in X \times X$ gibt es eine Umgebung $U_y := U_{(x,y)}$ und eine Menge $M_{(x,y)} := M \subset X$ derart, daß*

(a) $D_{(x,y)}(z) := D(z) := ((\{x\}, U_y) \cap G)(z)$ *relativ-kompakt für $z \in X-M$ ist, und*

(b) $\bar{Z}(M)$ *kompakt ist.*

Insbesondere ist dann G lokal-kompakt (vgl. 1.3).

2.5. KOROLLAR. *Sei X lokal kompakt und metrisierbar, so daß $\bar{Z}(X)$ kompakt ist; dann operiert die Gruppe $G<I_d(X)$ genau dann eigentlich auf X, wenn sie abgeschlossen in $I_d(X)$ ist. Insbesondere ist $I_d(X)$ dann lokal-kompakt.*

Aus diesem Korollar, aus 1.1, aus 1.2 und aus den Beispielen 2.1, 2.2 folgt die Aussage I aus der Einleitung.

2.6. Bemerkungen. (a) In dem Beweis des Satzes wird der Satz 1.1 nicht benutzt, so daß dieser Satz eine echte Verallgemeinerung des Satzes von van Dantzig–van der Waerden ist.

(b) Wesentlicher Teil des Beweises des Satzes 2.4 ist folgendes:

2.7. LEMMA. *Sei $F \subset I_d(X)$ und $L(F) := \{x \in X: F(x)$ ist relativ-kompakt in $X\}$; dann ist $L(F) \subset X$ offen-abgeschlossen.*

Beweis. Sei W_η eine η-Nachbarschaft in der durch d auf X induzierten uniformen Struktur; ferner sei $\overline{F(x_0)}$ kompakt, $L(F) \neq \emptyset$ (denn sonst ist die Behauptung trivial) und U eine kompakte Umgebung von $\overline{F(x_0)}$; dann gibt es nach [6; II, § 4, No 3, Prop. 4] ein $\eta>0$ derart, daß $W_\eta(\overline{F(x_0)}) \cap W_\eta(X-U) = \emptyset$; da $d(gx, gx_0)<\eta$ aus $d(x, x_0)<\eta$ folgt, gilt $\overline{F(x)} \subset U$ für jedes $x \in V$, wobei V eine η-Umgebung von x_0 ist; da $\overline{F(x)}$ kompakt ist, folgt daraus, daß $L(F)$ offen ist. Nun sei C eine kompakte 3η-Umgebung von $y \in \overline{L(F)}$; dann gibt es eine Folge $x_n \to y$ aus Punkten von $L(F)$; sei x_m derart, daß $d(x_m, y)<\eta$ und C^* eine η-Umgebung von y; dann ist $P^* := \{f(C^*): f \in F\}$ gleichzeitig eine offene Überdeckung von $\overline{F(y)}$ und von $\overline{F(x_m)}$; wegen der Kompaktheit von $\overline{F(x_m)}$ gibt es endlich viele $f_i \in F$, $i = 1, \ldots, k$ derart, daß $P_m^* := \{f_i(C^*): i = 1, \ldots, k\}$ eine Überdeckung von $\overline{F(x_m)}$ ist; dann ist die Menge $P_m := \bigcup_{i=1}^{k} f_i(C)$ eine kompakte Umgebung von $\overline{F(y)}$. Für jedes $z \in \overline{F(y)}$ gibt es ein $f \in F$ mit $d(z, f(y))<\eta$ also gilt:

$$d(z, f(x_m)) \leqslant d(z, f(y)) + d(f(y), f(x_m)) < 2\eta ,$$

d.h. $z \in P_m$. Daraus folgt, daß y in $L(F)$ liegt also daß $L(F)$ abgeschlossen ist.

2.8. Beweis des Satzes. Sei (G, X) eigentlich und $x, y \in X$; dann gibt es Umgebungen U_x, U_y derart, daß $(U_x, U_y) \cap G$ relativ-kompakt ist [14; 1.2.9. (1)]; da X lokal-kompakt ist und G (uniform) gleichgradig-stetig ist, bedeutet das nach

dem Satz von Ascoli [7; X, 2.5, Cor. 3], daß $((U_x, U_y) \cap G)(z)$ relativ-kompakt für jedes $z \in X$ ist; daraus und aus $(\{x\}, U_y) \subset (U_x, U_y)$ folgt die Notwendigkeit.

