О совпадении непрерывных отображений

Л. Гурневич (Гданьск) и **Г. Скордев** (София)

Резюме. Первая общая теорема о совпадении непрерывных отображений, доказана С. Эйленбергом и Д. Монтгомери в [4], следующая:

Теорема ЭМ. *Пусть X — компактное метрическое* ANR *пространство, p и q — непрерывные отображения компактного метрического пространства Y в X, и p — отображение Вьеториса. Если число совпадений $\lambda(p, q)$ отображений p и q отлично от нуля, то существует точка y в пространстве Y такая, что $p(y) = q(y)$, т.е., отображения p и q имеют совпадение.*

На основе метода, предложенного А. Дольдом в [3], в [8] дано современное доказательство теоремы ЭМ, а также было получено обобщение этой теоремы для пространств X, являющимися компактными метрическими AANR конечного типа.

Нашей целью является дальнейшее обобщение теоремы ЭМ, предлагается также одна общая теорема о совпадении непрерывных отображений, обобщающая теорема Лефшеца о неподвижных точках многозначных ациклических отображений открытых подмножеств линейных топологических пространств, см. [6] и [12].

I. Вспомагательные определения и теоремы

1. Теория гомологии. Все пространства, рассматриваемые здесь, будем предполагать хаусдорфовыми, и все отображения топологических пространств — непрерывными.

Через $H = \{H_n | \ i = 0, 1, ...\}$ будем обозначать гомологический функтор Чеха с компактными носителями из категории хаусдорфовых топологических пространств в категорию градуированных векторных пространств, см. [5] и [14]. Будем предполагать, что коэффициенты гомологии суть поле рациональных чисел Q.

Определение 1. Непустое пространство X называется *ациклическим*, если: (а) $H_n(X) = 0$ для всех $n > 0$, и (б) $H_0(X) = Q$.

Определение 2. Отображение $p\colon Y \to X$ называется *отображением Вьеториса*, если: (а) пространство $p^{-1}(x)$ ациклическое для любого $x \in X$, и (б) p — собственное, т.е., для любого компакта $K \subseteq X$ пространство $p^{-1}(K)$ — компактно.

Основную роль в вопросах о совпадении отображений играет следующая теорема Вьеториса-Бигла, см. [1]:

Теорема ВБ. *Если $p\colon Y\to X$ — отображение Вьеториса, то $p_*\colon H(Y)\to H(X)$ есть изоморфизм.*

Здесь p_* — гомоморфизм в гомологиях, индуцированный отображением p.

2. Число Лефшеца гомоморфизма ([3] и [8]). Пусть $M = \{M_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$ и $N = \{N_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$ градуированные векторные пространство над полем рациональных чисел Q. Рассмотрим следующие векторные пространства:

(а) $M^* = \{M_i^*|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$, где $M_i^* = \mathrm{Hom}(M_{-i}, Q)$,

(б) $M^*\otimes N = \{M_i^*\otimes N_j|\ i, j = 0, \pm 1, \ldots\}$,

(ц) $\mathrm{Hom}(M, N) = \{\mathrm{Hom}(M_{-i}, N_j)|\ i, j = 0, \pm 1, \ldots\}$.

Определим отображение $\theta\colon M^*\otimes N\to \mathrm{Hom}(M, N)$ следующим образом: $\theta = \{\theta_{ij}\}$, где θ_{ij} — линейное отображение пространства $M_i^*\otimes N_j$ в $\mathrm{Hom}(M_{-i}, N_j)$, определяется формулой:

$$\theta_{ij}(f\otimes n)(m) = (-1)^{ij} f(m)n\,.$$

Определение 1. Градуированное векторное пространство $M = \{M_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$ называется *градуированным векторным пространством конечного типа*, если $\dim M_i < \infty$ и $M_i = 0$ для почти всех $i = 0, \pm 1, \ldots$

Напомним, что если M — градуированное векторное пространство конечного типа, то гомоморфизм θ есть изоморфизм.

