with rank less than $\mathscr{D}_N$ appears with rank equal or greater than $\mathscr{D}_N$ but less than $\mathscr{D}_{N+1}$, or (2) $\mathscr{D}_{N+1}$ is the smallest ordinal in r which is greater than the rank of any element of r_1.

(Note. We need the specification in (c) that the s_1-list has at least $\min\{\alpha, 10\}$ elements of each type, rather than at least $\min\{\alpha, 1\}$, to insure that it possesses enough variety to create all the type of elements out of it that we may have to match what appears in r_1 with some rank β such that $\mathscr{D}_N \leqslant \beta < \mathscr{D}_{N+1}$. And we need the specification (e) to insure that there are subsets of the set of those elements of the s_1-list which appear in the first N stages which have greater rank than any element in the first N stages and which can be added to the s_1-list in accordance with prior designations.)

Proof. Let α be the smallest ordinal in r such that $\alpha > \mathscr{D}_N$ and there is at least one element of a type which appears fewer than 10 times in r_1 with rank less than $\mathscr{D}_N$ and which appears with rank α, if there is such an ordinal. Then $\mathscr{D}_{N+1} = \alpha+1$. If there is no such ordinal, then let $\mathscr{D}_{N+1}$ be the first ordinal in r such that all elements of r_1 have ranks less than $\mathscr{D}_{N+1}$. In either case, we can add a set of elements and designations to the s_1-list which may be finite or denumerable but which is definable by a formula with finitely many constants in s and therefore is such that properties (a) and (b) still hold with respect to $N+1$ instead of N, and with respect to the enlarged s_1-list, as well as properties (c)-(f). This can be verified by considering all the possible cases, but is quite clear if considered carefully. So we omit what would be a very long verification. Q.E.D.

Reference

[1] A. Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Fund. Math. 49 (1961), pp. 129–141.

NEW YORK COMPENSATION INSURANCE RATING BOARD
New York, N. Y.

Accepté par la Rédaction le 21. 6. 1976

Les ensembles de niveau et la monotonie d'une fonction

par

Zbigniew Grande (Elbląg)

Résumé. Soient X un espace topologique et R l'espace des nombres réels. Étant donnée une fonction f: $X \to R$, désignons par Y_c l'ensemble $\{y \in R: f^{-1}(y)$ est connexe$\}$, par S_c l'ensemble $f^{-1}(Y_c)$ et par $\bar{S}_c$ la fermeture de l'ensemble S_c. Dans cette note je démontre:

THÉORÈME 1. *Supposons que X soit un espace topologique de Hausdorff connexe et localement connexe. Si une fonction f: $X \to R$ est connexe et relativement propre, la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ est faiblement monotone*; et

THÉORÈME 2. *Il existe un espace métrique, séparable, connexe et localement connexe et une fonction f: $X \to R$ qui est continue, n'est monotone dans aucun ensemble ouvert et non vide de l'espace X et telle que l'ensemble $\{x \in X$: x est un point limite de l'ensemble $f^{-1}(f(x))$ le long de tout arc simple dans X d'extrémité $x\}$ n'est pas résiduel dans l'espace X.*

Le Théorème 1 donne une réponse partielle au Problème 3.11 de [2] et le Théorème 2 donne la réponse au Problème 5.10 de [2].

Soient X un espace topologique et R l'espace des nombres réels. Étant donnée une fonction f: $X \to R$, désignons par Y_c l'ensemble $\{y \in R: f^{-1}(y)$ est connexe$\}$ et par S_c l'ensemble $f^{-1}(Y_c)$.

DÉFINITION. Une fonction f: $X \to R$ est dite

(a) *connexe* lorsque $f(A)$ est un ensemble connexe pour tout ensemble connexe $A \subset X$,

(b) *monotone* lorsque $f^{-1}(A)$ est connexe pour tout ensemble connexe $A \subset R$,

(c) *faiblement monotone* lorsque $f^{-1}(y)$ est un ensemble connexe pour tout point $y \in R$,

(d) *relativement propre* lorsque $f^{-1}(A)$ est un ensemble relativement compact pour tout ensemble compact $A \subset R$.

Remarque 1 ([2], Prop. 3.7). Soit f: $X \to R$ une fonction connexe définie sur un espace topologique de Hausdorff qui est connexe et localement connexe. Pour que la fonction f soit monotone, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement monotone.

