La structure borélienne d'Effros est-elle standard?

par

Jean Saint Raymond (Paris)

Resumé. Le but de cet article est de résoudre un problème posé par J. P. R. Christensen dans [1] au sujet de la structure borélienne d'Effros sur l'ensemble des fermés d'un espace métrique séparable X. Quelle est la condition sur la topologie de X pour que cette structure borélienne soit standard ? On sait, cf. [1], qu'il en est ainsi dès que X est polonais ou K_σ. Nous allons démontrer ici qu'il en est ainsi si et seulement si X est réunion d'un K_σ et d'un polonais.

On considèrera toujours X comme plongé dans un espace métrique compact L. On identifie l'ensemble des fermés de X à celui de leurs adhérences dans L, c'est-à-dire l'ensemble des compacts T de L dont la trace $T \cap X$ sur X est dense dans T; et l'on munit cet ensemble FX de la topologie induite par celle de l'espace compact métrisable KL des compacts de L. Cette topologie n'est pas indépendante du choix de la compactification L, mais on sait, cf. [1], que l'application identique de l'espace F_1X dans l'espace F_2X correspondant à deux compactifications L_1 et L_2 est borélienne. Plus précisément, on voit que cette application, ainsi que l'application réciproque sont s.c.i., donc que cette application est une homéomorphie borélienne de classe (1.1). Il résulte que, à défaut de la topologie, la tribu borélienne de FX est indépendante de la compactification L. Le problème est donc de savoir quand l'ensemble FX est une partie borélienne du compact KL.

THÉORÈME 1. *Si X est réunion d'un polonais P et d'un K_σ, Y, FX est borélien.*

Soit $(\omega_i)_{i \in N}$ est une base de la topologie de L. Quitte à remplacer P par $P \setminus Y$, on peut supposer P et Y disjoints.

Soit π_i l'application de KL dans lui-même définie par

$$\pi_i(T) = \overline{T \cap \omega_i}.$$

Si U est un ouvert de L, l'ensemble des compacts T tels que

$$\pi_i(T) \cap U \neq \emptyset$$

est défini par

$$\{T \mid \overline{(\omega_i \cap T)} \cap U \neq \emptyset\} = \{T \mid \omega_i \cap T \cap U \neq \emptyset\} = \{T \mid T \cap (\omega_i \cap U) \neq \emptyset\}$$

qui est ouvert dans KL. Donc les applications π_i sont s.c.i., et par suite boréliennes de première classe. On vérifie sans peine que T appartient à FX si et seulement si, pour tout i, $T\cap\omega_i$ rencontre Y ou $\overline{T\cap\omega_i}$ appartient à FP. Donc:

$$FX=\bigcap_{i\in N}[\{T|\ T\cap Y\cap\omega_i\neq\emptyset\}\cup\pi_i^{-1}(FP)].$$

Puisque $Y\cap\omega_i$ est un K_σ, $\{T|\ T\cap(Y\cap\omega_i)\neq\emptyset\}$ est un K_σ, et puisque FP est un G_δ de KL, cf. [1], $\pi_i^{-1}(FP)$ est un $K_{\sigma\delta}$. Il en résulte que FX est un $K_{\sigma\delta}$ de KL, ce qui montre que la structure borélienne de FX est standard.

LEMME 2. *Si Z est une partie borélienne du compact métrisable L, qui n'est pas un G_δ, il existe un compact M de L tel que $M\cap Z$ soit dénombrable sans point isolé, et $M\setminus Z$ homéomorphe à N^N.*

Ce lemme est dû à W. Hurewicz [2]. Nous en donnons néanmoins une démonstration, pour éclairer la démonstration du lemme 3, qui lui est assez semblable.

Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers $\geqslant 1$. Pour chaque $s=(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ de longueur $|s|=k$, nous posons

$$\nu(s)=n_1+n_2+\ldots+n_k$$

et nous remarquons que pour tout $m>0$, $\{s\in S|\ \nu(s)\leqslant m\}$ est une partie finie de S.

On suppose le diamètre de L majoré par 1, et on se donne un espace polonais P et une surjection continue φ de P sur $L\setminus Z$. Soit Ω l'ensemble des points ξ de P qui possèdent un voisinage V dont l'image $\varphi(V)$ soit contenue dans un K_σ disjoint de Z. Il est clair que Ω est ouvert, et qu'il existe une suite (V_i) d'ouverts de P et une suite (A_i) de K_σ de L, disjoints de Z avec:

$$\Omega=\bigcup V_i,\qquad \varphi(V_i)\subset A_i.$$

Si A est la réunion des A_i, c'est un K_σ disjoint de Z, qui contient $\varphi(\Omega)$. Posons alors $Q=P\setminus\varphi^{-1}(A)$. L'ensemble Q est un G_δ de P, donc polonais, et nous le munissons d'une distance pour laquelle il est complet et de diamètre au plus 1.

