[3] K. Morita, *On bicompactifications of semibicompact spaces*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4 (1952), pp. 200–207.
[4] — *Topological completions and M-spaces*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 10 (1970), pp. 45–66.
[5] — *On images of an open interval under closed continuous mappings*, Proc. Japan Acad. 32 (1956), pp. 15–19.
[6] T. Terada, *On countable discrete compactifications*, Gen. Top. and Appl. 7 (1977), pp. 321–327.
[7] L. Zippin, *On semicompact spaces*, Amer. J. Math. 57 (1935), pp. 327–341.
[8] T. Hoshina, *Compactifications by adding a countable number of points*, Proc. 4th Prague Top. Symp. 1976, pp. 168–169.

Accepté par la Rédaction le 27. 12. 1976

Chaînes de théories universelles

par

Maurice Pouzet (Villeurbanne)

Résumé. Une théorie universelle T (théorie engendrée par des énoncés universels) est dite *irréductible* lorsque T n'est pas l'intersection de deux théories universelles distinctes de T. Nous prouvons que étant données deux théories universelles T et T' d'un langage comportant au plus des prédicats et des constantes, si toute chaîne (pour l'inclusion) de théories universelles irréductibles comprises entre T et T' est au plus dénombrable alors toute suite croissante de telles théories est stationnaire.

Introduction

Divers auteurs ont étudié (ou seulement utilisé) des conditions de chaînes analogues à celles intervenant dans la théorie classique des idéaux, mais concernant certains ensembles d'énoncés ou certaines classes de structures. C'est le cas notamment de A. Robinson (qui les étudie d'un point de vue essentiellement algébrique, voir par exemple les chapitres VII et VIII de [20]) de A. Malcev (qui les utilise de façon implicite, voir le chapitre 33 de [14]) de R. Fraïssé (dont l'intérêt pour ces questions est lié à sa notion d'abritement, voir [5] et le chapitre 3 de [4]) et, pour des études particulières, de G. Higman, [10] J. B. Kruskal [11] C.S^{t}.J.A. Nash–Williams [16], R. Laver [13].

Il nous a paru intéressant d'entreprendre une étude systématique des conditions de chaînes portant sur les théories universelles (ce cadre d'apparence limité suffisant à exprimer l'essentiel des résultats connus) et plus particulièrement sur celles dont le langage ne comporte pas de fonctions (le cas général nous semblant actuellement trop difficile) avec comme premier objectif une classification de ces théories (en connexion avec le programme suggéré par A. Malcev, voir chapitre 34 § 2 de [14]); Ceci compte tenu d'autres applications, par exemples à des problèmes de décidabilité voir [9] ou d'axiomatisabilité liés à la définissabilité voir [17].

Dans ce texte nous prouvons essentiellement le résultat suivant.

THÉORÈME. *Etant données deux théories universelles T et T' d'un langage comportant au plus des prédicats et des constantes si toute chaîne (pour l'inclusion) de théories universelles irréductibles comprises entre T et T' est au plus dénombrable alors toute suite croissante de telles théories est stationnaire.*

Ce résultat (qui est erroné lorsque le langage comporte des fonctions) est une amélioration d'un précédent [18] donnant une conclusion analogue en supposant plus fortement les théories universelles irréductibles comprises entre T et T' en nombre dénombrable. Amélioration peut être provisoire dans la mesure ou nous ignorons notamment si les théories universelles comprises entre deux théories universelles irréductibles T et T' sont en nombre dénombrable dès que toutes les chaînes de telles théories sont dénombrables.

Le texte est divisé en trois parties. Dans la première partie, après les rappels nécessaires nous donnons quelques résultats élémentaires, mais utiles, concernant les conditions de chaînes.

Dans la deuxième partie, nous donnons la preuve du résultat annoncé en obtenant d'abord une propriété particulière des théories universelles dont le langage ne comporte pas de fonctions, puis en obtenant une propriété de certaines familles d'ensembles.

Enfin dans la troisième partie nous entamons une classification des théories universelles.

I. Préliminaires

Dans cette partie, ainsi que les suivantes, nous considérons un langage du premier ordre L (avec égalité) pouvant comporter des prédicats, des constantes et, sauf spécification contraire, par exemple en II.2, des symboles de fonctions.

I. 1. Types universels et existentiels.

I. 1.1. Nous dirons qu'une formule est *universelle*, respectivement *existentielle*, lorsqu'elle est élémentairement équivalente à une formule qui, sous forme prénexe ne comporte que des quantificateurs universels, respectivement existentiels. Etant donnée une structure M réalisation de L nous appelons *type universel*, respectivement *type existentiel*, respectivement 1-*type de* M l'ensemble des énoncés universels, respectivement existentiels, respectivement combinaisons booléiennes d'énoncés universels et existentiels (à l'équivalence élémentaire près), vrais dans M. Etant données deux structures M et M' réalisations de L nous dirons qu'elles sont 1-*équivalentes* lorsqu'elles ont mêmes type universel, ou ce qui revient au même, ont même type existentiel, ou encore ont même 1-type. Ces définitions s'étendent sans changement aux formules comportant au plus m variables libres (ceci en adjoignant m constantes au langage).

I. 1.2. Il est commode de considérer le treillis distributif U, respectivement E, quotient (par l'équivalence élémentaire) de l'ensemble des énoncés universels, respectivement existentiels, ainsi que l'algèbre de Boole B quotient de l'ensemble des énoncés qui sont (à l'équivalence élémentaire près) des combinaisons booléiennes d'énoncés universels et existentiels. Via le théorème de compacité *les types universels, respectivement existentiels, correspondent aux filtres premiers non triviaux de U, respectivement de E, et les* 1-*types aux ultrafiltres de B*. Par example un ensemble Γ d'énoncés universels, clos pour l'équivalence élémentaire est le type universel d'une structure M si et seulement si son image dans U est un filtre premier non trivial, c'est-à-dire (en identifiant un énoncé avec l'ensemble de ceux qui lui sont élémentairement équivalents) que 1) si $\varphi\in\Gamma$ et $\varphi\to\psi$ alors $\psi\in\Gamma$, 2) si φ et $\psi\in\Gamma$ alors $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$, 3) si $\varphi\vee\psi\in\Gamma$ alors φ ou $\psi\in\Gamma$, 4) $0\notin\Gamma$. *En outre la donnée d'un type détermine les deux autres*; par exemple si Γ est le type universel d'une structure M alors le type existentiel, respectivement le 1-type, de M est l'ensemble des énoncés existentiels, respectivement combinaisons booléiennes d'énoncés universels et existentiels, consistants avec tous les énoncés de Γ.

I. 2. Théories universelles.

I. 2.1. Une théorie T de L est dite *universelle* lorsqu'elle est la clôture (pour la déduction) d'un ensemble d'énoncés universels. Suivant A. Robinson une théorie universelle T est dite *irréductible* lorsque T n'est pas l'intersection de deux théories universelles distinctes de T.