Dans le travail [2] Garg a posé les deux questions suivantes:

PROBLÈME 1 ([2], Probl. 3.11). Une fonction connexe f: $R \to R$ est monotone au sens ordinaire par rapport à la fermeture $\bar{S}_c$ de l'ensemble S_c ([1], Th. 2). Une fonction connexe f: $X \to R$ est-elle monotone ou faiblement monotone par rappor à l'ensemble $\bar{S}_c$ dans le cas où X est un espace topologique de Hausdorff, connexe et localement connexe?

PROBLÈME 2 ([2], Probl. 5.10). Supposons que X soit un espace topologique de Hausdorff, satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et localement connexe. Si une fonction continue $f\colon X\to R$ n'est monotone dans aucun ensemble ouvert, non vide de l'espace X, existe-t-il un ensemble résiduel de points x dans X tels que x est un point limite de l'ensemble $f^{-1}(f(x))$ le long de tout arc simple dans X d'extrémité x? (La réponse est affirmative lorsque $X = R$ ([3], Th. 2)).

Dans cette note je démontre que si l'on admet les hypothèses du Problème relatives à l'espace X et à la fonction $f\colon X\to R$, et si, en outre, la fonction $f\colon X\to R$ est relativement propre, la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ est faiblement monotone et la réponse au Problème 2 n'est pas affirmative.

THÉORÈME 1. *Supposons que X soit un espace topologique de Hausdorff connexe, localement connexe. Si une fonction $f\colon X\to R$ est connexe et relativement propre, la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ est faiblement monotone.*

Démonstration [1]. Supposons par l'impossible que la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ ne soit pas faiblement monotone. Il existe donc un nombre $y_0\in f(\bar{S}_c)$ tel que $f^{-1}(y_0)$ ne soit pas connexe dans $\bar{S}_c$. La fonction partielle $f/\bar{S}_c$ étant continue ([2], Th. 3.6), l'ensemble $\bar{S}_c\cap f^{-1}(y_0)$ est fermé par rapport à $\bar{S}_c$ et par conséquent il est fermé dans X. Il existe donc deux ensembles fermés et non vides F_1 et F_2 tels que $F_1\cap F_2 = \emptyset$ et $\bar{S}_c\cap f^{-1}(y_0) = F_1\cup F_2$. La fonction f étant relativement propre, les ensembles F_1 et F_2 sont compacts. Il existe donc deux ensembles U_1 et U_2 ouverts dans X qui sont disjoints et tels que $F_1\subset U_1$ et $F_2\subset U_2$. Fixons deux points $x_1\in F_1$ et $x_2\in F_2$.

Remarquons encore que $y_0\in \bar{Y}_c - Y_c$. Ainsi y_0 est la limite d'une suite strictement croissante ou strictement décroissante de points $y_n\in Y_c$. Par raison de symétrie, on peut supposer que la suite $\{y_n\}$ est strictement croissante. Mais l'ensemble Y_c étant bilatéralement fermé ([2], Th. 3.3), il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que $[y_0, y_0+\varepsilon)\cap Y_c = \emptyset$. La fonction partielle $f/\bar{S}_c$ étant continue, il existe un ensemble ouvert $V\subset X$ tel que

$$f^{-1}((-\infty, y_0+\varepsilon))\cap \bar{S}_c = V\cap \bar{S}_c .$$

Soient V_1 et V_2 deux ensembles ouverts et connexes dans X pour lesquels on a $x_1\in V_1\subset U_1\cap V$ et $x_2\in V_2\subset U_2\cap V$. Comme la fonction f est connexe, les ensembles $f(V_1)$ et $f(V_2)$ se confondent. Remarquons que le produit $f(V_1)\cap f(V_2)$ contient un intervalle $[y_{n_0}, y_0]$, où $y_{n_0}\in\{y_n\}$. Par conséquent, si $n>n_0$, alors $f^{-1}(y_n)\cap V_1\neq\emptyset$ et $f^{-1}(y_n)\cap V_2\neq\emptyset$. Mais les ensembles $f^{-1}(y_n)$, étant connexes, satisfont pour tout $n>n_0$ à la condition suivante:

$$\bar{S}_c\cap f^{-1}(y_n)\cap [X-(U_1\cup U_2)]\neq\emptyset .$$

[1] D'abord j'ai démontré ce théorème dans l'hypothèse supplémentaire que l'espace X est héréditairement normal, mais le Professeur Garg a remarqué qu'on peut modifier la méthode de ma démonstration et se passer de cette hypothèse.