Определим еще и стандартное спаривание $e\colon M^*\otimes M\to Q$ где $e = \{e_{ij}\}$ определяется:

$$e_{ij}(f_i\otimes m_j) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad i \neq -j\,, \\ f_i(m_j) & \text{для} \quad i = -j\,. \end{cases}$$

Определение 2. Пусть $f\in \mathrm{Hom}(M, M)$. Число Лефшеца $\lambda(f)$ гомоморфизма f определяется равенствам

$$\lambda(f) = e\big(\theta^{-1}(f)\big)\,.$$

3. Эндоморфизмы Лере, [9]. Пусть E — линейное пространство над полем рациональных чисел Q и $g\in \mathrm{Hom}(E, E)$ (пространство E — необязательно конечномерное).

Пусть $N(g) = \{x\in E|\ g^n(x) = 0$ для некоторого $n\}$. Здесь $g^n\colon E\to E$ есть n-итерация гомоморфизма g. Очевидно, $N(g)$ есть линейное подпространство в пространстве E и $N(g)$ — инвариантное подпространство относительно гомоморфизма g. Рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{E} = E/N(g)$. Так как $N(g)$ инвариантно относительно g, то гомоморфизм g индуцирует гомоморфизм $\tilde{g}\colon \widetilde{E}\to\widetilde{E}$.

Определение 1. Гомоморфизм $g\in \mathrm{Hom}(E, E)$ называется *допустимым* если $\dim\widetilde{E}<\infty$.

Пусть $M = \{M_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$ — градуированное векторное пространство над полем рациональных чисел Q и $g = \{g_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$ — гомоморфизм пространства M в себя.

Напомним определение обобщенного числа Лефшеца $\Lambda(g)$ гомоморфизма g.

Для любого целого числа i имеем гомоморфизм $g_i\colon M_i\to M_i$. Как наверху рассмотрим гомоморфизм $\tilde{g}_i\colon \widetilde{M}_i\to\widetilde{M}_i$ и $\widetilde{M} = \{\widetilde{M}_i|\ i = 0, \pm 1, \ldots\}$.

Определение 2. Линейное отображение g называется *эндоморфизмом Лере*, если гомоморфизмы $\tilde{g}_i$ — допустимы для любого целого числа i, и $\dim\widetilde{M}_i = 0$ для почти всех $i = 0, \pm 1, \ldots$

Определение 3. Пусть линейное отображение g есть эндоморфизм Лере. Обобщенное число Лефшеца $\Lambda(g)$ гомоморфизма g определяется равенством

$$\Lambda(g) = \lambda(\tilde{g})\,.$$

Имеем лемму

Лемма [9]. *Пусть*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & M' \arrow[dl, phantom, ""] \\ M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & M' \arrow[u, "f'"'] \arrow[ul, "k"'] \end{tikzcd}$$

коммутативная диаграма градуированных векторных пространств и гомоморфизмов. Гомоморфизм f есть эндоморфизм Лере тогда и только тогда, когда гомоморфизм f' есть эндоморфизм Лере и в этом случае

$$\Lambda(f) = \Lambda(f')\,.$$

4. Допустимые пары отображений и индекс совпадений допустимых пар отображений

Определение 1. Отображения $p, q\colon Y\to X$ будем называть *допустимой парой отображений*, если p — отображение Вьеториса, а q — компактное отображение, т.е., множество $q(Y)$ содержится в компактном подмножестве X.

Пусть $p, q\colon Y\to X$ — допустимая пара отображений. Из теоремы ВБ, т. 1 имеем, что гомоморфизм $p_*\colon H(Y)\to H(X)$ есть изоморфизм.

Определение 2. Пусть $p, q\colon Y\to X$ — допустимая пара отображений и гомоморфизм $q_* p_*^{-1}$ есть эндоморфизм Лере. Тогда число совпадений $\Lambda(p, q)$ отображений p и q определяется равенством

$$\Lambda(p, q) = \Lambda(q_* p_*^{-1}).$$

5. L-пространства, [13]. Пусть X — компакт, тогда существует единственная равномерная структура в пространстве X, индуцирующая данную топологию в пространстве X, см. [10]. Через $\mathfrak{A}(X)$ обозначим базис этой равномерной структуры, состоящий из симметрических окружений.