I. 2.2. Relativement au treillis U, l'ensemble des énoncés universels d'une théorie universelle T induit un filtre sur U (et réciproquement). Il revient donc au même de dire que T est irréductible ou que ce filtre est irréductible, ou encore, puisque U est distributif, que ce filtre est premier.

Les propriétés de U retraduites en termes de théorie des modèles conduisent aux énoncés suivants (voir par exemple [2]):

I. 2.3. Proposition. *Etant donnée une théorie universelle (consistante) T il y a équivalence entre les propriétés suivantes*:

(i) *T est irréductible*;

(ii) *Quelles que soient les théories universelles T_1 et T_2, si $T_1\cap T_2$ est incluse dans T alors T_1 ou T_2 est incluse dans T*;

(iii) *Quels que soient les énoncés universels φ et ψ, si $\varphi\vee\psi$ est dans T alors φ ou ψ est dans T*;

(iv) *T est la clôture (pour la déduction) d'un type universel*;

(v) *La classe des modèles de T possède la propriété d'extension commune (Joint-Embedding Property) c'est-à-dire que deux modèles de T s'immergent toujours dans au moins un autre modèle de T.*

I. 2.4. *L'intersection et la réunion de tout ensemble totalement ordonné (pour l'inclusion) de théories universelles irréductibles sont des théories universelles irréductibles.*

Suivant A. Robinson appelons *composant* d'une théorie universelle T toute théorie universelle irréductible, minimale pour l'inclusion parmi celles contenant T.

I. 2.5. *Toute théorie universelle est l'intersection de ses composants.*

I. 3. Chaînes de théories universelles. Les conditions de chaîne croissante lient les propriétés de décomposition avec celles d'axiomatisabilité. L'essentiel, qui résulte des propriétés du treillis U peut être résumé dans l'énoncé suivant:

I. 3.1. PROPOSITION. *Etant donnée une théorie universelle T il y a équivalence entre*:

(i) *Toute suite croissante (pour l'inclusion) de théories universelles contenant T est stationnaire*;

(ii) *Toute théorie universelle contenant T est finiment axiomatisable modulo T*;

(iii) *Toute suite croissante (pour l'inclusion) de théories universelles irréductibles contenant T est stationaire et toute théorie universelle contenant T est intersection d'un nombre fini de théories universelles irréductibles.*

(iv) *Toute théorie universelle irréductible contenant T est finiment axiomatisable modulo T.*

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) et l'implication (i)→(iii) sont classiques. Pour voir que (iii)→(i) remarquer avec I. 2.3(ii) que si deux théories universelles T et T' sont respectivement intersection des théories universelles irréductibles $T_1, \dots, T_i, \dots, T_n$ et $T'_1, \dots, T'_{i'}, \dots, T'_{n'}$ alors T' contient T si et seulement chaque $T'_{i'}$ contient une T_i. Voir ensuite que ce (pré)ordre ainsi défini sur les ensembles finis de théories universelles irréductibles préserve la condition de chaîne croissante (ceci n'est que l'application au treillis des théories universelles d'un résultat de G. Birkhoff concernant les treillis distributifs (voir [1], chapitre VIII, § 2, pp. 182–183).

Pour voir que (iv) implique (ii) il suffit de remarquer que *si une théorie universelle T' (contenant la théorie universelle T) n'est pas finiment axiomatisable modulo T alors elle est contenue dans une théorie universelle irréductible, non finiment axiomatisable modulo T.* Ce fait s'obtient en observant qu'une réunion croissante de théories universelle non finiment axiomatisable modulo T est encore une théorie universelle non finiment axiomatisable modulo T; ce qui, par exemple avec l'axiome de Zorn, donne l'existence d'une théorie maximale parmi celles, non finiment axiomatisables modulo T, qui contiennent T'. Puis en remarquant que cette théorie est irréductible puisque la fini-axiomatisabilité est préservée par intersection finie. (Ceci est, à peu de chose près, la version "syntaxique" du lemme de "la mauvaise suite minimale" de Nash–Williams [15], lemme permettant d'obtenir des exemples de théories satisfaisant les conditions énoncées dans ce théorème).

I. 3.2. *Deux théories universelles T et T' vérifient chacune les conditions de l'énoncé* I. 3.1 *si et seulement si il en est de même de leur intersection $T \cap T'$* (*utiliser* I. 3.1 (iii)). *Par conséquent l'étude de ces théories se ramène à l'étude de celles qui sont irréductibles.*

I. 3.3. EXEMPLES. Pour obtenir des exemples de telles théories, il est à notre avis plus facile d'étudier les ensembles d'énoncés existentiels consistants avec ces théories et lorsque le langage ne comporte qu'un nombre fini de prédicats, d'étudier (ce qui revient au même) leurs classes de modèles finis.

1. Dans ce dernier cas appelons avec R. Fraïssé [3] *multirelations* les réalisations du langage; disons qu'une multirelation M *s'abrite* dans la multirelation M' lorsqu'il existe un isomorphisme de M sur une restriction de M', disons qu'une classe C de multirelations toutes de domaine fini est *close pour l'abritement* lorsque toute multirelation M qui s'abrite dans une multirelation M' de C appartient à C; disons qu'elle est *filtrante pour l'abritement* lorsque deux multirelations de C s'abritent dans au moins une multirelation de C; disons qu'une telle classe est un *âge* lorsqu'elle est à la fois close et filtrante pour l'abritement. Enfin appelons *borne* d'une classe C close pour l'abritement toute multirelation M de domaine fini, minimale pour l'abritement parmi celles n'appartenant pas à C.

2. Une classe close pour l'abritement est exactement la classe des modèles finis d'une théorie universelle. C'est un âge si et seulement si la théorie correspondante est irréductible; elle n'a qu'un nombre fini de bornes (comptées à l'isomorphie près) si et seulement si la théorie correspondante est finiment axiomatisable. (En quelque sorte une telle classe est plutôt la version sémantique de l'ensemble des énoncés existentiels consistant avec une théorie universelle, un âge étant celle de type existentiel.) Par conséquent, l'étude des théories universelles T vérifiant les conditions énoncées en I. 3.1, se ramène à celle des classes C closes pour l'abritement pour lesquelles toute suite décroissante de sous-classes de C, closes pour l'abritement, est stationnaire. Ces classes sont donc celles pour lesquelles l'abritement est un *belordre* (ou partial well ordering) notion qui, depuis G. Higman, a fait l'objet d'études variées (voir par exemple [12]).

3. Compte tenu de cette traduction, voici quelques exemples de théorie T vérifiant les conditions de l'énoncé I. 3.1:

Théorie (universelle) de l'ordre total et plus généralement d'une relation *enchaînable* ou d'une relation *presque enchaînable* (voir la définition en III ci-dessous);

Théorie universelle de la relation de "*consécutivité*" (relation binaire C sur l'ensemble N des entiers vérifiée pour les seuls couples (x, y) pour lesquels $y = x+1$);

Théorie des *arbres ordonnés* (un *arbre ordonné* est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments ayant un majorant commun sont comparables) (résultat dû à J. B. Kruskal [11]); voir enfin [17] et [19] pour d'autres exemples de nature relationniste.