Umgekehrt, seien die Bedingungen des Satzes erfüllt und sei $z \in M$ derart, daß $D(z)$ nicht relativ-kompakt ist; sei $a \in D(z)$ und V_a eine kompakte Umgebung von a; schließlich sei $D^* = (\{z\}, V_a) \cap D$ und $L(D^*)$ wie in 2.7; dann ist $L(D^*)$ offen-abgeschlossen nach 2.7 und enthält echt $L(D)$ $(z \in L(D^*)-L(D))$; daraus folgt insbesondere, daß $L(D^*)$ volle Zusammenhangskomponenten enthält, d.h. daß $L(D^*)$ saturiert bezüglich der Relation $\sim$ aus 2.3 ist also daß $p(L(D^*))$ offen ist, wobei $p\colon X \to \bar{Z}(X)$ die natürliche Abbildung ist. Wegen der Kompaktheit von $\bar{Z}(M)$ gibt es endlich viele D_i^*, $i = 1, \ldots, r$ der Art von D^* oben mit der Eigenschaft $L(D_i^*) \subsetneqq L(D_{i+1}^*)$, $L(D_r^*) = X$; daraus und aus dem Satz von Ascoli folgt, daß $D_r^* = \bigcap_{i=0}^{r} D_i^*$ (mit $D_0^* = D^*$) relativ-kompakt in G ist. Jedem D_i^* entsprechen nach Konstruktion ein $z_i \in X-L(D_{i-1}^*)$, ein $a_i \in D_{i-1}^*(z_i)$ und eine kompakte 3μ-Umgebung V_{a_i} von a_i; wie im Beweis von [15; Lemma 2] gibt es Umgebungen P_i, Q_i von z_i bzw. a_i mit $(P_i, Q_i) \subset (\{z_i\}, V_{a_i})$; eventuell durch Bildung von Durchschnitten von P_i kann man erreichen, daß $\{f \in G: f(P_j) \subset Q_j, j = 0, \ldots, t\} \subset D_r^*$ gilt; da P_0 bzw. Q_0 eine Umgebung von x bzw. von y ist, ist $P_x = \bigcup_{i=0}^{t} P_i$ bzw. $Q_y = \bigcup_{i=0}^{t} Q_i$ eine Umgebung von x bzw. y; da jedes $f \in G$ eine Isometrie ist und die P_j's als disjunkt vorausgesetzt werden können, kann man sogar erreichen, daß $(P_x, P_y) \subset D_r^*$ gilt; daraus folgt, daß (G, X) eigentlich ist, und der Satz ist bewiesen.

2.9. Beweis des Korollars. Seien $x, y \in X$ vorgegeben. Falls $y \in X-\overline{G(x)}$ gilt, gibt es eine Umgebung U_y von y mit $(\{x\}, U_y) \cap G = \emptyset$. Falls das nicht der Fall ist, gibt es eine kompakte Umgebung U_y von y derart, daß $(\{x\}, U_y) \cap G = D \neq \emptyset$. Auf jeden Fall ist $D(x) \subset U_y$ relativ-kompakt. Sei $M = X-L(D)$ (Bezeichnung wie in 2.8); da $L(D)$ offen und saturiert bezüglich $\sim$ aus 2.3 ist, ist $\bar{Z}(M)$ abgeschlossen in $\bar{Z}(X)$ und somit kompakt. Die Behauptung folgt daraus und aus dem Satz 2.4.

3. Beziehung der Theorien der eigentlichen Aktionen auf Räumen mit nur endlich vielen und mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten. Wie in der Einleitung steht, ist der Satz 2.4 nicht nur ein erster Schritt, die eigentlichen Aktionen auf Räumen mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten genauer zu untersuchen, sondern er kann dazu beitragen, mehr Informationen über eigentliche Aktionen auf zusammenhängenden Räumen zu erhalten, wie es im folgenden erklärt wird. Es wäre natürlich wichtig, wenn diese Informationen sich auf Fälle beziehen, über die die bisherige Theorie relativ wenig aussagen kann; so ein Fall ist jener, in dem nur ein Grenzpunkt auftritt; in diesem Fall kann man im allgemeinen keine Aussagen über die Struktur der nicht kompakten, lokal-kompakten Gruppe G machen, wenn nur die Voraussetzung vorliegt, daß bei der eigentlichen Aktion (G, X) nur ein Grenzpunkt auftritt: Jede derartige Gruppe G, die eigentlich auf einem (notwendigerweise nicht kompakten) Raum Y operiert, operiert auch eigentlich auf dem Raum $X = \boldsymbol{R} \times Y$, wobei jetzt X nur ein Ende hat also die Aktion (G, X) nur einen Grenzpunkt hat (vgl. [9; 3]).