Si Q était vide, on aurait $\varphi(P)=A=L\setminus Z$, et Z serait un G_δ, contrairement à l'hypothèse. Si U est un ouvert de Q tel que $\overline{\varphi(U)}\cap Z=\emptyset$, U est trace sur Q d'un ouvert U_1 et on a:

$$\varphi(U_1)\subset\varphi(U)\cup A\subset\overline{\varphi(U)}\cup A\subset L\setminus Z.$$

Puisque $\overline{\varphi(U)}\cup A$ est un K_σ disjoint de Z, on a $U_1\subset\Omega$ et

$$U\subset Q\cap\Omega=\emptyset.$$

Donc l'adhérence de l'image de tout ouvert non vide de Q rencontre Z. Nous construisons par récurrence sur $|s|$ des points z_s de Z, des ouverts ω_s de L et des ouverts Q_s de Q tels que:

a) $z_s\in Z\cap\omega_s\cap\overline{\varphi(Q_s)}$,

b) $\overline{\omega_{s,n}}\subset\omega_s$; $\overline{\omega_{s,n}}\cap\overline{\omega_{s,m}}=\emptyset$ si $m\neq n$,

c) $\overline{Q_{s,n}}\subset Q_s$,

d) $d(z_s;z_{s,n})\leqslant 2^{1-\nu(s,n)}$,

e) $\operatorname{diam}\omega_s\leqslant 2^{-\nu(s)}$,

f) $\operatorname{diam}Q_s\leqslant 2^{-|s|}$.

On pose $\omega_\emptyset=L$; $Q_\emptyset=Q$ et on choisit $z_\emptyset$ quelconque dans $Z\cap\overline{\varphi(Q)}$.

Si ω_s, Q_s et z_s sont déterminés, il existe une suite $(y_{s,n})$ de points deux à deux distincts dans $\omega_s\cap\varphi(Q_s)$ tels que

$$d(z_s;y_{s,n})\leqslant 2^{-\nu(s,n)}$$

donc aussi des ouverts $\omega_{s,n}$ contenant les $y_{s,n}$ et vérifiant b) et e). Si $\xi_{s,n}\in Q_s\cap\varphi^{-1}(y_{s,n})$, il existe un voisinage ouvert $Q_{s,n}$ de $\xi_{s,n}$ tel que

$$\operatorname{diam}Q_{s,n}\leqslant 2^{-|s|-1};\quad \overline{Q_{s,n}}\subset Q_s;\quad \overline{\varphi(Q_{s,n})}\subset\omega_{s,n}.$$

Alors $\overline{\varphi(Q_{s,n})}\cap Z\neq\emptyset$ puisque $Q_{s,n}\neq\emptyset$, et on choisit $z_{s,n}$ dans $Z\cap\overline{\varphi(Q_{s,n})}$. Il est immédiat que les conditions a) et f) sont vérifiées.

Supposons donc construits $(z_s)_{s\in S}$; $(\omega_s)_{s\in S}$, $(Q_s)_{s\in S}$. Désignons par M_k l'ensemble $\{z_s|\ |s|\leqslant k\}$. Nous démontrons par récurrence sur k que M_k est compact. C'est immédiat pour $M_0=\{z_\emptyset\}$. Si c'est vrai pour M_k, il résulte de la condition d) que tous les points de M_{k+1} sauf un nombre fini sont à distance de M_k inférieure à tout $\varepsilon>0$. Si M_k^ε désigne le compact $\{x\in L|\ d(x,M_k)\leqslant\varepsilon\}$, on a

$$M_{k+1}=\bigcap_{\varepsilon>0}[M_k^\varepsilon\cup(M_{k+1}\setminus M_k^\varepsilon)]$$

qui est compact puisque $M_{k+1}\setminus M_k^\varepsilon$ est fini, donc compact.

Soit maintenant $D=\bigcup_k M_k=\{z_s/s\in S\}$. La condition d) montre que D, qui est dénombrable, n'a aucun point isolé. Nous montrons maintenant que D est fermé dans Z, c'est-à-dire que $\overline{D}\setminus D\subset\varphi(P)$.

Soient $a\in\overline{D}\setminus D$ et $k\in N$. Puisque $a\notin M_k=\overline{M_k}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $a\notin M_k^\varepsilon$. La condition e) entraîne que $\overline{\omega_s}\subset M_k^\varepsilon$ sauf pour un nombre fini de $s\in S$. Donc

$$a\in\overline{D}\subset\overline{M_k\cup\bigcup_{|s|=k}\omega_s}\subset M_k^\varepsilon\cup\bigcup_{|s|=k}\overline{\omega_s}.$$

Il existe donc un s, unique d'après b) tel que $|s|=k$ et $a\in\overline{\omega_s}$.