Autres exemples avec des fonctions: Théorie universelle du groupe additif T; Pour un entier n arbitraire, théorie des groupes abéliens dont l'ordre des éléments est au plus n (remarquer que la classe des modèles est déterminée par celle des modèles finis puis utiliser le fait que tout groupe abélien fini est somme directe de groupes cycliques).

I. 3.4. Lorsque le langage ne comporte qu'un nombre fini de prédicat les conditions de chaîne décroissante se réduisent à ceci:

Etant données deux théories universelles T et T' d'un langage ne comportant qu'un nombre fini de prédicats les suites décroissantes de théories universelles comprises *entre T et T' sont stationnaires si et seulement si les théories universelles comprises entre T et T' sont en nombre fini (considérer les classes C et C' des modèles finis de T et T' et remarquer que ceux appartenant à $C-C'$ sont en nombre fini).*

Dans le cas général la situation est beaucoup plus compliquée et nous ne l'étudierons pas ici.

I. 4. Quelques problèmes concernant les théories universelles.

I. 4.1. La similitude entre les propriété (ii) et (iv) conduit à étudier les possibles "transferts" de propriétés des théories universelles aux théories universelles irréductibles. Parmi les propriétés susceptibles d'être vérifiées par les théories contenant une théorie donnée, citons celles-ci:

a) *les suites croissantes sont stationnaires*;
b) *les chaînes sont dénombrables*;
c) *les théories sont en nombre dénombrable*.

I. 4.2. Nous ignorons si, dès qu'une de ces propriétés est vraie pour les théories universelles irréductibles alors elle le reste pour les théories universelles. Lorsque le langage ne comporte qu'un nombre fini de prédicats on voit facilement que ces trois propriétés sont équivalentes pour les théories universelles (nous ignorons si cela s'étend à un langage dénombrable quelconque). Nous ignorons si elles le sont encore pour les théories universelles irréductibles, mais nous allons montrer que b) implique a), et plus fortement le théorème annoncé dans l'introduction.

I. 4.3. Ce théorème est erroné lorsque le langage comporte des fonctions:

Soit L le langage comportant un symbole de fonction s (de poids 1) et une infinité de prédicats unaires $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ Soit T la théorie universelle de la structure $M = (S, (U_n)_{n\in N})$ ayant pour base l'ensemble N des entiers, la fonction S étant la fonction successeur (définie par $S(x) = x+1$) et U_n la relation unaire ne prenant la valeur $+$ que pour les x inférieurs ou égaux à n. En caractérisant les modèles de T, on voit facilement que les théories universelles irréductibles contenant T forment une chaîne $T = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots \subset T_\omega$ dans laquelle T_n est la théorie universelle de la restriction M_n de M à l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n, et T_ω (qui est aussi l'intersection des T_n) est la théorie de la structure $M_\omega = (S, U'_n)$ sur l'ensemble des entiers dans laquelle S est la fonction successeur et les U'_n sont les relations unaires prenant partout la valeur... Pour un autre exemple avec seulement une fonction et un prédicat voir [8].

II. Preuve du théorème

Au lieu de considérer des théories universelles irréductibles nous considérons plutôt les types existentiels. Nous établissons en II. 2.2 une propriété de certaines familles d'ensembles, qui nous permet de conclure en II. 4.

II. 1. Noyau et orbite d'une formule.

II. 1.1. Etant données une structure M, réalisation de L et une formule $\theta(x_1, \ldots, x_m)$, *l'orbite* de cette formule dans M est l'ensemble $O_M\ \theta(x_1, \ldots, x_m)$ des m-uples $(a_1, \ldots, a_m)$ extraits de $|M|$ qui satisfont $\theta(x_1, \ldots, x_m)$, son *noyau* dans M est l'ensemble $N_M\ \theta(x_1, \ldots, x_m)$ égal à l'intersection des ensembles sous-jacents aux m-uples $(a_1, \ldots, a_m)$ extraits de $|M|$ qui satisfont $\theta(x_1, \ldots, x_m)$. C'est donc l'orbite dans M de la formule $\theta'(x)$ égale à

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m(\theta(x_1, \ldots, x_m) \rightarrow x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_m).$$

Disons qu'une théorie T est 1-*complète* lorsque pour tout énoncé universel φ, soit φ soit $\neg\varphi$ est dans T (en d'autres termes T contient un 1-type). Appelons théorie 1-complète de M la théorie engendrée par son 1-type.

II. 1.2. LEMME. *Etant données une théorie* 1-*complète T et une formule libre $\theta(x_1, \ldots, x_m)$, la formule universelle $\theta'(x)$ définie ci-dessus est équivalente, modulo T, à une formule existentielle $\varphi(x)$.*

Preuve. Comme T est 1-complète, soit $\forall x_1 \ldots x_m \neg\theta(x_1, \ldots, x_m)$ est dans T et dans ce cas le résultat est évident (en prenant par exemple la formule $x = x$) et sans intérêt, soit $\exists x_1 \ldots x_m \theta(x_1, \ldots, x_m)$ est dans T et dans ce cas en peut procéder ainsi: soit M un modèle de T: l'ensemble $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ étant l'intersection d'un ensemble non vide d'ensembles finis est fini, par conséquent il existe un nombre fini, soit r, de m-uples

$$\vec{a}_1 = (a_1^1, a_i^1, \ldots, a_m^1), \ldots\ \vec{a}_j = (a_1^j, \ldots, a_i^j, \ldots, a_m^j), \ldots,\ \vec{a}_r = (a_1^r, \ldots, a_i^r, \ldots, a_m^r)$$

satisfaisant chacun $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ et dont l'intersection des ensembles sous-jacents est exactement $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$. Grâce à cela nous pouvons construire une formule existentielle $\varphi(x)$ satisfaite pour les seuls éléments de $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ (cette vérification étant purement technique le lecteur peut l'omettre, mais nous la faisons néammoins). Prenons $m\cdot r$ variables x_i^j (avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant r$) distincts de x prenons pour $\varphi(x)$ la formule suivante:

$$\exists (x_i^j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \Big| \Big(\bigwedge_{j=1,\ldots,r} \theta(x_1^j, \ldots, x_m^j)\Big)\Big(\bigwedge_{\substack{1\leqslant i,i'\leqslant m\\ 1\leqslant j,j'\leqslant r}} \delta(x_i^j, x_{i'}^{j'})\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1,\ldots,r}\ \bigvee_{i=1,\ldots,m} (x = x_i^j)\Big)\Big|$$

dans laquelle $\delta(x_i^j, x_{i'}^{j'})$ est soit la formule $x_i^j = x_{i'}^{j'}$, si a_i^j est égal à $a_{i'}^{j'}$ la formule $\neg(x_i^j = x_{i'}^{j'})$ si a_i^j est différent de $a_{i'}^{j'}$.