Es sind also zusätzliche Voraussetzungen nötig; eine davon ist, daß $X^+ - X$ (: Endenraum) unendlich ist, und so kommen wir zu den zwei nachfolgenden Fällen:

(a) *Sei (G, X) eine eigentliche Aktion, wobei G eine lokal-kompakte, nicht kompakte Gruppe und X ein lokal-kompakter (nicht kompakter) Raum ist, der die Eigenschaft Z hat* [1]: Jede kompakte Menge ist in einer zusammenhängenden und kompakten Menge enthalten (insbesondere ist dann X zusammenhängend); *ferner sei Q, die Menge der Grenzpunkte* (: [2; 6.1]), *einpunktig und $X^+ - X$ unendlich-abzählbar*; dann läßt sich diese Aktion auf einer Aktion (G, X^+) fortsetzen [1; 2.3], wobei die Aktion (G, P) mit $P = (X^+ - X) - Q$ eigentlich ist [1; 4.7]. Da $X^+ - X$ abzählbar ist, enthält $X^+ - X$ einen isolierten Punkt z (sonst wäre $X^+ - X$ perfekt, kompakt, total-unzusammenhängend und metrisierbar [10; VI, Th. 42] also dem Cantorschen Diskontinuum $\boldsymbol{D}$ homöomorph); $G(z) \subset X^+ - X$ ist (zu G/G_z homöomorph) homogen und nicht kompakt (der Grenzpunkt kann nicht isoliert sein [1; 4.11.6]) also zu $\boldsymbol{Z}$ homöomorph. Sei K der Ineffektivitätskern der eigentlichen Aktion $(G, G(z))$; dann operiert $H = G/K$ eigentlich und effektiv auf $\boldsymbol{Z}$, *womit G Erweiterung von K (normal) nach $H < H(\boldsymbol{Z})$ ist.* Hier liegt also eine Situation vor, in der die ursprüngliche Aktion (G, X) im allgemeinen keine Information über G liefert, während die Aktion von G auf dem Raum $G(z)$, der unendlich viele Zusammenhangskomponenten hat, mehr informativ ist. Daraus ist ersichtlich, daß die Theorien der eigentlichen Aktionen auf zusammenhängenden Räumen und auf Räumen mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten nicht zusammenhangslos sind. Das folgt auch aus dem Fall (b), in dem die Menge Q der Grenzpunkte einer eigentlichen Aktion (G, X) die Rolle von $X^+ - X$ spielt:

(b) *Sei Q einpunktig und $X^+ - X$ unendlich und nicht abzählbar. Falls $X^+ - X$ isolierte Punkte enthält, entspricht die Situation jener des Falles* (a). *Falls $X^+ - X$ perfekt ist (d. h. keine isolierte Punkte enthält), ist $X^+ - X$ dem Cantorschen Diskontinuum D homöomorph und G ist (topologische) Erweiterung einer kompakten Gruppe K (normal) nach einer Untergruppe $H < H(\boldsymbol{D}^*)$, wobei $\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D} - \{Punkt\}$* (vgl. Fall (a)).

Als Anwendung von (a) und (b) wird folgendes bewiesen:

3.1. PROPOSITION. *Sei X wie in der Aussage* II *aus der Einleitung, wobei kompakte Zusammenhangskomponenten K_i von $\boldsymbol{C}^n - X$ existieren; dann gilt:*

(a) *Die Gruppe* $\mathrm{BH}(X)$ *der Biholomorphismen von X (kompakt-offene Topologie) ist entweder kompakt oder (topologische) Erweiterung einer normalen, kompakten Lie-Gruppe K nach einer unendlich-abzählbaren, diskreten Gruppe, die mit endlichen Isotropiegruppen auf $\boldsymbol{Z}$ operiert.*

(b) $\mathrm{BH}(X)$ *ist kompakt, wenn die Anzahl der K_i's endlich ist bzw. wenn die K_i's nicht gegen die nicht beschränkte Zusammenhangskomponente Z von $\boldsymbol{C}^n - X$ konvergieren (konvergieren heißt dabei folgendes: Es gibt Punkte $x_i \in \overline{K}_i$ mit $x_i \to x_0 \in \overline{Z}$).*

Beweis. (a) Nach der Aussage II. (a) aus der Einleitung gilt $X^* = X^+$; andererseits ist bekannt, daß es genau eine nicht beschränkte Zusammenhangskomponente von $\boldsymbol{C}^n - X$ gibt [8; XVII, 1.2, (2)]. Sei $k_i \in X^+ - X$ der Punkt, der zu K_i entspricht; dann operiert $\mathrm{BH}(X)$ eigentlich auf $X^+ - \{z\}$, wobei z der Punkt ist, der zu Z entspricht (vgl. Aussage II.(b) aus der Einleitung und [15; Lemma 2] mit der Bemerkung, daß die Bergmansche Metrik auf einem beschränkten Gebiet $Y \subset \boldsymbol{C}^n$ $\mathrm{BH}(Y)$-invariant ist). Daraus folgt, daß z der einzige Grenzpunkt der Aktion $(\mathrm{BH}(X^+ - \{z\}), X^+ \sim \{z\})$ ist, womit hier eine der Fälle (a), (b) aus diesem Paragraphen anwendbar ist, falls $\mathrm{BH}(X)$ nicht kompakt ist.