Fixons, pour tout $n>n_0$, un point $z_n\in \bar{S}_c\cap f^{-1}(y_n)\cap [X-(U_1\cup U_2)]$. L'ensemble $f^{-1}([y_{n_0}, y_0])$ étant relativement compact, il existe une sous-suite $\{z_{n_k}\}$ de la suite $\{z_n\}$ qui est convergente. Soit $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$. Évidemment $z_0\in \bar{S}_c\cap [X-(U_1\cup U_2)]$ et $f(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} (y_{n_k}) = y_0$, ce qui est contraire au fait que $f^{-1}(y_0)\cap \bar{S}_c\subset U_1\cup U_2$.

Remarque 2. Dans les hypothèses du théorème 1, si en outre, l'ensemble $\bar{S}_c$ est connexe et localement connexe, alors d'après la remarque 1 la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ est monotone. Si $\bar{S}_c$ n'est pas connexe, la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ n'est pas monotone, comme $(f/\bar{S}_c)^{-1}(R) = \bar{S}_c$ n'est pas connexe. Cependant il existe des fonctions connexes pour lesquelles l'ensemble $\bar{S}_c$ n'est pas connexe, par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x\leqslant 0 ,\\ \sin x & \text{pour} \quad x\in(0, \tfrac{3}{2}\pi) ,\\ x-1-\tfrac{3}{2}\pi & \text{pour} \quad x\geqslant\tfrac{3}{2}\pi . \end{cases}$$

Remarque 3. Supposons que l'espace topologique de Hausdorff X soit la somme d'une suite croissante d'ensembles X_n qui sont compacts, connexes et localement connexes. Si une fonction $f\colon X\to R$ est connexe et si $\bar{S}_c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bar{S}_c(f/X_n)$, la fonction partielle $f/\bar{S}_c$ est faiblement monotone.

Démonstration. Soit $y_0\in f(\bar{S}_c)$. On a donc

$$\bar{S}_c\cap f^{-1}(y_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\bar{S}_c\cap f^{-1}(y_0)\cap X_n] ,$$

où les ensembles du second membre sont connexes, d'après le théorème 1.

THÉORÈME 2. *Il existe un espace X métrique, séparable, connexe et localement connexe et une fonction continue $f\colon X\to R$ qui n'est monotone dans aucun ensemble ouvert non vide de l'espace X et telle que l'ensemble*

$$B(f) = \{x\in X\colon x \textit{ est un point limite de l'ensemble } f^{-1}(f(x)) \textit{ le long de tout arc simple dans } X \textit{ d'extrémité } x\}$$

n'est pas résiduel dans l'espace X.

Démonstration. Soit $g\colon R\to R$ une fonction continue qui ne soit monotone dans aucun ensemble ouvert non vide de l'espace R. Posons $h(x, y) = x+g(y)$. La fonction $h\colon R^2\to R$ est continue dans l'espace $R^2 = R\times R$. Soient $A\subset R$ et $B\subset R$ deux ensembles tels que $A\cup B = R$, $A\cap B = \emptyset$ et tels que, quel que soit un ensemble ouvert non vide $U\subset R$, les ensembles $A\cap U$ et $B\cap U$ soient de deuxième catégorie ([4], Th. 5.4). Désignons par C un sous-ensemble de l'espace R qui est dénombrable et dense dans R. Posons $X = (R\times A)\cup(C\times R)$. L'espace X avec la métrique euclidienne (métrique euclidienne de l'espace R^2 partielle de l'espace X) est un espace métrique, séparable, connexe et localement connexe. Posons, pour $(x, y)\in X$, $f(x, y) = h(x, y)$. La fonction $f\colon X\to R$ est continue et l'ensemble $B(f)$