Si dans la partie libre de $\varphi(x)$ on remplace les x_i^j par les a_i^j alors la formule obtenue est vraie pour les a de $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ et eux seuls; par conséquent l'orbite de $\varphi(x)$ contient $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$. Pour voir qu'elle lui est égale remarquons que q étant le nombre d'éléments de $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ si les x_i^j sont remplacés par des $a_i'^j$ de $|M|$ satisfaisant la conjonction des $\delta(x_i^j, x_{i'}^{j'})$ alors l'intersection des ensembles sous-jacents aux $\vec{a}'_1 = (a_1'^1, \ldots, a_m'^1), \ldots, a'_r = (a_1'^r, \ldots, a_m'^r)$ a exactement q éléments; en outre si les $a_i'^j$ satisfont la conjonction des $\theta(x_i^j, \ldots, x_m^j)$ cette intersection contient par définition même $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$; par conséquent si ces deux conditions sont satisfaites cette intersection est exactement $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$.

Il en résulte que si les $a_i'^j$ et un élément a remplaçant x satisfont la partie libre de $\varphi(x)$ alors a est dans $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ et donc en définitive que cet ensemble est l'orbite de $\varphi(x)$ dans M.

Montrons maintenant que $\varphi(x)$ est équivalente à $\theta'(x)$ modulo T. Cela revient à montrer dans tout modèle M' de T que l'on a l'égalité $N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m) = O_{M'}\theta(x)$ (du fait que par définition $N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m) = O_M\,\theta'(x)$). Soit donc M' un modèle de T; puisque T est 1-complète, l'orbite $O_{M'}\varphi(x)$ possède q éléments et contient $N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m)$. Pour voir qu'elle lui est égale associons à $N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m)$ une formule $\varphi'(x)$ construite de la même façon que $\varphi(x)$. Comme précédemment $O_{M'}\varphi'(x) = N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m)$ et, de même qu'ici, $O_M\varphi'(x)$ possède q' éléments (ou q' est le nombre d'éléments de $O_{M'}\varphi'(x)$) et contient $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$. Par conséquent $q = q'$ et donc $N_{M'}\theta(x_1, \ldots, x_m) = O_{M'}\varphi(x)$. ■

II. 1.3. Remarque. Le lemme ci-dessus admet la réciproque suivante: *étant données une réalisation M et une formule existentielle $\varphi(x)$, si l'orbite de $\varphi(x)$ dans M est finit alors elle est contenue dans le noyau (fini) d'une formule libre.* (Nous omettons la preuve qui est facile.) Par conséquent si par analogie avec la notion de clôture dûe à W. Marsh nous définissons le *noyau* d'une réalisation M comme la réunion des parties finies de $|M|$ définissables par des formules existentielles alors, *ce noyau est exactement la réunion des noyaux des formules libres* et donc lorsque M est une multirelation de base E, *le noyau de M est l'ensemble des a de E pour lesquels la restriction $M|_{E-\{a\}}$* est strictement moins âgée que M. Une étude plus détaillée de cette notion aura lieu ultérieurement [1].

Soit M une réalisation de L et n un entier:

II. 1.4. Disons qu'une partie A de $|M|^n$ est *existentiellement définissable* lorsqu'elle est l'orbite d'une formule existentielle.

II. 1.5. L'intersection, la réunion de deux parties existentiellement définissables, le complémentaire d'une partie finie existentiellement définissable sont existentiellement définissables. Par conséquent pour toute partie A finie et toute partie B si A et B sont existentiellement définissables, alors $A-B$ et $B-A$ le sont aussi. Etant donnée une partie F contenue dans une partie finie existentiellement définissable, l'intersection OF de toutes les parties existentiellement définissables contenant F est encore existentiellement définissable. Etant donnés deux éléments a et b chacun dans une partie finie existentiellement définissable, les ensembles Oa et Ob sont égaux ou disjoints. Si A est existentiellement définissable alors pour toute partie finie I de $1, 2, \ldots, n$ l'ensemble $p_I(A)$ est existentiellement définissable (p_I étant l'application qui, au m-uple $(x_i)_{i=1,\ldots,m}$ associe $(x_i)_{i\in I}$). Par conséquent une partie A est contenue dans une partie finie existentiellement définissable si et seulement si chacune des projections (c'est-à-dire les $p_{\{i\}}(A)$) est contenue dans une partie finie existentiellement définissable dans $|M|$.

[1] Une telle étude a déjà eu lieu dans l'article de Kuekker, *Core structures for theories*, Fund. Math. 99 (1975), pp. 155–171.

II. 1.6. Lemme. *Soit M une réalisation de L et m un entier. Si un m-uple $(a_1, \ldots, a_m)$ est extrait d'une partie finie existentiellement définissable dans M alors le 1-type de $\vec{a}$ dans M formé des formules vraies en $\vec{a}$ qui sont des combinaisons booléiennes de formules universelles et existentielles est engendré, modulo la théorie 1-complète de M, par une formule existentielle (sous les mêmes hypothèses le type de $\vec{a}$ dans M est engendré, modulo la théorie complète de M, par une formule existentielle).*

Preuve. Soit $\vec{a}$ un m-uple extrait d'une partie finie existentiellement définissable dans M. D'après les remarques précédentes cet $\vec{a}$ est dans une partie finie de $|M|^n$ existentiellement définissable. Soit alors $O\vec{a}$ la plus petite de ces parties et $\varphi(\vec{x})$ une formule existentielle définissant $O\vec{a}$. Voyons que $\varphi(\vec{x})$ possède la propriété annoncée et ce qui suffit, que toute formule existentielle, ou universelle, $\psi(\vec{x})$ vraie en $\vec{a}$ se déduit de $\varphi(\vec{x})$ (modulo la théorie 1-complète de M). Pour cela remarquons que si deux réalisation M' et M'' sont 1-équivalentes et si une formule existentielle $\psi(\vec{x})$ a une orbite à p éléments dans M' alors elle a une orbite à p éléments dans M''. Soit alors $\psi(\vec{x})$ une formule existentielle vraie en $\vec{a}$; puisque $O_M\varphi(\vec{x}) = O\vec{a}$ et que $O\vec{a}$ est minimum on a $O_M\varphi(\vec{x}) \subseteq O_M\psi_M(\vec{x})$. Avec la remarque ci-dessus il en résulte $O_{M'}\varphi(\vec{x}) \subseteq O_{M'}\psi(\vec{x})$ dans toute M' qui est 1-équivalente à M. Soit $\psi(\vec{x})$ une formule universelle vraie en $\vec{a}$; puisque $\neg\psi(\vec{x})$ est existentielle et que $O\vec{a}$ est minimum on a $O\vec{a} = O\vec{a} - O_M\neg\psi(\vec{x})$ et donc $O_M\varphi(\vec{x}) \subseteq O_M\psi(\vec{x})$. En considérant $O_{M'}\varphi(\vec{x}) \wedge \neg\psi(\vec{x})$ on a encore $O_{M'}\varphi(\vec{x}) \subseteq O_{M'}\psi(\vec{x})$ dans toute M' qui est 1-équivalente à M. Ceci signifie dans les deux cas que $\psi(\vec{x})$ se déduit de $\varphi(x)$ modulo la théorie 1-complète de M. ■

II. 1.7. Etant données deux multirelations M et M' de L disons qu'une application f de domaine une partie F de $|M|$ et d'image une partie F' de $|M'|$ est un 1-isomorphisme local de M vers M' lorsqu'elle préserve à la fois les formules existentielles et universelles.