Si $a\in\overline{D}\setminus D$, il existe d'après la condition b), et ce qui précède une unique suite $\sigma\in N^N$ telle que $a\in\bigcap_{s<\sigma}\overline{\omega_s}$.

Les conditions c) et f) et la complétude de Q font alors qu'il existe $\xi\in Q$ tel que $\{\xi\}=\bigcap_{s<\sigma}\overline{Q_s}=\bigcap_{s<\sigma}Q_s$. On voit alors que

$$\varphi(\xi)\in\bigcap_{s<\sigma}\varphi(\overline{Q_s})\subset\bigcap_{s<\sigma}\overline{\varphi(Q_s)}\subset\bigcap_{s<\sigma}\overline{\omega_s}$$

et puisque $\{a\} = \bigcap_{s<\sigma} \overline{\omega_s}$ d'après e), on a $a = \varphi(\xi) \notin Z$, ce qu'on voulait démontrer.

Si l'on définit, en utilisant c) et f) l'application h de N^N dans L par:

$$\forall \sigma \in N^N, \quad \{h(\sigma)\} = \bigcap_{s<\sigma} \overline{\varphi(Q_s)} = \bigcap_{s<\sigma} \overline{\omega_s}$$

on a déjà vu que $h(N^N) \subset \varphi(Q) \subset L \setminus Z$, que $h(N^N) \subset \bar{D}$ puisque $\omega_s \cap D \neq \emptyset$ et que $(\omega_s)_{s<\sigma}$ forme une base de voisinages de $h(\sigma)$, et que $h(N^N) \supset \bar{D} \setminus D$.

La condition b) montre que h est injective, et la condition e) que h est continue. De plus, si J_s désigne l'ensemble des suites $\sigma \in N^N$ commençant par s, on a:

$$h(J_s) = \omega_s \cap (\bar{D} \setminus D)$$

qui est ouvert dans $\bar{D} \setminus D$, et ceci prouve la continuité de h^{-1} compte tenu du fait que les $(J_s)_{s \in S}$ forment une base de la topologie de N^N.

L'ensemble D est donc fermé dans Z, et si $M = \bar{D}$, M est un compact parfait qui répond aux exigences de l'énoncé.

Lemme 3. *Si X est partie borélienne du compact métrisable L, qui n'est pas réunion d'un K_σ et d'un G_δ de L, il existe un fermé H de X, une famille $(\omega_s)_{s \in S}$ d'ouverts de L et une famille $(M_s)_{s \in S}$ de compacts deux à deux disjoints de L, tels que*:

$M_s \subset \omega_s$; $M_s \cap \overline{\omega_{s,n}} = \emptyset$,

$\overline{\omega_{s,n}} \subset \omega_s$; $\overline{\omega_{s,n}} \cap \overline{\omega_{s,m}} = \emptyset$ *si* $m \neq n$,

$H = X \cap (\bigcup_{s \in S} M_s)$,

$\forall s \in S$, $M_s \setminus X$ *est dénombrable sans point isolé, et* $M_s \cap X$ *homéomorphe à* N^N,

$\operatorname{diam} \omega_s \leqslant 2^{-\nu(s)}$,

$M_s = \limsup_{n\to\infty} M_{s,n}$.

On peut supposer que $\operatorname{diam} L \leqslant 1$. Soient P un espace polonais et φ une bijection continue de P sur $Y = L \setminus X$. On désigne par Ω l'ensemble des points ξ de P tels qu'il existe un voisinage V de ξ dans P et un K_σ, A, de L avec

$$\varphi(V) \subset A \quad \text{et} \quad A \cap X \text{ est un } K_\sigma .$$

Il est clair que Ω est ouvert et qu'il existe une suite (V_i) d'ouverts de P et une suite (A_i) de K_σ de L avec

$$A_i \cap X \text{ est un } K_\sigma; \quad \Omega = \bigcup_i V_i; \quad \varphi(V_i) \subset A_i .$$

On note A la réunion des A_i, qui est un K_σ dont la trace sur X est un K_σ, et on pose $Q = P \setminus \varphi^{-1}(A)$ qui est un G_δ de P donc polonais et qu'on munit d'une distance pour laquelle il soit complet et de diamètre $\leqslant 1$.

Remarquons que Q n'est pas vide: sinon, on aurait

$$\varphi(P) \subset A \quad \text{donc} \quad X = (L \setminus A) \cup (X \cap A) .$$

Or $(L \setminus A)$ est un G_δ et $X \cap A$ un K_σ; X serait alors réunion d'un K_σ et d'un G_δ contrairement à l'hypothèse. De plus, si U est un ouvert de Q tel que $\overline{\varphi(U)} \cap X$ soit un K_σ, U est la trace sur Q d'un ouvert U_1 de P, et on a:

$\varphi(U_1) \subset \varphi(U) \cup A \subset \overline{\varphi(U)} \cup A$ qui est un K_σ dont la trace sur X est le K_σ: $(A \cap X) \cup (\overline{\varphi(U)} \cap X)$.

