Общая точка зрения на λ-дендроиды и теоремы о неподвижных точках

Р. Г. Гуревич (Ленинград)

λ-дендроид есть наследственно уникогерентный, наследственно разложимый метрический континуум. Множество его подконтинуумов образует решётку. Существуют негомеоморфные λ-дендроиды с изоморфными решётками подконтинуумов. Например, таковы замыкания на плоскости графиков функций $x \mapsto \sin(1/x)$ и $x \mapsto (\sin(1/x) - 1/2)^2$, где $x \in (0, 1]$.

Большинство известных теорем о λ-дендроидах ([4], [5]) говорит о свойствах решёток подконтинуумов и имеет естественные аналоги в неметризуемом случае. Это дает основания ввести класс решёток, обобщающих решётки подконтинуумов λ-дендроидов (HD-решётки) и решётки, соответствующие решёткам подконтинуумов дендроидов и деревьев. При этом удаётся получить обобщения многих теорем о λ-дендроидах и упростить их доказательства. Возможности такого подхода демонстрируются теоремами о неподвижной точке. Соответственно этому континуумы в настоящей работе не предполагаются метризуемыми.

§ 1. Решётки

1.1. Наследственная уникогерентность: *HU*-решётки. Пусть X множество, L — *решётка* ([3], стр. 49) некоторых его подмножеств с порядком $\subseteq$, т.е. включением, содержащая все одноточечные подмножества и пустое множество $\emptyset$. L называется *HU-решёткой*, если удовлетворяет условиям

(11) $\forall a, b, c \in L\colon\ a \wedge b \neq \emptyset \,\&\, b \wedge c \neq \emptyset \,\&\, c \wedge a \neq \emptyset \Rightarrow a \wedge b \wedge c \neq \emptyset,$

(12) $\forall a, b, c \in L\colon\ a \wedge b \neq \emptyset \Rightarrow (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$

(13) всякое непустое подмножество L имеет inf, т.е.

$$\forall M \subseteq L\colon\ M \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in L\colon\ a = \inf M.$$

(14) inf всякой центрированной системы в L отличен от $\emptyset$.

Условия (11-14) не влекут за собой соответственной метризуемости множества X (см. 1.5, г).

Замечания. а) Из (11) видно, что подмножество L центрировано если $\wedge$ любых двух его элементов отличен от $\varnothing$.

б) Из предположения, что HU-решётка содержит все одноточечные подмножества, следует, что inf совпадает с $\bigcap$ и $a \vee b = a \cup b$ для $a \wedge b \neq \varnothing$, так как если $\xi \notin a \cup b$, то ввиду (12)

$$\{\xi\} \cap (a \vee b) = (\{\xi\} \cap a) \vee (\{\xi\} \cap b) = \varnothing \vee \varnothing = \varnothing .$$

В дальнейшем точки из X и одноточечные множества из L различаться не будут, всюду далее греческие строчные буквы обозначают точки. В случае, когда $X \in L$, из предположения (13) следует, что всякое непустое подмножество L имеет sup, т.е. тогда решётка L *полна* ([3], стр. 90). Будет использоваться обозначение $a \subset b$, если $a \subseteq b$ и $a \neq b$.

Примеры. а) Решётка подконтинуумов наследственно уникогерентного континуума.

б) Решётка дугообразно связных подмножеств дендроида, замкнутых в слабой топологии, порождённой дугами ([7], стр. 480).

в) Решётка подконтинуумов прямой.

1.2. λ-дендроиды: HD-решётки и их элементарные свойства. HU-решётка L называется *HD-решёткой*, если каждый её элемент, отличный от точки и $\varnothing$, разложим, т.е.

$$(15) \qquad \forall a \in L \setminus \{\varnothing\}\colon a \notin X \Rightarrow \exists b, c \in L\colon a = b \vee c \,\&\, b \wedge c \neq \varnothing \,\&\, b \neq a \neq c .$$

Такая пара b, c будет называться *разложением* a.