II. 1.8. Proposition [1]. *Soient M et M' deux réalisations de L, $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ une formule libre de noyaux respectifs N et N'. Si M et M' sont 1-équivalentes et si N est fini alors:*

1. *Il existe un 1-isomorphisme local f de M vers M' de domaine N et d'image N'.*

2. *Toute application f définie sur N et à valeurs dans $|M'|$ qui préserve les formules existentielles est un 1-isomorphisme local de M vers M' qui applique N sur N'.*

Preuve du 2. D'après le lemme il existe une formule existentielle $\varphi(x)$ pour laquelle $N_{M''}\theta(x_1, \ldots, x_m) = O_{M''}\varphi(x)$ dans toute réalisation M'' 1-équivalente à M. Si f préserve les formules existentielles alors $f(O_M\varphi(x)) \subseteq O_{M'}\varphi(x)$; mais comme $O_M\varphi(x)$ et $O_{M'}\varphi(x)$ ont même nombre d'éléments, et que $O_M\varphi(x)$ est fini on a alors $f(O_M\varphi(x)) = O_{M'}\varphi(x)$. La préservation des formules universelles résulte directement du lemme précédent.

Preuve du 1. Puisque N est fini, on peut trouver un entier k et un k-uple $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ dont les éléments constituent exactement N. D'après le lemme

[1] Cet énoncé est encore valable lorsque N et N' sont les noyaux de M et M'.

précédent on peut trouver une formule existentielle $\varphi(x)$ vraie en $\vec{a}$ qui engendre le 1-type de $\vec{a}$ dans M. Puisque M' est 1-équivalente à M on peut trouver un k-uple $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ extrait de $|M'|$ qui satisfait $\varphi(\vec{x})$. La correspondance qui à a_i associe b_i (pour $i = 1, \ldots, k$) définit une application f de domaine N et d'image incluse dans $|M'|$ qui préserve les formules existentielles. Le résultat annoncé résulte alors de 2.

II. 2. Engendrement d'un type existentiel.

II. 2.1. Etant donnés deux types existentiels A et A' et un énoncé existentiel φ disons *que A' et φ engendrent A* lorsque A est minimal pour l'inclusion parmi les types existentiels qui contiennent $A' \cup \{\varphi\}$.

II. 2.2. PROPOSITION. *Si le langage ne comporte que des prédicats et des constantes alors, étant donnés un type existentiel A et un énoncé existentiel φ appartenant à A, l'ensemble des types existentiels A' tels que A' et φ engendrent A est fini.*

Preuve. Considérons une formule libre $\theta(x_1, \ldots, x_m)$ dont la clôture existentielle $\exists x_1 \ldots x_m \theta(x_1, \ldots, x_m)$ est élémentairement équivalente à φ, une réalisation M_0 de type existentiel A et montrons que chaque A' qui, avec φ engendre A est le type existentiel d'une restriction $M_0| \, |M_0|-H$ où H est une certaine partie de $N_{M_0}\theta(x_1, \ldots, x_m)$. (D'ou il s'ensuit que ces A' sont en nombre au plus 2^n, l'entier n étant le nombre d'éléments de $N_{M_0}\theta(x_1, \ldots, x_m)$.) Soit donc A' un type existentiel, distinct de A, (sinon c'est sans intérêt), qui avec φ engendre A et soit M' une réalisation de type existentiel A'. Nous pouvons trouver une M, extension (c'est-à-dire sur modèle) de M' et de type existentiel A pour laquelle

1) $|M|-|M'|$ est fini et non vide puisque M' ne satisfait pas φ,

2) si a est dans $|M|-|M'|$ alors la restriction $M_{||M|-\{a\}}$ est une réalisation ne satisfaisant pas φ (et par conséquent $|M|-|M'|$ est inclus dans $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$).

En effet (d'après I. 2.3(v)) il existe des extensions de M' dont le type existentiel est A. Etant donnée une telle extension M_1 il existe un m-uple $(a_1, \ldots, a_m)$ extrait de sa base pour lequel $M_1 = \theta(a_1, \ldots, a_m)$. Puisque le langage L ne comporte que des prédicats et des constantes et que M' est une sous-réalisation de M_1 il s'ensuit que la restriction $M_{1||M'|\cup\{a_1,\ldots,a_m\}}$ est une réalisation de L; puisque cette réalisation contient M', réalise φ et est incluse dans M_1, elle est donc de type existentiel A. Si on considère les $M_{1||M'|\cup F}$ avec $F \subset \{a_1, \ldots, a_m\}$, qui sont des réalisations de L de type existentiel A, une partie F-minimale donne une M satisfaisant 1) et 2).

Soit donc M satisfaisant 1) et 2). D'après II. 1.8 il existe un 1-isomorphisme local f de M vers M_0 définie sur $N_M\theta(x_1, \ldots, x_m)$ et d'image $N_{M_0}\theta(x_1, \ldots, x_m)$. Pour une telle f soit H l'image de $|M|-|M'|$. Puisque M est une réalisation de L de type existentiel A' et que f préserve les formules existentielles et universelles il s'ensuit que $M_{0||M_0|-H}$ est une réalisation de L dont le type existentiel est A'. ■

II. 2.3. Remarques 1. Du fait que l'intersection d'un ensemble totalement ordonné (pour l'inclusion) de types existentiels est un type existentiel il s'ensuit que, *étant donnés deux types existentiels A et A' avec $A' \subseteq A$, et un énoncé φ de A il existe toujours un type existentiel A'' inclus dans A et engendré par A' et φ*. Mais par opposition avec l'énoncé ci-dessus l'ensemble de ces A'' engendrés par A' et φ peut être *fini*, *dénombrable* ou *continûpotent* (lorsque le langage est dénombrable ce sont les seuls cas possibles puisque alors l'ensemble de ces A'' forme un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) pour la topologie de Stone).

2. Etant donnés deux types existentiels A et A' disons que *A' engendre A* lorsqu'il existe φ pour laquelle A' et φ engendrent A. Lorsque le langage ne comporte que des prédicats et des constantes, il revient alors au même de dire que A' engendre A ou que l'ensemble $[A', A]$ des types existentiels compris entre A' et A est fini (si A' engendre A alors tout A'' compris entre A' et A engendre A et donc d'après ce qui précède les A'' sont en nombre fini. Réciproquement si ces A'' sont en nombre fini alors la réunion B de ceux qui sont distincts de A ne peut être égal à A et donc pour une φ dans $B-A$ le type A' et φ engendrent A). Lorsque le langage est en outre dénombrable *les A' qui engendrent A sont en nombre tout au plus dénombrable*, en particulier les A' maximaux parmi les types existentiels strictement inclus dans A sont en nombre fini ou dénombrable. *Nous ignorons si dans ce dernier cas A contient une suite strictement décroissante de types existentiels.*

II. 3. Une propriété de certaines familles d'ensembles.

II. 3.1. Soit D un ensemble de parties d'un ensemble E. Etant donnés deux éléments A et A' de D et un élément x de E disons que *A' et x engendrent A* lorsque A est minimal pour l'inclusion parmi les éléments de D qui contiennent $A' \cup \{x\}$.