Ceci montre que $U_1 \subset \Omega$, donc que $U \subset \Omega \cap Q = \emptyset$. Il en résulte que tout ouvert U non vide de Q vérifie

$$X \cap \overline{\varphi(U)} \text{ n'est pas un } K_\sigma .$$

On construit maintenant des compacts $(M_s)_{s \in S}$ de L, des ouverts $(\omega_s)_{s \in S}$ de L et des ouverts $(Q_s)_{s \in S}$ de Q tels que:

a) $M_s \subset \omega_s \cap \overline{\varphi(Q_s)}$,

b) $M_s \setminus X$ est dénombrable sans point isolé et $M_s \cap X$ homéomorphe à N^N

c) $\overline{\omega_{s,n}} \subset \omega_s$; $\overline{\omega_{s,n}} \cap \overline{\omega_{s,m}} = \emptyset$ si $m \neq n$,

d) $\overline{Q_{s,n}} \subset Q_s$,

e) $\forall x \in M_{s,n}$ $d(x, M_s) \leqslant 2^{1-\nu(s,n)}$,

f) $\operatorname{diam} \omega_s \leqslant 2^{-\nu(s)}$,

g) $\operatorname{diam} Q_s \leqslant 2^{-|s|}$,

h) $M_s \subset \overline{\bigcup_n M_{s,n}}$.

On choisit $\omega_\emptyset = L$ et $Q_\emptyset = Q$, et puisque $\overline{X \cap \varphi(Q)}$ n'est pas un K_σ, le lemme 2 appliqué à $\overline{\varphi(Q)} \setminus X$ nous donne l'existence d'un compact $M_\emptyset$ contenu $\overline{\varphi(Q)}$ vérifiant b).

Supposons construits M_s, ω_s et Q_s. Si Q contenait un ouvert U dénombrable non vide, cet ouvert aurait une image K_σ disjointe de X, et il en résulterait comme plus haut qu'un ouvert de P de trace U sur Q serait contenu dans Ω, donc que U serait vide. Par conséquent $\varphi^{-1}(M_s)$ qui est fermé et au plus dénombrable est rare dans Q. Il en résulte que tout point de M_s est adhérent à $\varphi(Q_s) \setminus M_s$, compte tenu de a). On peut donc trouver une suite $y_{s,n}$ dans $(\varphi(Q_s) \setminus M_s) \cap \omega_s$ dont tout point de M_s soit valeur d'adhérence et telle que

$$d(y_{s,n}; M_s) \leqslant 2^{-\nu(s,n)}$$

dont tous les termes soient distincts. On peut alors trouver des voisinages ouverts $\omega_{s,n}$ des $y_{s,n}$ vérifiant c) et f). Si $\xi_{s,n}$ est un point de $Q_s \cap \varphi^{-1}(y_{s,n})$, il existe un voisinage ouvert $Q_{s,n}$ de $\xi_{s,n}$ vérifiant $\overline{Q_{s,n}} \subset Q_s$; $\varphi(Q_{s,n}) \subset \omega_{s,n}$ et $\operatorname{diam} Q_{s,n} \leqslant 2^{-|s|-1}$. Puisque $\overline{\varphi(Q_{s,n})} \cap X$ n'est pas un K_σ, on peut trouver un compact $M_{s,n}$ satisfaisant a) et b), en utilisant le lemme 2. On vérifie alors sans peine que les conditions a) à h) sont remplies.

On désigne maintenant par N_k la réunion des M_s pour $|s| \leqslant k$, et par N la réunion des N_k. On démontre par récurrence sur k, comme dans le lemme 2, que les N_k sont compacts. C'est évident pour $N_0 = M_\varnothing$. Si c'est vrai pour N_k, on a d'après la condition e)

$M_{s,n} \subset N_k^\varepsilon$ pour $|s| = k$ sauf pour un nombre fini de suites (s, n). Donc:

$$N_{k+1} = \bigcap_{\varepsilon>0} [N_k^\varepsilon \cup \bigcup_{\substack{|s|=k \\ 2^{1-\nu(s,n)}>\varepsilon}} M_{s,n}] \text{ est compact.}$$

De plus, comme dans le lemme 2, si a est un point d'accumulation de N, qui n'appartient pas à N, il existe pour tout k un $\varepsilon>0$ tel que $a \notin N_k^\varepsilon$. Or

$$N \subset N_k^\varepsilon \cup \bigcup_{\substack{|s|=k \\ 2^{-\nu(s)}>\varepsilon}} \omega_s$$

donc

$$a \in \overline{N} \subset N_k^\varepsilon \cup \bigcup_{|s|=k} \overline{\omega_s}.$$