Будем говорить, что множество $Y \subseteq X$ порождает $a \in L$, если $a = \sup Y$; если, кроме того, мощность $|Y| = n$, тогда будем говорить, что a *n-порождён*. Для 2-порождённых элементов, т.е. элементов вида $\alpha \vee \beta$, будет использоваться обозначение $[\beta]_\alpha = \{\gamma \in X \mid \alpha \vee \gamma = \alpha \vee \beta\}$.

Справедливы следующие утверждения для элементов HD-решёток, отличных от $\varnothing$:

(i) *Если* $a \wedge b = \varnothing$, *то существуют* $\alpha \in a$ *и* $\beta \in b$ *такие, что* $\alpha \vee \beta = \bigcap \{x \in L \mid x \wedge a \neq \varnothing \neq x \wedge b\}$ *и тогда* $(\alpha \vee \beta) \wedge b \subseteq [\beta]_\alpha$.

(ii) *Если* $a \wedge b = \varnothing$, *то существует пара* x, y — *разложение элемента* $a \vee b$ *такая, что* $x \wedge b = \varnothing = y \wedge a$.

(iii) *Если* $\alpha, \beta \in X$, *то* $[\beta]_\alpha = \bigcap \{\beta \vee \delta \subseteq \beta \vee \alpha \mid (\beta \vee \delta) \wedge (\delta \vee \alpha) \subseteq [\delta]_\beta\}$ *и тогда* $[\beta]_\alpha \in L$.

(iv) *Если* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$, $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma$ *и* $\beta \vee \delta \neq \gamma \vee \delta$, *то* $\beta \in \alpha \vee \delta$ *и* $\alpha \notin \beta \vee \delta$.

(v) *Если* $\alpha \in a$ *и не существует разложение* p, q *элемента* a *такого, что* $\alpha \in p \cap q$, *то* a *2-порождён.*

(vi) *Если* $\alpha \vee \beta = \sup_{i \in I} \alpha \vee \beta_i$, *где* $\alpha, \beta, \beta_i \in X$, I *произвольное множество, то*

а) $$\alpha \notin \beta_i \vee x \text{ для всех } i \in I \Rightarrow \alpha \notin \beta \vee x,$$

б) $$\gamma \in \alpha \vee \beta \setminus [\beta]_\alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha \vee \beta_i \setminus [\beta_i]_\alpha \text{ для некоторого } i \in I.$$

Доказательство. (i) Из замечания а) пункта 1.1 следует, что достаточно проверить, что из $x \wedge a \neq \varnothing \neq x \wedge b$ и $y \wedge a \neq \varnothing \neq y \wedge b$ следует $x \wedge y \wedge a \neq \varnothing \neq x \wedge y \wedge b$. Последнее утверждение следует из (11) и замечания б) п. 1.1.

(ii) Возьмём α, β как в (i). Пусть пара p, q разлагает $\alpha \vee \beta$, $\alpha \in p$. Положим $x = a \cup p$, $y = b \cup q$.

(iii) Включение $\subseteq$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\gamma \in \alpha \vee \beta \setminus [\beta]_\alpha$. Тогда $\alpha \vee \gamma \subset \alpha \vee \beta$ и потому $\beta \notin \alpha \vee \gamma$. Пусть пара p, q разлагает $\beta \vee \gamma$, $\gamma \notin q$. Тогда $\beta \wedge (\alpha \vee \gamma \vee p) = \varnothing$ и, по (i), найдётся δ такое, что $(\beta \vee \delta) \wedge (\delta \vee \alpha) \subseteq [\delta]_\beta$ и $\beta \vee \delta = \bigcap \{x \in L \mid \beta \wedge x \neq \varnothing \neq x \cap (\alpha \vee \gamma \vee p)\}$. Вследствие этого $\beta \vee \delta \subseteq q$, и потому $\gamma \notin \beta \vee \delta$.