Im Falle (a), d. h. wenn die K_i's unendlich-abzählbar sind, ist $\mathrm{BH}(X)$ Erweiterung einer kompakten Lie-Gruppe K [11; p. 181, (C)] nach einer diskreten Untergruppe $H < H(\boldsymbol{Z})$ ist. H operiert eigentlich auf $\boldsymbol{Z}$ nach [14; 1.3.2] und das gilt genau dann, wenn die Aktion $(H, \boldsymbol{Z})$ endliche Isotropiegruppen hat: Einerseits ist jede Isotropiegruppe einer eigentlichen Aktion kompakt und andererseits ist $(\{z_1\}, \{z_2\}) \cap H$ endlich nach dem Satz 2.4 (diskret und kompakt nach dem Satz von Ascoli), woraus leicht die Behauptung folgt.

Dasselbe gilt auch im Falle (b), weil die entsprechende Gruppe H wieder diskret ist: Sie ist eine Lie-Gruppe und total-unzusammenhängend (:$G = \mathrm{BH}(X)$) operiert eigentlich auf $(X^+ - X) - \{z\}$, womit G/K eigentlich und effektiv auf diesem total-unzusammenhängenden Raum operiert; sei H_0 die Einskomponente von $H = G/K$; dann ist H_0 in jeder Isotropiegruppe enthalten und somit trivial).

(b) Im vorigen Teil des Beweises ist folgende Situation ausgenutzt: $\mathrm{BH}(X)$ operiert eigentlich auf $(X^+ - X) - \{z\}$, womit z Häufungspunkt eines jeden Orbits der Aktion ist [1; 4.11.6]; insbesondere ist z Häufungspunkt eines jeden Orbits in $(X^+ - X) - \{z\}$, woraus die Behauptung folgt.

3.2. Schlußbemerkung. Aus den Fällen (a), (b) folgt, daß es interessant ist, die nicht kompakten Untergruppen von $H(\boldsymbol{Z})$ bzw. $H(\boldsymbol{D}^*)$ zu untersuchen, die eigentlich auf $\boldsymbol{Z}$ bzw. $\boldsymbol{D}^*$ operieren.

Literatur

[1] H. Abels, *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Commentarii Math. Helv. 47 (1972), ss. 457–473.

[2] — *Specker-Kompaktifizierungen von lokal kompakten topologischen Gruppen*, Math. Z. 135 (1974), ss. 325–361.

[3] — *Enden von beschränkten Gebieten*, Archiv. Math. 29 (1977), ss. 166–172.

[4] — *Eine Bemerkung zum Kugelsatz von Hartogs und Gruppen von Biholomorphismen*, to appear.

[5] R. Arens, *Topologies for homeomorphism groups*, Amer. J. Math. 68 (1946), ss. 593–610.

[6] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Ch. 1–4, Hermann, Paris 1971.

[7] — *Topologie Générale*, Ch. 5–10, Hermann, Paris 1974.

[8] J. Dugundji, *Topology*, Allyn-Bacon, Boston 1966.

[9] H. Freudenthal, *Enden topologischer Räume und Gruppen*, Math. Z. 33 (1931), ss. 692–713.

[10] J. R. Isbell, *Uniform Spaces*, Math. Surveys No 12, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1964.

[11] W. Kaup, *Some remarks on the automorphism groups of complex spaces*, Rice Univ. Studies 56 (1970), ss. 181–186.

[12] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience, New York 1963.
[13] J. L. Koszul, *Lectures on Groups of Transformations*, Tata Institute, Bombay 1965.
[14] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math. 73 (1961), ss. 295–323.
[15] P. Strantzalos, *Dynamische Systeme und topologische Aktionen*, Manuscripta Math. 13 (1974), ss. 207–211.
[16] — *Kompaktheitseigenschaften der Gruppe der Isometrien metrischer Räume*, to appear. in Archiv. Math.

UNIVERSITÄT ATHEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Accepté par la Rédaction le 8. 12. 1976