Il existe donc une suite $s \in S$ de longueur k, unique d'après c), telle que $a \in \overline{\omega_s}$. Il existe donc, toujours d'après c), une unique suite $\sigma \in N^N$ telle que

$$a \in \bigcap_{s<\sigma} \overline{\omega_s}.$$

Il existe alors aussi un point ξ de Q tel que

$$\{\xi\} = \bigcap_{s<\sigma} \overline{Q_s}.$$

On a alors $a = \varphi(\xi) \notin X$, ce qui montre que

$$H = \overline{N} \cap X = N \cap X = \bigcup_{s \in S} M_s \cap X \text{ est fermé dans } X.$$

LEMME 4. *Si (x_n) et (y_n) sont deux suites partout denses d'un espace métrique parfait, il existe une bijection φ de N sur N telle que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_{\varphi(n)}) = 0$.*

Supposons que nous ayons construit les entiers $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$, $\varphi^{-1}(1)$, $\varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(n)$ en sorte que $d(x_i, y_j) \leqslant 2^{-i}+2^{-j}$ si $j = \varphi(i)$ et ($i \leqslant n$ ou $j \leqslant n$) ce qui est possible pour $n = 0$.

Si $n+1 \in \{\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(n)\}$ on pose $\varphi(n+1) = j$ pour l'entier j tel que $n+1 = \varphi^{-1}(j)$. Sinon il existe j tel que

$$y_j \in B(x_{n+1}, 2^{-n-1}) \setminus \{y_1, \ldots, y_n\} \setminus \{y_{\varphi(1)}, \ldots, y_{\varphi(n)}\}$$

puisque la boule de centre x_{n+1} est infinie, l'espace étant parfait. On pose alors

$$j = \varphi(n+1).$$

Si $n+1 \in \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n+1)\}$ on pose $\varphi^{-1}(n+1) = i$ pour l'entier i tel que $\varphi(i) = n+1$. Sinon, il existe un entier i tel que

$$x_i \in B(y_{n+1}, 2^{-n-1}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \setminus \{x_{\varphi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\varphi^{-1}(n)}\}$$

et on pose

$$i = \varphi^{-1}(n+1).$$

On a donc toujours l'inégalité

$$d(x_i, y_j) \leqslant 2^{-i}+2^{-j} \quad \text{si} \quad j = \varphi(i).$$

Cette construction détermine la bijection φ et, puisque $\varphi(n)\to\infty$ quand $n\to\infty$, on a bien

$$d(x_n, y_{\varphi(n)}) \leqslant 2^{-n}+2^{-\varphi(n)} \to 0.$$

THÉORÈME 5. *Soit X un borélien d'un compact métrisable L. Pour que X soit réunion d'un K_σ et d'un G_δ, il faut et il suffit que X ne contienne aucun fermé homéomorphe à $Q \times N^N$.*

Si X contient un fermé homéomorphe à $Q \times N$, et s'il est réunion d'un K_σ et d'un G_δ, l'espace $Q \times N^N$ sera réunion d'un K_σ, A, et d'un G_δ, B. La projection de A sur N^N sera un K_σ, donc distincte de N^N qui n'est pas un K_σ, et si ξ n'appartient à la projection de A, $Q \times \{\xi\}$ sera un fermé disjoint de A, donc contenu dans B, donc lui-même polonais, ce qui est impossible puisque $Q \times \{\xi\}$, homéomorphe à Q, n'est pas polonais. Il en résulte que si X est réunion d'un K_σ et d'un G_δ, il ne possède aucun fermé homéomorphe à $Q \times N^N$.

Réciproquement, si X n'est pas union d'un K_σ et d'un G_δ, il existe dans X un fermé H vérifiant les conditions du lemme 3, et nous démontrons que H est homéomorphe à $Q \times N^N$. Soit Δ le sous-espace de $\{0, 1\}^N$ formé des points dont les coordonnées sont toutes nulles sauf un nombre fini. Puisque Δ est dénombrable sans point isolé, il est homéomorphe à Q. Nous désignerons par δ_s le point de Δ dont les coordonnées non nulles sont celles d'indices $n_1, n_1+n_2, \ldots, n_1+n_2+\ldots+n_k$ si $s = (n_1, \ldots, n_k)$ et par Δ_s l'ensemble des δ_t pour $s<t$.