(iv) Докажем сначала первую часть утверждения. Предположим противное, тогда $\alpha \vee \delta \cap [\beta]_\alpha = \varnothing$. Применим (i): пусть $\zeta \in \alpha \vee \delta$ и $\zeta \vee [\beta]_\alpha = \bigcap \{\lambda \vee [\beta]_\alpha \mid \lambda \in a \vee \delta\}$. Тогда $\beta \vee \delta = \beta \vee \zeta \cup \zeta \vee \delta$, $\gamma \vee \delta = \gamma \vee \zeta \cup \zeta \vee \delta$ и $\alpha \vee \zeta \cup \zeta \vee \gamma = \alpha \vee \gamma = \alpha \vee \beta = \alpha \vee \zeta \cup \zeta \vee \beta$. Так как $\beta \vee \zeta$ и $\gamma \vee \zeta$ могут различаться лишь в $[\beta]_\alpha$, из написанных равенств следует $\beta \vee \delta = \gamma \vee \delta$ (противоречие).

Докажем теперь вторую часть утверждения. Предположим противное: $\alpha \in \beta \vee \delta$. Вместе с первой частью утверждения это даёт $\alpha \vee \delta = \beta \vee \delta$, т.е. $\alpha \in [\beta]_\delta$, откуда $[\beta]_\delta \supseteq \alpha \vee \beta \in \gamma$, и $\gamma \vee \delta = \beta \vee \delta$ (противоречие).

(v) Положим $Q = \{q \in L \mid \alpha \notin q \,\&\, \exists\, p \in L\colon \text{пара } p,\ q \text{ разлагает } a\}$. Ясно, что Q центрировано и $a = \alpha \vee q$ для $q \in Q$. Положим $b = \inf Q \neq \varnothing$. Тогда $a = \alpha \vee b$ и $a = \alpha \vee \beta$ для $\beta \in b$. Предположим противное. Пусть пара r, s разлагает b, $\beta \in r$. Если $\alpha \vee \beta \cup r \neq a$, то пара $\alpha \vee \beta \cup r, s$ разлагает a и $s \in Q$ (противоречие); если $\alpha \vee \beta \cup r = a$, то пара $\alpha \vee \beta$, r разлагает a и $r \in Q$ (противоречие).

(vi) а) Предположим противное, $\alpha \in \beta \vee x$. Пусть пара p, q разлагает $\alpha \vee \beta$ и $\alpha \notin q$. Пусть $\beta_i \in q$. Тогда $\alpha \in \beta \vee x \subseteq q \vee x = q \cup \beta_i \vee x$ и потому $\alpha \in \beta_i \vee x$.

б) Пусть пара p, q разлагает $\alpha \vee \beta$, $\alpha \in p$, $\beta \in q$ и $\gamma \notin q$. Пусть $\beta_i \in q \setminus p$. Тогда $\gamma \in \alpha \vee q = \alpha \vee \beta_i \cup q$ и потому $\gamma \in \alpha \vee \beta_i$; $\alpha \vee \gamma \neq \alpha \vee \beta_i$ так как $\alpha \vee \gamma \subseteq p$.

Замечания. а) В утверждении (iii) можно принять, что пара $\beta \vee \delta$, $\delta \vee \alpha$ разлагает $\alpha \vee \beta$.

б) Утверждение (v) является обобщением теоремы Куратовского ([1], p. 270, Th. XIX). Из этого утверждения легко следует, что sup возрастающей $\subseteq$-направленности 2-порождённых элементов HU-решётки 2-порождён.

Примеры. а) Решётка подконтинуумов λ-дендроида.

б) Решётка подконтинуумов букета λ-дендроидов.

в) Пусть X — λ-дендроид и пусть задана последовательность пар λ-дендроидов $X_i \supseteq Y_i$ и непрерывных отображений f_i: $Y_i \to X$. Приклеим все X_i к X по отображениям f_i. Полученное пространство можно естественным образом сделать λ-дендроидом. Эта конструкция имеет аналог для HD-решёток.

Следующие три пункта в дальнейшем использоваться не будут, но они включены ввиду их самостоятельного интереса.