Через I^τ будем обозначать произведение τ-отрезков $[0, 1]$ с тихоновской топологией.

Определение. Замкнутое подмножество X пространства I^τ называется *L-пространством*, если для любого окружения $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)$ существуют отображения $\mu(\mathfrak{A})$: $X \to P(\mathfrak{A})$, $\nu(\mathfrak{A})$: $P(\mathfrak{A}) \to X$ со следующими свойствами:

а) $(y, \nu(\mathfrak{A})(y)) \in \mathfrak{A}$ для любого $y \in P(\mathfrak{A})$.

б) $(x, \mu(\mathfrak{A})(x)) \in \mathfrak{A}$ для любого $x \in X$.

в) $\nu(\mathfrak{A})_* \mu(\mathfrak{A})_* = \mathrm{id}(X)_*$.

г) $P(\mathfrak{A}) \subseteq I^\tau$ и $P(\mathfrak{A})$ есть конечный симплициальный комплекс.

Наверху $\nu(\mathfrak{A})_*$, $\mu(\mathfrak{A})_*$ и $\mathrm{id}(X)_*$ суть гомоморфизмы в гомологиях, индуцированные отображениями $\nu(\mathfrak{A})$, $\mu(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{id}(X)$, соответственно. Отображения $\mathrm{id}(X)$ — тождественное отображение пространства X.

В [13] доказано, что компактные AANR′ пространства конечного типа суть L-пространства. Об определении AANR′ пространств см. [2] и [13]. Тем самым любые компактные AANR и тем более компактные ANR пространства суть L-пространства.

6. Допустимые компакты в линейных топологических пространствах. Через E будем обозначать хаусдорфовое линейное топологическое пространство.

Пусть X подмножество пространства E. Через $\mathrm{Cov}_E(X)$ будем обозначать семейство всех покрытий пространства X открытыми множествами из пространства E. В множестве $\mathrm{Cov}_E(X)$ имеем частичный порядок: для $\alpha, \beta \in \mathrm{Cov}_E(X)$ считаем, что $\alpha \geqslant \beta$, если покрытие α вписано в покрытие β.

Определение 1. Пусть f, g: $Y \to X$ и $\alpha \in \mathrm{Cov}_E(X)$. Будем говорить, что отображения f и g суть *α-близки*, если для любой точки $y \in Y$ существует множество $V_y \in \alpha$ такое, что точки $f(y)$ и $g(y)$ принадлежат множеству V_y.

Лемма [7]. *Пусть $\mathcal{U}$ — открытое подмножество хаусдорфого линейного топологического пространства E. Тогда для любого $\alpha \in \mathrm{Cov}_E(\mathcal{U})$ существует $\beta \in \mathrm{Cov}_E(\mathcal{U})$ такое, что*: (а) $\beta \geqslant \alpha$, *и* (б) *любые два β-близкие отображения φ, ψ. $Y \to \mathcal{U}$ стационарно α-гомотопны.*

Напомним, что отображения φ, ψ: $Y \to \mathcal{U}$ называются *стационарно α-гомотопны*, если существует отображение h пространства $Y \times I$ в пространство $\mathcal{U}$ со следующими свойствами: а) $h(y, 0) = \varphi(y)$, $h(y, 1) = \psi(y)$ для $y \in Y$, б) для всякой точки $y \in Y$, существует $V_y \in \alpha$ такое, что $h(y, t) \in V_y$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, и в) если $\varphi(y) = \psi(y)$ для $y \in Y$, то $h(y, t) = \varphi(y)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 2. Компакт K называется *$\mathcal{U}$-допустимым* если $K \subseteq \mathcal{U}$ и существует конфинальное подмножество $\mathcal{D}$ в частично-упорядоченом множестве $\mathrm{Cov}_E(\mathcal{U})$, такое, что для любого $\alpha \in \mathcal{D}$ имеем отображение π_α: $K \to \mathcal{U}$ со следующими свойствами:

а) $\pi_\alpha(K)$ лежит в конечномерном линейном подпространстве линейного пространства E.