On sait aussi que N^N est homéomorphe à tout intervalle de l'ensemble J des irrationnels de $[0, 1]$. On va déterminer pour chaque $s \in S$ un $t(s) \in S$ de même longueur, un intervalle $[\alpha_s, \beta_s]$ à extrémités rationnelles de J, donc ouvert et fermé dans J, et une homéomorphie θ de $M_s \cap X$ sur $\{\delta_{t(s)}\} \times [\alpha_s, \beta_s]$ en sorte que l'application θ définie sur H par recollement vérifie

$\theta(\omega_s \cap X) = \Delta_{t(s)} \times [\alpha_s, \beta_s]$,

$|\beta_s - \alpha_s| = 2^{-\nu(t(s))}$,

$\exists (x_n)$ suite dans $M_s \cap X$ telle que $d(x_n, M_{s,n}) \to 0$ et $|\pi_2 \circ \theta(x_n) - \alpha_{s,n}| \to 0$.

Pour $s = \varnothing$, la quatrième condition de l'énoncé du lemme 3 donne l'existence d'un homéomorphisme θ de $M_\varnothing \cap X$ sur $\{\delta_\varnothing\} \times J$. Si on a construit $t(s)$, α_s et β_s pour tout s de longueur k, ainsi que les homéomorphismes θ, et si $s \in S$ est de longueur k, on va désigner par W_{ij} les fermés suivants de $\Delta_{t(s)} \times [\alpha_s, \beta_s]$, tous homéomorphes à J:

$$W_{i,j} = \{\delta_{t(s),i}\} \times \left[\alpha_s + \frac{j-1}{2^i}(\beta_s - \alpha_s);\ \alpha_s + \frac{j}{2^i}(\beta_s - \alpha_s)\right], \qquad i \in N,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^i$$

qui forment une partition dénombrable de $\{\delta_{t(s),i} \mid i \in N\} \times [\alpha_s, \beta_s]$.

Ordonnons en une suite (W_n) ces fermés et choisissons pour chaque n un point ξ_n dans $\pi_2(W_n)$ (où π_2 est la projection de $\Delta\times J$ sur J) et un point x_n de $M_s\cap X$ tel que $d(x_n; M_{s,n})<2d(M_s; M_{s,n})$. On peut trouver d'après le lemme 4 une bijection φ de N sur lui-même telle que $d(\pi_2\circ\theta(x_n), \xi_{\varphi(n)})\to 0$. On choisit alors pour tout n une homéomorphie θ de $M_{s,n}\cap X$ sur $W_{\varphi(n)}$ et on pose

$\{t(s, n)\} = \pi_1(W_{\varphi(n)})$,

$\alpha_{s,n}$ et $\beta_{s,n}$ sont les bornes de $\pi_2(W_{\varphi(n)})$.

On voit aisément que $|\beta_{s,n}-\alpha_{s,n}| = 2^{-\nu(t(s,n))}$. On voit aussi que la bijection φ a été choisie en sorte que la troisième condition soit réalisée.

Soit maintenant (z_i) une suite de points de H qui converge vers $z\in M_s\cap X$. Pour démontrer la convergence de $\theta(z_i)$ vers $\theta(z)$, on peut supposer que tous les z_i sont dans ω_s. On partage alors la suite (z_i) en deux sous-suites (z_i') et (z_i''), la première étant formée des termes appartenant à $M_s\cap X$ et la seconde des termes appartenant à $(\bigcup_n \omega_{s,n})\cap X$. Si la suite (z_i') est infinie, on a bien $\theta(z_i')\to\theta(z)$ puisque $\theta|_{M_s\cap X}$ est un homéomorphisme. Si la suite (z_i'') est infinie, il existe pour tout i un entier $n(i)$ tel que $z_i''\in\omega_{s,n(i)}$ et $n(i)\to\infty$. La construction montre que

$$d(\pi_2\circ\theta(z_i''); \alpha_{s,n(i)})\to 0 .$$

De plus,

$$d(\pi_2\circ\theta(x_{n(i)}); \alpha_{s,n(i)})\to 0 \quad\text{et}\quad \delta_s = \lim_{i\to\infty}\pi_1\circ\theta(z_i'') .$$

On en déduit que $d(\theta(z_i''), \theta(x_{n(i)}))$ tend vers 0. Mais on a aussi;

$$\begin{aligned} d(z, x_{n(i)}) &\leqslant d(z, z_i'')+d(z_i'', x_{n(i)})\\ &\leqslant d(z, z_i'')+\operatorname{diam}\omega_{s,n(i)}+2d(M_s; M_{s,n(i)})\to 0 .\end{aligned}$$

On aura donc $x_{n(i)}\to z$ et $\theta(x_{n(i)})\to\theta(z)$. Donc $(\theta(z_i''))$ convergera vers $\theta(z)$, ce qui termine de prouver la continuité de θ.