II. 3.2. PROPOSITION. *Soit E un ensemble et D un ensemble de parties A de E vérifiant les conditions suivantes;*

D1. *Pour toute suite décroissante $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ d'éléments de D l'intersection des A_n appartient à D.*

D2. *Pour tout élément A de D, tout élément x de A l'ensemble des A' de D tels que A' et x engendrent A est fini.*

Sous ces conditions, s'il existe une suite strictement décroissante d'éléments de D alors il existe une chaîne (pour l'inclusion) d'éléments de D qui est isomorphe à la chaîne des réels.

II. 3.3. Preuve.

II. 3.3.1. Observons qu'en raison de D1 il suffit de prouver ceci:

(i) *S'il existe une suite strictement décroissante d'éléments de D alors D contient une chaîne isomorphe à la chaîne Q des rationnels.* En effet si f est un isomorphisme d'ordre de Q dans D alors l'application f définie pour tout réel y par $f(y) = \bigcap \{f(x) / x \in Q \text{ et } y \leqslant x\}$ est un isomorphisme d'ordre de $\boldsymbol{R}$ dans D.

II. 3.3.2. Etant donnés un ensemble D de parties de E et deux parties A, A' de E soit $D[A', A]$ l'ensemble des éléments A'' de D qui contiennent A' et sont contenus dans A. Pour obtenir (i) il suffit de prouver l'énoncé suivant:

(ii) *Si pour deux éléments A, A' d'un ensemble D vérifiant* D1 *et* D2 *l'ensemble $D[A', A]$ contient une suite strictement décroissante alors il existe un élément A'' de D*

tel que les ensembles $D[A', A'']$ et $D[A'', A]$ contiennent chacune une suite strictement décroissante. (En effet si D contient une suite strictement décroissante, par exemple la suite $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, alors en prenant $A' = A_0$ et $A = \bigcap_n A_n$ il en est de même de $D[A', A]$. Donc en procédant par dichotomie on obtient une chaîne dense d'éléments de D).

II. 3.3.3. Du fait que si un ensemble D vérifie D1 et D2 alors tout ensemble de la forme $D[A', A]$ vérifie encore D1 et D2, il suffit pour obtenir (ii) de prouver ceci:

(iii) *S'il existe une suite strictement décroissante d'éléments d'un ensemble D vérifiant* D1 *et* D2 *alors il existe deux suites strictement décroissantes*:

$$A'_0 \supset A'_1 \supset \ldots \supset A'_n \supset \ldots \supset A''_0 \supset A''_1 \supset \ldots \supset A''_m \supset \ldots$$

L'idée de la preuve est d'obtenir chaque A''_m comme intersection d'une suite strictement décroissante d'éléments de D, et en particulier d'obtenir A''_0 comme intersection des A'_n. Pour cela il suffit encore de prouver ceci:

(iv) S'il existe une suite décroissante d'élément d'un ensemble D vérifiant D1 et D2 alors il existe une double suite $(A^n_m)_{m \leqslant n}$ (avec m et n entiers quelconques) d'éléments de D et une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telles que pour tout $m \leqslant n$:

$$A^n_m \supset A^{n+1}_m \supset A^{n+1}_{m+1} \quad \text{et} \quad x_m \in A^{n+1}_m - A^{n+1}_{m+1}.$$

En effet ceci fournit en premier lieu la suite strictement décroissante $A^0_0 \supset A^1_0 \supset \ldots \supset A^n_0$ et en second lieu, en associant à chaque entier m l'intersection A^ω_m des A^n_m (pour $n \geqslant m$), la suite strictement décroissante $A^\omega_0 \supset A^\omega_1 \supset \ldots \supset A^\omega_m \supset \ldots$ (pour voir que cette suite strictement décroissante, donc que $A^\omega_m \supset A^\omega_{m+1}$, remarquer d'abord que si $x \notin A^\omega_m$ alors $x \notin A^n_m$ pour un certain n; donc, d'après la condition imposée, $x \notin A^{n+1}_{m+1}$ et par conséquent $x \notin A^\omega_{m+1}$; remarquer enfin que $x_m \in A^\omega_m - A^\omega_{m+1}$).

II. 3.3.4. La preuve de (iv) s'obtient au moyen d'une construction par récurrence sur n. Ainsi l'ensemble D contenant la suite décroissante $B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ on prend $A^0_0 = B_0$, $A^0_1 = B_1$, $A^1_1 = B_2$ et x_0 arbitraire dans $B_1 - B_2$. Les éléments $A^n_0, \ldots, A^n_m, \ldots, A^n_n$ et $x_0, \ldots, x_n$ étant construits on obtient les $A^{n+1}_0, \ldots, A^{n+1}_m, \ldots, A^{n+1}_{n+1}$ et x_{n+1} au moyen de l'énoncé suivant:

Lemme de diagonalisation. *Soit D un ensemble de parties de E vérifiant* D2 *et pour un entier n non nul, soient $n+1$ éléments $A^n_0, \ldots, A^n_m, \ldots, A^n_n$ de D et n éléments $x_0, \ldots, x_m, \ldots, x_{n-1}$ de E tels que*:

a) *$A^n_m \supset A^n_{m+1}$ et $x_m \in A^n_m - A^n_{m+1}$ pour $m \leqslant n-1$,*

b) *il existe une suite strictement décroissante d'éléments de D tous inclus dans A^n_n.*

Sous ces conditions il existe $n+1$ éléments $A^{n+1}_0, \ldots, A^{n+1}_m, \ldots, A^{n+1}_{m+1}$ de D et un élément x_n de E tels que:

a') *$A^n_n \supset A^{n+1}_m \supset A^{n+1}_{m+1}$ et $x_m \in A^{n+1}_m - A^{n+1}_{m+1}$ pour $m \leqslant n$,*

b') *il existe une suite strictement décroissante d'éléments de D tous inclus dans A^{n+1}_{n+1}.*

II. 3.3.5. Preuve du lemme. 1) Soit $B_0 \supset B_1 \ldots \supset B_p \supset \ldots$ une suite strictement décroissante d'éléments de D tous inclus dans A^n_n et x_n un élément de $B_0 - B_1$. Définissons par récurrence les ensembles $D_{n+1}, \ldots, D_n, \ldots, D_0$ en prenant pour D_{n+1} l'ensemble des $B_1, \ldots, B_p, \ldots$, et D_{m+1} étant défini, en prenant pour D_m l'ensemble des éléments de D qui sont strictement inclus dans A^n_m, qui contiennent x_m (comme élément) et contiennent au moins un élément de D_{m+1}. Si D_0 est non vide alors on peut définir par récurrence une suite $A^{n+1}_0, \ldots, A^{n+1}_m, \ldots, A^{n+1}_{n+1}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé: on prend pour A^{n+1}_0 un élément arbitraire de D_0 puis, ayant pris pour A^{n+1}_m un élément de D_m, en prenant pour A^{n+1}_{m+1} un élément de D_{m+1} inclus dans A^{n+1}_{m+1}. Pour voir que D_0 n'est pas vide il suffit, puisque D_n est infini, de prouver que si D_{m+1} est infini alors D_m est infini. Donc il suffit de prouver ceci:

Soient D un ensemble de parties de E vérifiant D2, *A un élément de D, x un élément de A, D' un ensemble d'éléments A' de D tous inclus dans A, et D'' l'ensemble des éléments A'' de D qui sont inclus dans A, qui contiennent x et au moins un élément A' de D'. Si D' est infini alors D'' est infini.*

Cet énoncé se prouve par l'absurde: supposons D' infini et D'' fini. Il existe alors un élément A''_0 de D'', minimal (pour l'inclusion) parmi les éléments A'' de D'' qui contiennent une infinité d'éléments A' de D'. En raison de D2, il existe une infinité de A' tels que A' et x n'engendrent pas A''_0. En d'autres termes si à chaque élément A'' de D'' strictement inclus dans A''_0 on associe l'ensemble SA'' des A' de D qui sont inclus dans A'' alors la réunion des SA'' est infinie. Par conséquent si les A'' sont en nombre fini alors l'un des SA'' est infini. Comme A'' est strictement inclus dans A''_0 cela contredit la minimalité de A''_0. ■

II. 4. Conséquences. Pour prouver le théorème il suffit d'appliquer la proposition II. 3.2 en prenant pour E l'ensemble des énoncés existentiels, et pour D l'ensemble des types existentiels A pour lesquels la théorie universelle associée (engendrée par les énoncés universels constants avec ceux de A) est comprise entre T et T'. En raison de I. 2.4 et II. 2.2 cet ensemble D vérifie les hypothèses D1 et D2, ce qui donne le résultat annoncé.

III. Possible classification des théories universelles irréductibles

La classification que nous proposons est basée sur le principe qu'une théorie est d'autant plus "simple" qu'elle a moins de modèles.

III. 1. Définissons une fonction h, que nous appelons *hauteur*, qui à certaines théories universelles irréductibles (consistantes) associe un ordinal, que nous notons $h(T)$. Cette fonction étant assujettie aux conditions suivantes:

H1. S'il n'existe pas de théorie universelle (consistante) contenant strictement T alors $h(T) = 0$.

H2. Si chaque théorie universelle irréductible T' contenant T a une hauteur alors T en a une égale au suprémum des $h(T')+1$ pour les T' contenant strictement T.

Clairement une théorie universelle irréductible T possède une hauteur si et seulement si il n'existe pas de suite strictement croissante de théories universelles irréductibles contenant T.

III. 2. Quelques exemples lorsque le langage ne comporte qu'un nombre fini de prédicats.

III. 2.1. *Hauteur finie.* $h(T) = n$ si et seulement si T est la théorie universelle d'une multirelation dont le domaine a n éléments.

III. 2.2. *Hauteur* $\omega+n$ (avec n entier). 2.1. Rappelons que la notion de multirelation *presque enchaînable* introduite par R. Fraïssé ainsi que les deux propriétés essentielles (voir [6] et [7]).

Considérons une multirelation M et une partie finie F de $|M|$; nous dirons que M est *F-enchaînable* lorsqu'il existe une chaîne (ou ordre total) de domaine $|M|-F$ pour laquelle tout automorphisme local de C (application de domaine et d'image inclus dans $|C|$ qui préserve C) prolongé par l'identité sur F est un automorphisme local de M. Lorsque F est vide nous disons que M est *enchaînable.* Nous disons qu'une multirelation M est *presque enchaînable* lorsqu'il existe une partie finie F de $|M|$ pour laquelle elle est *F-enchaînable.*

a) *Pour toute multirelation M de domaine infini et toute partie finie F de $|M|$ il existe une restriction infini de M qui est F-enchaînable.*

b) *L'âge d'une multirelation presque enchaînable n'a qu'un nombre fini de bornes; c'est-à-dire, avec le vocabulaire de cet article, la théorie universelle d'une multirelation presque enchaînable est finiment axiomatisable.*

III. 2.2.2. PROPOSITION. *Etant donnée une théorie universelle irréductible T, on a $\omega \leqslant h(T) < \omega 2$ si et seulement si T est la théorie universelle d'une multirelation presque enchaînable de domaine infini. On a $h(T) = \omega$ si et seulement si T est la théorie universelle d'une multirelation enchaînable de domaine infini).*

Preuve. Il est facile de voir que si T est la théorie universelle d'une multirelation enchaînable alors les surthéories irréductibles ayant des modèles infinis sont en nombre fini; donc $\omega \leqslant h(T) < \omega 2$. Il est immédiat que si T est la théorie universelle d'une multirelation enchaînable, alors $h(T) = \omega$. Réciproquement soit T une théorie universelle irréductible alors comme T est la théorie universelle d'une multirelation M on peut construire grâce à a) une suite décroissante $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$ de théories chacune de base infinie étant la théorie universelle d'une multirelation enchaînable, et l'intersection de ces théories étant la théorie universelle d'une multirelation enchaînable, de base infinie et l'intersection de ces théories étant égale à T. Par conséquent $\omega \leqslant h(T) < \omega 2$ alors T est l'un de ces T_n. Si $h(T) = \omega$ il suffit d'appliquer directement a) en prenant F vide pour obtenir le résultat.

III. 2.2.3. *Si une théorie universelle irréductible T n'a pas de hauteur alors elle est contenue dans une théorie universelle irréductible de hauteur au moins $\omega 2$.*

Preuve. D'après I. 3.1. iv) T est contenue dans une théorie universelle irréductible T' qui n'est pas finiment axiomatisable modulo T; parmi ces T' choisissons en une T'_0 maximale pour l'inclusion; toujours d'après I. 3.1 (iv) cette théorie a une hauteur. En raison de b) cette théorie n'est pas la théorie universelle d'une multirelation presque enchaînable et donc d'après la proposition II. 2.2.2 ci-dessus sa hauteur au moins $\omega 2$.

III. 2.2.4. PROBLEMES. *Si une théorie universelle irréductible T n'a pas de hauteur alors elle est contenue dans des théories universelles irréductibles de hauteur ω^2+p (avec p entier arbitrairement grand).*

Ce résultat est le meilleur que l'on puisse espérer obtenir. Il suffirait de montrer ceci:

1. Si $h(T) < \omega^2$ alors T est finiment axiomatisable (¹);
2. Si T n'a pas de hauteur, alors il existe une suite décroissante

$$T_0 \supseteq T_1 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$$

de théories, chacune étant infiniment axiomatisable et possédant une hauteur, l'intersection de ces théories étant égale *à* T.