б) Отображение вложения i: $K \to \mathcal{U}$ и отображение π_α суть α-близки.

в) $\bigcup [\pi_\alpha(K) | \alpha \in \mathcal{D}\}$ содержится в компактном подмножестве пространства $\mathcal{U}$.

Так как справедлива верхная лемма из [7], то без ограничения общености можем считать, что отображения i: $K \to \mathcal{U}$ и π_α: $K \to \mathcal{U}$ — гомотопны.

Отметим несколько примеров:

1. Пусть E — метризуемое и допустимое в смысле В. Кли линейное пространство, см. [7] и [11], и $\mathcal{U}$ — открытое множество в пространстве E. Тогда любой компакт K содержащийся в множестве $\mathcal{U}$ является $\mathcal{U}$-допустимым.

Стало быть любой компакт K в нормируемом пространстве $\mathcal{U}$-допустим для любого открытого множества $\mathcal{U}$ содержащего компакта K.

2. Пусть E произвольное хаусдорфовое линейное топологическое пространство и K-выпуклый компакт в E. Если K — допустим в смысле В. Кли, см. [11], то тогда K есть $\mathcal{U}$-дсспустим в любом открытом множестве $\mathcal{U}$.

II. Формулировки теорем

Теорема 1. *Пусть X есть L-пространство и p, q: $Y \to X$ — допустимая пара отображений. Тогда число совпадений $\Lambda(p, q)$ отображений p и q существует, и если $\Lambda(p, q) \neq 0$, то существует $y \in Y$ такая, что $p(y) = q(y)$.*

Следствие 1. *Пусть X есть компактное* AANR′ *пространство конечного типа и p, q: $Y \to X$ — допустимая пара отображений. Если $\lambda(p, q) \neq 0$, то отображения p и q имеют совпадение.*

Напомним, что X есть пространство конечного типа, если $H(X)$ есть градуированное векторное пространство конечного типа.

Следствие 2. *Если X есть ациклический* AANR′ *компакт, и p, q: $Y \to X$ допустимая пара отображений, то p и q имеют совпадение.*

Теорема 2. *Пусть E — хаусдорфовое линейное топологическое пространство, а $\mathcal{U}$ — открытое подмножество в E и K — $\mathcal{U}$-допустимый компакт. Пусть p, q: $Y \to \mathcal{U}$ допустимая пара отображений и $q(Y) \subseteq K$. Тогда число совпадений $\Lambda(p, q)$ существует и если $\Lambda(p, q) \neq 0$, то существует $y \in Y$ такая, что $p(y) = q(y)$.*

Следствие 3. *Пусть E метризуемое и допустимое в смысле B. Кли линейное пространство и $\mathcal{U}$ открытое подмножество в E. Пусть p, q: $Y \to \mathcal{U}$ — допустимая пара отображений. Тогда число совпадений $\Lambda(p, q)$ существует, и если $\Lambda(p, q) \neq 0$, то p и q имеют совпадение.*

III. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)$. Так как X есть L-пространство, то существуют конечный симплициальный комплекс $P(\mathfrak{A})$ и отображения $\mu(\mathfrak{A})$: $X \to P(\mathfrak{A})$, $\nu(\mathfrak{A})$: $P(\mathfrak{A}) \to X$ удовлетворяющие условиям определения I.5.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

(1)
$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & X \arrow[d, "\mu(\mathfrak{A})"] \\
P(\mathfrak{A}) \arrow[u, "\nu(\mathfrak{A})"] & \tilde{Y} \arrow[l, "p(\mathfrak{A})"'] \arrow[r, "q(\mathfrak{A})"] \arrow[u, "\tilde{\nu}(\mathfrak{A})"] & P(\mathfrak{A})
\end{tikzcd}$$

Здесь

$$\tilde{Y} = \{(y, x) \in Y \times P(\mathfrak{A}) |\ p(y) = \nu(\mathfrak{A})(x)\}$$

и $p(\mathfrak{A})(y, x) = x$, $\tilde{\nu}(\mathfrak{A})(y, x) = y$ для $y \in Y$, и наконец, $q(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{A}) q \tilde{\nu}(\mathfrak{A})$.