n'est pas résiduel, comme il ne coupe pas l'ensemble $R\times A$. Démontrons encore que la fonction f n'est monotone dans aucun ensemble ouvert, non vide de l'espace X. Soit $U\subset X$ un ensemble ouvert, non vide de l'espace X. Soit $(x_0, y_0)\in U$ un point tel que $x_0\in C$. Remarquons que la coupe U_{x_0} de l'ensemble U est un ensemble ouvert dans R. La coupe $f_{x_0}(y)=f(x_0, y)$ n'est pas monotone dans l'ensemble ouvert U_{x_0}, il existe donc un nombre $z\in R$ tel que $(f_{x_0})^{-1}(z)$ n'est pas connexe. De plus, comme la fonction f_{x_0} est continue, l'ensemble $(f_{x_0})^{-1}(z)$ est fermé. Soit (α, β) une composante du complémentaire $U_{x_0}-(f_{x_0})^{-1}(z)$. L'ensemble $(f_x)^{-1}(z)$ étant non dense pour tout $x\in C$ et l'ensemble C étant dénombrable, l'ensemble $\bigcup\limits_{x\in C}(f_x)^{-1}(z)$ est de première catégorie. Il en résulte que l'ensemble $\big((\alpha, \beta)\cap B\big)-\bigcup\limits_{x\in C}(f_x)^{-1}(z)$ est non vide. Soit

$$y_1\in\big((\alpha, \beta)\cap B\big)-\bigcup_{x\in C}(f_x)^{-1}(z).$$

On a donc

$$U\cap f^{-1}(z)\cap\{(x, y)\in X\colon y=y_1\}=\emptyset$$

et par conséquent l'ensemble $U\cap f^{-1}(z)$ n'est pas connexe dans U, ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] K. M. Garg, *Monotonicity, continuity and levels of Darboux functions*, Coll. Math. 28 (1973), pp. 59–68.

[2] — *Properties of connected functions in terms of their levels*, Fund. Math. 97 (1977), pp. 17–36.

[3] — *On nowhere monotone functions*. I. *Derivates at a residual set*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 5 (1962), pp. 173–177.

[4] J. Oxtoby, *Mesure et catégorie* (russe), Moscou 1974.

Accepté par la Rédaction le 28. 6. 1976

The closure of the space of homeomorphisms on a manifold. The piecewise linear case

by

William E. Haver (Princeton, N. J.)

Abstract. Let $\overline{H}(M)$ denote the space of all continuous functions on a compact p.l. manifold M which can be approximated by homeomorphisms and $\overline{\mathrm{PLH}}(M)$ the space of all p.l. mappings which can be approximated by p.l. homeomorphisms. The pair $(\overline{H}(M), \overline{\mathrm{PLH}}(M))$ is studied and it is shown that $\overline{\mathrm{PLH}}(M)$ is an l_2^f-manifold for compact p.l. manifolds M of dim $\neq 4, 5$.

Let M be a compact piecewise linear manifold and $\mathrm{PLH}(M)$ denote the space of all piecewise linear homeomorphisms of M onto itself. We shall study the space, $\overline{\mathrm{PLH}}(M)$, of all piecewise linear mappings which can be approximated arbitrarily closed by elements of $\mathrm{PLH}(M)$. All function spaces on compact manifolds will be assumed to have the supremum metric ϱ; i.e., if X and Y are manifolds with d the metric on Y and f and g are mappings from X into Y, then

$$\varrho(f, g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x), g(x))\}.$$

Note: Suppose $f_0, f_1\in\overline{\mathrm{PLH}}(M)$. In this topology a homotopy from f_0 to f_1 is a map $F\colon M\times[0, 1]\to M$ such that $F_0=f_0$, $F_1=f_1$ and for each $t\in[0, 1]$, $F_t\in\overline{\mathrm{PLH}}(M)$. In particular, it is not required that F be a p.l. map from $M\times[0, 1]$ into M.

This paper is a sequel to [12] where the author studied $\overline{H}(M)$, the space of all continuous functions on M which can be approximated by homeomorphisms of M onto itself. In many cases $\overline{H}(M)$ has been identified by Siebenmann [18] with the space of cellular maps of M onto itself.

For some years now there has been considerable interest in the question of whether $H(M)$, the space of homeomorphisms of M onto itself, is locally homeomorphic to l_2, the Hilbert space of square summable sequences. See [9] for a summary of what is known about $H(M)$ and the pair $(H(M), \mathrm{PLH}(M))$. In the appendix of this note we make an observation of a new criterion for determining if $H(M^n)$ is an l_2-manifold. The major portion of this note is devoted to proving the following:

THEOREM 1. *Let M^n be a compact p.l. n-manifold, $n\neq 4$; if $n=5$, $\partial M^n=\emptyset$. Then given an open cover $\mathcal{U}$ of $\overline{H}(M^n)$, there exists a homeomorphism of $\overline{H}(M^n)$ onto itself which is limited by $\mathcal{U}$ and carries* $\mathrm{PLH}(M^n)$ *onto* $\overline{\mathrm{PLH}}(M^n)$.