III. 2.3. *Hauteur* $\omega n+p$ (avec n et p entier). Il n'y a pas de caractérisation aussi agréable que celle ci-dessus. Contentons nous de citer quelques exemples simples mais significatifs:

Hauteur $\omega 2$. La théorie universelle de la relation M somme directe de deux copies de la chaîne $\boldsymbol{Z}$ des entiers relatifs (tout élément d'une copie est incomparable à tout élément de l'autre), celle de la relation N somme directe d'un nombre dénombrable de copies de la chaîne à deux éléments, enfin celle de la bichaîne $(Z, 0)$ formée de la chaîne des entiers relatifs et de la relation unaire vraie pour le seul entier zéro, sont toutes bien de hauteur $\omega 2$.

2. Les trois examples ci-dessus conduisent directement à des théories de hauteur $\omega n+p$ avec n et p quelconques. Par exemple la théorie universelle de la relation obtenue en faisant la somme directe de n copies de la chaîne des entiers relatifs et d'une chaîne à p élément est de hauteur $\omega n+p$.

III. 2.4. *Hauteur au moins égale à* ω^2.

La théorie universelle de la relation de consécutivité sur l'ensemble des entiers naturels est de hauteur ω^2.

La théorie universelle des arbres ordonnés est de hauteur au moins ω^ω. Nous conjecturons l'égalité.

III. 3. Quelques problèmes concernant la hauteur d'une théorie universelle irréductible. Soit T une théorie universelle irréductible (d'un langage dénombrable).

La hauteur de T est au moins égale au suprémum des types de chaînes antibien ordonnées (pour l'inclusion) formées de théories universelles irréductible et contenant strictement T. Nous ignorons si l'égalité a toujours lieu. Néammoins si T est de hauteur ν et si pour tout $\mu < \nu$ les théories universelles irréductibles de hauteur μ sont en nombre fini alors il existe une chaine $T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_\mu \supset \ldots$, $\mu < \nu$ de théories

(¹) Ce problème est résolu cf M. Pouzet, *Sur la théorie des relations* (Thèse 1978).

universelles irréductibles contenant strictement T. (Ceci n'est que la généralisation du lemme de Koenig.) Nous ignorons toutefois si ces conditions sont toujours réalisées.

Dans ce cas ci-dessus la hauteur est dénombrable. Nous ignorons si en général la hauteur de T est dénombrable (¹); plus fortement nous ignorons si dès que T possède une hauteur alors les théories universelles irréductibles contenant T sont en nombre dénombrable.

Nous ignorons s'il existe un ordinal dénombrable α qui majore les hauteurs des théories universelles irréductibles. (Il existe un nombre continupotent de théories universelles irréductibles possédant toutes une hauteur, mais les seules exemples dont nous disposons sont de hauteur ω^2.)

III. 4. Degré d'une théorie universelle irréductible. Ainsi que nous l'avons vu en I. 2.2 une théorie universelle irréductible détermine un ultrafiltre de B (et réciproquement), par conséquent on peut munir l'ensemble des théories universelles irréductibles contenant une théorie universelle T de la topologie de Stone. On peut alors appliquer à cet espace, que nous notons $D(T)$, le procédé de réduction de Cantor–Bendixon, c'est-à-dire définir une fonction, que nous appelons *degré* et notons d_T^0 ayant les propriétés suivantes:

Tout point isolé de $D(T)$ est de degré 0.

Tout point isolé dans $D(T)$ diminué des points de degré strictement inférieurs à β est de degré β.

Lorsque le langage est dénombrable il faut et il suffit que $D(T)$ soit dénombrable pour que chacun de ses points possède un degré. Si le langage ne comporte pas de fonction alors l'une de ces conditions entraîne que $D(T)$ ne contient pas de suite strictement croissante et donc que T possède une hauteur. Dans [18] nous avons signalé que les points isolés correspondaient aux théories universelles des multirelations de domaine fini, et que les points isolés de deuxième espèce (points de degré 1) aux théories universelles des multirelations presque-enchaînables. Avec III. 2.2.2, il en résulte que les points de degré 0 sont de hauteur strictement inférieur à ω et ceux de degré 1 sont de hauteur supérieure ou égale à ω et strictement inférieure à $\omega 2$.

Nous conjecturons que ceci est général et donc la relation suivante entre le degré et la hauteur:

$$\omega \cdot d_T^0(T) \leqslant h(T) < \omega \cdot (d_T^0(T)+1)\ (^2)\,.$$

Bibliographie

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications 25.

[2] E. Fischer and A. Robinson, *Inductive theory and their forcing companions*, Israël J. Math. 12 (1972), pp. 95–107.

[3] R. Fraissé, *Cours de logique mathématique*, T. I, II, Gauthier-Villars, Paris 1972.

(¹) S. Shelah nous a indiqué que la réponse est positive.

(²) Cette relation est vraie pour les degrés finis (cf Thèse).

[4] R. Fraïssé, *Cours de théorie des relations*, Polycopié, Marseille 1968, nouvelle version 1976–1978.

[5] — *Abritement entre relations et spécialement entre chaînes*, Symposia Mathematica 5 (1970), pp. 203–251.

[6] —et M. Pouzet, *Interprétabilité d'une relation par une chaîne*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 272, série A (1971), pp. 1624–1627.

[7] — — *Sur une classe de relations n'ayant qu'un nombre fini de bornes*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 273, série A (1971), pp. 275–278.

[8] C. Frasnay, *Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, t. 15 (1965), pp. 415–524.

[9] Y. Gurevich, *The decision problem for the logic of predicates and of operations*, translated from Algebra and Logica 8 (3) (1969), pp. 284–308.

[10] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras*, Proc. London. Math. Soc. 2 (3) (1952), pp. 326–336.

[11] J. B. Kruskal, *Well quasi ordering, the tree theorem and Vazsonyi's conjecture*, Transactions of Amer. Math. Soc. 95 (1960), pp. 210–225.

[12] — *The theory of well quasi ordering. A frequently discovered concept*, J. of Combinatorial Theory (A) 13 (1972), pp. 297–305.

[13] R. Laver, *On Fraisse's order type conjecture*, Ann. of Math. 93 (1) (1971), pp. 89–111.

[14] A. Malcev, *The metamathematics of Algebraic systems* (Collected papers 1936–1967) Studies in Logic, Vol. 66, North-Holland, Amsterdam.

[15] CSt J. A. Nash-Williams, *On well quasi ordering finite trees*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 59 (1963) pp. 833–835.

[16] — *On well quasi ordering infinite trees*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 61 (1965), pp. 697–720.

[17] M. Pouzet, *Le bel ordre d'abritement et ses rapports les bornes d'une multirelations*, Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris, t. 274, série A, 1972, pp. 1677–1680.

[18] — *Condition de chaîne en théorie des relations*, Israël J. Math. 30 (1978), pp. 65–84.

[19] — *Ages belordonnés*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon (à paraitre).

[20] A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of Algebra*. Studies in Logic; North-Holland, Amsterdam 1965.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD

Accepté par la Rédaction le 27. 12. 1976