По предположению отображение p: $Y \to X$ — собственно. Так как X — компакт, то пространство Y тоже компактно. Пространство $\tilde{Y}$ есть замкнутое подмножество компактного пространства $Y \times P(\mathfrak{A})$, следовательно, $\tilde{Y}$ тоже компакт.

Пусть $z \in P(\mathfrak{A})$, тогда

$$p(\mathfrak{A})^{-1}(z) = \{(y, z) \in Y \times P(\mathfrak{A}) |\ p(y) = \nu(\mathfrak{A})(z)\}.$$

Отсюда получаем, что пространство $p(\mathfrak{A})^{-1}(z)$ гомеоморфно пространству $p^{-1}(\nu(\mathfrak{A})(z))$, и следовательно, ациклическое.

Так как $p(Y) = X$, то существует $y \in Y$, для которой $p(y) = \nu(\mathfrak{A})(z)$. Тогда $(y, z) \in \tilde{Y}$ и $p(y) = \nu(\mathfrak{A})(z)$. Тем самым отображение $p(\mathfrak{A})$: $\tilde{Y} \to P(\mathfrak{A})$ есть отображение Вьеториса.

Применяя гомологический функтор H к диаграмме (1) и воспользовавшись свойством в), I.5 из определения L-пространства получаем, что следующая диаграмма коммутативна

(2)
$$\begin{tikzcd}
H(X) \arrow[r, "\mu(\mathfrak{A})_*"] & H(P(\mathfrak{A})) \\
H(X) \arrow[u, "q_* p_*^{-1}"] \arrow[r, "\mu(\mathfrak{A})_*"] & H(P(\mathfrak{A})) \arrow[u, "q(\mathfrak{A})_* p(\mathfrak{A})_*^{-1}"'] \arrow[ul, "q_* p_*^{-1} \nu(\mathfrak{A})_*"']
\end{tikzcd}$$

Так как $P(\mathfrak{A})$ — конечный симплициальный комплекс, то число Лефшеца гомоморфизма $q(\mathfrak{A})_* p(\mathfrak{A})_*^{-1}$ существует. Из леммы I.3 и (2) получаем, что гомоморфизм $q_* p_*^{-1}$ есть эндоморфизм Лере, и обобщенное число Лефшеца $\Lambda(q_* p_*^{-1})$ равно числу Лефшеца $\lambda(q(\mathfrak{A})_* p(\mathfrak{A})_*^{-1})$.

Тем самым получаем для числа совпадений отображений p и q:

(3)
$$\Lambda(p, q) = \lambda(q(\mathfrak{A})_* p(\mathfrak{A})_*^{-1})$$

для любого окружения $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)$.

Имеем уже, что число совпадений $\Lambda(p, q)$ отображений p и q существует. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем, что если $\Lambda(p, q) \neq 0$, то отображения p и q имеют совпадение.