Inversement, si $\theta(z_i)\to\theta(z)\in\theta(M_s\cap X)$ et si on suppose que $\theta(z_i)$ appartient pour tout i au voisinage ouvert $\Delta_{t(s)}\times[\alpha_s, \beta_s]$ de $\theta(z)$, on partage la suite (z_i) en deux soussuites (z_i') et (z_i''), la première formée des termes tels que $\pi_1\circ\theta(z_i') = \delta_{t(s)}$ la seconde des autres termes. Puisque θ est un homéomorphisme sur $M_s\cap X$, (z_i') converge vers z, si la suite (z_i') est infinie. Si la suite (z_i'') est infinie, il existe pour tout i un entier $n(i)$ tel que $z_i''\in\omega_{s,n(i)}$ et $n(i)\to\infty$ puisque $\pi_1\circ\theta(z_i'')\to\delta_s$.

Alors, puisque $\operatorname{diam}\omega_{s,n(i)}\to 0$, $d(x_{n(i)}, z_i'')\to 0$. Puisque, par construction, $d(\theta(z_i''), \theta(x_{n(i)}))\to 0$, on peut conclure que $\theta(x_{n(i)})\to\theta(z)$, donc que $x_{n(i)}\to z$ car $x_{n(i)}\in M_s\cap X$ et $\theta|_{M_s\cap X}$ est un homéomorphisme. On déduit enfin que $z_i''\to z$, ce qui termine de prouver la continuité de θ^{-1}.

Par conséquent, l'application θ que nous avons construite est bien un homéomorphisme de H sur $\Delta\times J$, qui est lui-même homéomorphe à $Q\times N^N$.

THÉORÈME 6. *Si le sous-espace X du compact métrisable L n'est pas union d'un K_σ et d'un G_δ, FX n'est pas borélien dans KL.*

Si X n'est pas borélien, FX ne l'est pas non plus, car X s'identifie à un fermé de FX par le plongement: $x\to\{x\}$.

Si X est borélien, sans être l'union d'un K_σ et d'un G_δ, il contient un fermé H qui vérifie les conditions du lemme 3.

Soit A un analytique non borélien de $C = \{0, 1\}^N$. On démontre comme dans [3] qu'il existe pour tout $s\in S$ une application s.c.i. T_s de C dans l'espace KM_s des compacts non vides de M_s telle que $T_s(\lambda)\subset M_s\setminus X$ si $\lambda\notin A$ et $T_s(\lambda)\cap X\neq\emptyset$ si $\lambda\in A$.

Il existe pour tout $s\in S$ une suite de nombres $\varepsilon_{s,n}$ décroissant vers 0 telle que la suite d'ouverts $U_{s,n}$ de M_s définie par

$$U_{s,n} = \{x\in M_s|\ d(x; M_{s,n})<d(M_s; M_{s,n})+\varepsilon_{s,n}\}$$

forme une base de la topologie de M_s. De plus $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{diam}U_{s,n}) = 0$. Nous définissons pour tout $\lambda\in C$ une partie $J(\lambda)$ de S par

$$\emptyset\in S(\lambda) ,$$

$$(s, n)\in S(\lambda)\quad\text{si}\quad s\in S(\lambda)\ \text{et}\ T_s(\lambda)\cap U_{s,n}\neq\emptyset .$$

Nous poserons enfin:

$$K(\lambda) = \overline{\bigcup_{s\in S(\lambda)} T_s(\lambda)} .$$

Puisque T_s est s.c.i., on voit sans peine par une récurrence sur $|s|$ que pour tout $s\in S\{\lambda\in C|\ s\in S(\lambda)\}$ est ouvert dans C, et par conséquent que K est s.c.i., donc borélienne de première classe de C dans KL.

De plus, si $\lambda\in A$, et si V est un ouvert qui rencontre $K(\lambda)$, il existe $s\in S(\lambda)$ tel que $V\cap T_s(\lambda)\neq\emptyset$. Si a appartient à $V\cap T_s(\lambda)$, il existe $\varepsilon>0$ tel que la boule de centre a et de rayon ε soit contenue dans V. Il existe un entier n tel que:

$$\operatorname{diam}M_{s,n}<\tfrac14\varepsilon;\qquad \varepsilon_{sn}<\tfrac14\varepsilon ,$$

$$d(M_s; M_{s,n})\leqslant\sup_{y\in M_{s,n}} d(y, M_s)<\tfrac14\varepsilon,$$

$$a\in U_{s,n}\subset B(a, \tfrac12\varepsilon)\cap M_s .$$

Il en résulte que

$$d(a; M_{s,n})<\varepsilon_{s,n}+d(M_s; M_{s,n})<\tfrac12\varepsilon$$

et

$$M_{s,n}\subset B(a, \tfrac12\varepsilon+\operatorname{diam}M_{s,n})\subset B(a, \varepsilon)\subset V .$$

De plus, $(s, n)\in S(\lambda)$ puisque $s\in S(\lambda)$ et $a\in U_{s,n}\cap T_s(\lambda)$. Et puisque $T_{s,n}(\lambda)\cap X\neq\emptyset$ car $\lambda\in A$, on a $V\cap X\cap K(\lambda)\neq\emptyset$ car cet ensemble contient $X\cap T_{s,n}(\lambda)$; et ceci montre que $X\cap K(\lambda)$ est dense dans $K(\lambda)$, donc que $K(\lambda)\in FX$.