Нам уже известно, что для любого окружения $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)$ имеем допустимую пару отображений $p(\mathfrak{A}), q(\mathfrak{A})$: $\tilde{Y} \to P(\mathfrak{A})$, где $P(\mathfrak{A})$ — конечный симплициальный комплекс из определения I.5 L-пространства. Также нам известно, что пространство $\tilde{Y}$ — компактно. Тогда из (3) в силу обобщенной теоремы Эйленберга-Монтгомери (теорема (6.1) из [8]) отображения $p(\mathfrak{A})$ и $q(\mathfrak{A})$ имеют совпадение, т.е., существует точка $(y(\mathfrak{A}), x(\mathfrak{A})) \in \tilde{Y}$ такая, что

$$p(\mathfrak{A})(y(\mathfrak{A}), x(\mathfrak{A})) = q(\mathfrak{A})(y(\mathfrak{A}), x(\mathfrak{A}))$$

или имеем

(4)
$$x(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{A}) q(y(\mathfrak{A})).$$

Кроме того, так как $(y(\mathfrak{A}), x(\mathfrak{A})) \in \tilde{Y}$, то имеем

(5)
$$p(y(\mathfrak{A})) = \nu(\mathfrak{A})(x(\mathfrak{A})).$$

Рассмотрим обобщённые последовательности

(6)
$$\{x(\mathfrak{A}) |\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)\},$$

(7)
$$\{y(\mathfrak{A}) |\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)\}.$$

Члены последовательностей (6) и (7) принадлежат компакту I^τ. Тогда, без ограничения общности, можем считать, что последовательности (6) и (7) сходятся. Пусть x_0 есть предел последовательности (6), а y_0 — предел последовательности (7).

Из (4) и (5) получаем

(8)
$$x_0 = \lim\{\mu(\mathfrak{A}) q(y(\mathfrak{A})) |\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)\},$$

(9)
$$p(y_0) = \lim\{\nu(\mathfrak{A})(x(\mathfrak{A})) |\ \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(I^\tau)\}.$$

Из определения L-пространства I.5a) имеем

(10)
$$(x(\mathfrak{A}), \nu(\mathfrak{A})(x(\mathfrak{A}))) \in \mathfrak{A}.$$

Из (9) и (10) получаем

(11)
$$p(y_0) = x_0.$$

Из определения L-пространства I.5б) имеем

(12) $$\big(q(y(\mathfrak{A})),\, \mu(\mathfrak{A})q(y(\mathfrak{A}))\big) \in \mathfrak{A}\,.$$

Из (8) и (12) получаем

(13) $$q(y_0) = x_0\,.$$

Из (11) и (13) следует, что отображения p и q имеют совпадение. Теорема 1 доказана.

IV. Доказательство теоремы 2

Даны допустимая пара отображений p и q множества Y в хаусдорфового линейного топологического пространства E и образ множества Y при отображении q содержится в $\mathcal{U}$-допустимом компакте K.

Пусть $\alpha \in \mathcal{D}$ и $\pi_\alpha\colon K \to \mathcal{U}$ отображение из определения 2, I.6. Пусть $\pi_\alpha(K)$ содержится в конечномерном линейном подпространстве E^n пространства E и $V = E^n \cap \mathcal{U}$.

Пусть $q' = q\colon Y \to K$ и

$$q_\alpha = \pi_\alpha q' j\colon p^{-1}(V) \to V\,,$$
$$p_\alpha = p|p^{-1}(V)\colon p^{-1}(V) \to V\,.$$

Имеем следующую коммутативную диаграмму

(14) $$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "i"] & & \mathcal{U} \\
p^{-1}(V) \arrow[u, "p_\alpha"] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q_\alpha"'] & Y \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "\mathrm{id}(Y)"] \arrow[dl, "q_1"] & Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "\pi_\alpha q'"] \\
V \arrow[rr, "i"] & & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

Здесь $i\colon V \to \mathcal{U}$ и $j\colon p^{-1}(V) \to Y$ — тождественные вложения, $\mathrm{id}(Y)$ — тождественное отображение пространства Y, а $q_1 = \pi_\alpha q'\colon Y \to V$.

Из (14) применением гомологического функтора H получаем коммутативную диаграмму

(15) $$\begin{tikzcd}
H(V) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "q_{\alpha*}p_{\alpha*}^{-1}"'] & H(\mathcal{U}) \arrow[dl, "q_{1*}p_*^{-1}"'] \arrow[d, "\pi_{\alpha*}q'_*p_*^{-1}"] \\
H(V) \arrow[r, "i_*"] & H(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

Так как отображение q_α-компактно, V — открытое подмножество конечномерного линейного пространства E^n, а p_α — отображение Вьеториса, то из теоремы 4.1 из [3] имеем, что гомоморфизм $q_{\alpha*}p_{\alpha*}^{-1}$ есть эндоморфизм Лере. Тогда из леммы I.3 и (15) получаем, что гомоморфизм $\pi_{\alpha*}q'_*p_*^{-1}$ есть эндоморфизм Лере и

(16) $$\Lambda(q_{\alpha*}p_{\alpha*}^{-1}) = \Lambda(\pi_{\alpha*}q'_*p_*^{-1})\,.$$

Из определения 2б), I.6 имеем, что отображение π_α-гомотопно отображению i. Следовательно, отображение $q = iq'$-гомотопно отображению $\pi_\alpha q'$. Отсюда получаем

(17) $$\pi_{\alpha*}q'_* = q_*\,.$$

Из (16) и (17) имеем

(18) $$\Lambda(q_{\alpha*}p_{\alpha*}^{-1}) = \Lambda(q_*p_*^{-1}) = \Lambda(p, q)\,.$$

Тем самым первая часть теоремы 2 доказана, т.е., число совпадений $\Lambda(p,q)$ отображений p и q существует.

Предположим, что $\Lambda(p,q) \neq 0$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{D}$ выполнено $\Lambda(q_{\alpha*}p_{\alpha*}^{-1}) \neq 0$, т.е., число совпадений $\Lambda(p_\alpha, q_\alpha)$ отображений $p_\alpha, q_\alpha\colon p^{-1}(V) \to V$ отлично от нуля.

Так как q_α — компактное отображение, а V — открытое подмножество конечномерного линейного пространства E^n, то из теоремы (4.1), из [8] получаем, что отображения p_α и q_α имеют совпадение, т.е., существует точка $y_\alpha \in p^{-1}(V)$ такая, что

(19) $$p(y_\alpha) = \pi_\alpha q'(y_\alpha)\,.$$

Рассмотрим последовательность

(20) $$\{x_\alpha|\ \alpha \in \mathcal{D}\}$$

где $x_\alpha = q(y_\alpha)$. Так как для любого $\alpha \in \mathcal{D}$ точки x_α принадлежат компакту K, то можем считать, что последовательность (20) сходится к точке $x_0 \in K$.

Так как точки x_α и $\pi_\alpha(x_\alpha) = p(y)_\alpha$ являются α-близкими (см. определение 2б), I.6), то получаем, что последовательность $\{p(y_\alpha)|\ \alpha \in \mathcal{D}\}$ тоже сходится к точке x_0.

Из (19) имеем $y_\alpha \in p^{-1}(\pi_\alpha(K))$, т.е., для любого $\alpha \in \mathcal{D}$ точка y_α содержится в множестве

$$p^{-1}\big(\bigcup\{\pi_\alpha(K)|\ \alpha \in \mathcal{D}\}\big)\,.$$

Так как компакт K есть $\mathcal{U}$-допустим, то множество $\bigcup\{\pi_\alpha(K)|\ \alpha \in \mathcal{D}\}$ содержится в некотором компакте C лежащем в пространстве $\mathcal{U}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{D}$ имеем $y_\alpha \in p^{-1}(C)$. Наконец, вспомним, что отображение p — собственное, следовательно, множество $p^{-1}(C)$ — компакт. Тогда, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{y_\alpha|\ \alpha \in \mathcal{D}\}$ — сходится к некоторой точке $y_0 \in Y$, и получаем $p(y_0) = x_0$. Так как $q(y_\alpha) = x_\alpha$, то $q(y_0) = x_0$. Тем самым доказано, что отображения p и q имеют совпадение. Теорема 2 доказана.