Inversement, si $\lambda\notin A$, on sait que pour tout $s\in S$, $T_s(\lambda)\cap X = \emptyset$. Donc si $a\in X\cap K(\lambda)$, on doit avoir $a\in M_s\cap X\setminus T_s(\lambda)$; comme $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{diam}U_{s,n}) = 0$, $d(U_{s,n}; M_{s,n})\to 0$ et $\operatorname{diam}\omega_{s,n}\to 0$, a n'est pas adhérent à $\bigcup_{(s,n)\in S(\lambda)}\omega_{s,n}$. Donc

$\omega_s \setminus T_s(\lambda) \setminus \overline{\bigcup_{(s,n) \in S(\lambda)} \omega_{s,n}}$ est un voisinage de a disjoint de $K(\lambda)$. Donc $K(\lambda) \cap X = \emptyset$ alors que $K(\lambda) \neq \emptyset$. Il en résulte que $K(\lambda) \notin FX$.

Donc $A = K^{-1}(FX)$. Et si FX était borélien dans KL, il en serait de même de A dans C, contrairement à l'hypothèse faite sur A, et ceci démontre le théorème.

COROLLAIRE 7. *Pour que la structure borélienne de FX soit standard, il faut et il suffit que X soit union d'un K_σ et d'un polonais.*

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 1 et 6.

Bibliographie

[1] J. P. R. Christensen, *Topology and Borel structure.*
[2] W. Hurewicz, *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen* (*A*), Fund. Math. 12 (1928), pp. 78–109.
[3] J. Saint Raymond, *Topologie sur l'ensemble des compacts...* Sém. Choquet 1969–70.

UNIVERSITÉ PARIS
MATHÉMATIQUES TOUR

Accepté par la Rédaction le 29. 3. 1976

On pure semi-simple Grothendieck categories I

by

Daniel Simson (Toruń)

Abstract. A Grothendieck category $\mathcal{A}$ is called *pure semi-simple* if it is locally finitely presented and each of its objects is pure-projective. It is shown that $\mathcal{A}$ is pure semi-simple if and only if a coproduct of any family of pure-injective objects in $\mathcal{A}$ is pure-injective. We study pure semi-simple categories with a finite number of non-isomorphic simple objects. Every such category is locally finite and, under some special assumptions, is equivalent to a module category over a ring. Applying Auslander's results ([2], [3]) we obtain connections between pure semi-simple categories and categories of finite representation type. For instance, the category of all left modules R-Mod over an artin algebra R is pure semi-simple if and only if R is of finite representation type.

Introduction. Let $\mathcal{A}$ be a locally finitely presented Grothendieck category. $\mathcal{A}$ is called *pure semi-simple* if it has pure global dimension zero, which means that each of its objects is a direct summand of a coproduct of finitely presented objects (see [19] and [20]). A ring R will be called *left pure semi-simple* if the category R-Mod of all left R-modules is pure semi-simple.

A characterization of pure semi-simple categories is given in [18] and [20], where, among others things, it is proved that $\mathcal{A}$ is pure semi-simple if and only if $\mathcal{A}$ is pure-perfect, or equivalently, $\mathcal{A}$ satisfies a pure quasi-Frobenius property [see [18]), or equivalently, every object of $\mathcal{A}$ is a coproduct of indecomposable noetherian subobjects with left coperfect local endomorphism rings.

In the present paper we prove that $\mathcal{A}$ is pure semi-simple if and only if it satisfies the following pure noetherian property: a coproduct of any family of pure-injective objects in $\mathcal{A}$ is pure-injective. The idea of the proof is essentially due to Gruson and Jensen [10] and is the following. The category $\mathcal{A}$ is embedded in some locally coherent Grothendieck category $D(\mathcal{A})$ as its full subcategory consisting of all FP-injective objects (see [22]) and in such a way that the classes of pure-injective objects in $\mathcal{A}$ and injective objects in $D(\mathcal{A})$ coincide. Moreover, pure exact sequences in $\mathcal{A}$ are exact in $D(\mathcal{A})$. As a simple corollary we obtain a result, proved in [20], which asserts that any locally finitely presented Grothendieck category has enough pure-injective objects. These results are contained in Section 1.

In Section 2 we study pure semi-simple categories with a finite number of non-isomorphic simple objects. It is shown that such a category is always locally finite. The classification of these categories is reduced to the classification of left artinian