Литература

[1] E. Begle, *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces*, Ann. of Math. 51 (1950), pp. 534–543.
[2] M. H. Clapp, *On generalization of absolute neighbourhood retracts*, Fund. Math. 70 (1971), pp. 117–130.
[3] A. Dold, *Fixed point index and fixed points for* ENR-*s*, Topology 4 (1965), pp. 1–8.
[4] S. Eilenberg and D. Montgomery, *Fixed point theorems for multi-valued transformations*, Amer. J. Math. 58 (1946), pp. 214–222.
[5] — and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton 1952.
[6] G. Fournier and L. Górniewicz, *The Lefschetz fixed point theorem for multi-valued maps of non-metrizable spaces*, Fund. Math. 92 (1976), pp. 213–222.
[7] — and A. Granas, *The Lefschetz fixed point theorem for some classes of non metrizable spaces*, J. Math. Pures et Appl. 52 (1973), pp. 271–284.
[8] L. Górniewicz, *A Lefschetz-type fixed point theorem*, Fund. Math. 88 (1975), pp. 103–115.
[9] A. Granas, *Topics in the fixed point theory*, Séminaire Jean Leray, Paris 1969/70.
[10] J. Kelley, *General Topology*, New York 1957.
[11] V. Klee, *Leray-Schauder theory without local convexity*, Math. Ann. 141 (1960), pp. 286–296.
[12] G. Skordev, *Fixed point theorem for multi-valued acyclic mappings*, Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sci. 27 (1974), pp. 1319–1321.
[13] Г. Скордев, *Неподвижные точки многозначных отображений бикомпактных* AANR′ *пространств*, Бюлл. Польской АН, Сер. Мат. Астр. Физ. Наук 22 (1974), стр. 415–420.
[14] E. Spanier, *Algebraic Topology*, New York 1966.

Accepté par la Rédaction 25. 5. 1976

Representation of Baire functions as continuous functions

by

C. T. Tucker (Houston, Tex.)

Abstract. Suppose H is a lattice ordered linear space of functions containing the constant functions, K is the set of all pointwise limits of sequences of functions in H, and φ is a linear lattice homomorphism defined on K. Then φ preserves pointwise convergence of sequences. Further if φ is one-to-one and onto $C(X)$ for some topological space X then K is closed with respect to pointwise convergence.

One of the objects studied in the theory of Baire functions is the Baire system generated by a space of continuous functions, i.e. given a topological space X and $C(X)$ the collection of continuous real valued functions on X the Baire system generated by $C(X)$ is the transfinite sequence $C(X), B_1(X), B_2(X), \ldots, B_\omega(X), \ldots$, where $B_1(X)$ is the set of pointwise limits of sequences of functions in $C(X)$, $B_2(X)$ is the set of pointwise limits of sequences of functions in $B_1(X)$, and in general if α is an ordinal $B_\alpha(X)$ is the set of pointwise limits of sequences of functions drawn from $\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta(X)$. See Mauldin [1] and [2] for a discussion of Baire systems. A question of interest is when can a term be added before $C(X)$, i.e. when does there exist a proper subset H of $C(X)$ such that $C(X)$ is the set of all pointwise limits of sequences of functions in H?

Here this question is generalized to the representation of Baire functions as continuous functions. Given a lattice ordered linear space H of functions containing the constant functions and K the set of all pointwise limits of sequences of functions in H, when does there exists a one-to-one linear lattice homomorphism φ of K or K^* (the set of bounded functions in K) onto $C(X)$ for some X. It is shown here (Theorem 6) that no such φ can exist defined on K unless K is closed with respect to pointwise convergence. Thus if a term can be inserted before $C(X)$ in its Baire system, the sequence is constant from $C(X)$ on.

On the other hand, such a φ can always be defined on K^*. If ω denotes the functions in K^* which take on only the values 0 and 1, every function in K^* is the uniform limit of a sequence of functions each of which is a linear combination of the functions in ω (Theorem 7). The functions in ω form a Boolean algebra, so by the Stone representation theorem they are isomorphic to the open and closed sets of a totally disconnected compact Hausdorff space X. The natural mapping between K^* and