1.3. Решеточная топология. Пусть X — множество, L — HU-решётка его подмножеств. Если $X \in L$, тогда, взяв L в качестве предбазы замкнутых подмножеств ([2], I, стр. 59, замечание 4), определим топологию на X, которую обозначим τ_L. Полученное пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 и компактно ([2], II, стр. 7-11).

Предложение. *Пусть L есть HD-решётка. Тогда L есть множество всех замкнутых связных подмножеств X.*

Доказательство. Проверим, что всякий элемент из L связен (обратное утверждение для замкнутых подмножеств X тривиально). Предположим противное: $a \in L$, $a = P \cup Q$, где P, Q — непустые непересекающиеся замкнутые множества. Поскольку X компактно, существует элемент $b \in L$, минимальный по отношению к свойству $b \cap P \neq \emptyset \neq b \cap Q$ и $b \subseteq a$. Пусть пара b_1, b_2 разлагает b. Тогда $b_1 \cap b_2 \cap P \neq \emptyset$ либо $b_1 \cap b_2 \cap Q \neq \emptyset$, откуда $b_1 \cap P \neq \emptyset \neq$ $\neq b_1 \cap Q$ либо $b_2 \cap P \neq \emptyset \neq b_2 \cap Q$, что противоречит минимальности b.

Заметим, что если L — решётка подконтинуумов наследственно уникогерентного континуума, то решёточная топология обычно не является хаусдорфовой и потому отличается от исходной.

1.4. Деревья. HU-решётка L называется *T-решёткой*, если каждый элемент из L можно разложить между любыми двумя его точками, т.е.

$$(16)\quad \forall\, x \in L\colon \forall\, \alpha, \beta \in x\colon \alpha \neq \beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, a, b \in L\colon \alpha \notin b \,\&\, \beta \notin a \,\&\ \text{пара } a,\ b \text{ разлагает } x.$$

Очевидно, условие (16) значительно сильнее, чем (15).

Предложение. *Пусть $X \in L$, L есть HD-решётка. Пространство $\langle X, \tau_L\rangle$ хаусдорфово и если и только если*

$$(17)\quad \forall\, a, b, c\colon a \wedge b = \emptyset \,\&\, a \vee b \subseteq c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, p, q \in L\colon a \cap q = b \cap p = \emptyset \,\&\ \text{пара } p,\ q \text{ разлагает } c.$$

Доказательство. Очевидно, (17) $\Rightarrow$ (16) $\Rightarrow$ $\langle X, \tau_L\rangle$ хаусдорфово $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\langle X, \tau_L\rangle$ нормально. Достаточно проверить (17) для $c = X$. Пусть $a, b \in L$, $a \cap b = \emptyset$. Пусть A, B — непересекающиеся окрестности a, b соответственно. Можно считать, что $X \setminus A$, $X \setminus B$ есть конечные объединения элементов из L. Теперь легко построить (например, индукцией по количеству компонент в $X \setminus A$ и $X \setminus B$) $\tilde a$, $\tilde b \in L$ такие, что $X = \tilde a \cup \tilde b$ и $\tilde a \cap b = a \cap \tilde b = \emptyset$.

Следствие. *Для HU-решёток* (16) $\Leftrightarrow$ (17).

Доказательство. Применим предыдущее предложение к $\langle c, L_c\rangle$, где $L_c = \{x \in L \mid x \subseteq c\}$.

Деревом называется локально связный наследственно уникогерентный континуум.

Заметим, что если L есть T-решётка и $X \in L$, то $\langle X, \tau_L\rangle$ — дерево и, что если L — решётка подконтинуумов дерева $\langle X, \tau_L\rangle$ то $\tau = \tau_L$.

Примеры: а) Решётка подконтинуумов дерева.

б) Пусть в пространстве X для любых двух точек α, β существует единственный *обобщённый отрезок* с концами α, β, т.е. дерево с двумя концевыми точками α и β. Введём на X слабую топологию, порождённую обобщёнными отрезками. Тогда множество дугообразно связных слабокомпактных подмножеств X образует T-решётку (см. п. 2.4).

1.5. Дендроиды: D-решётки. HU-решётка L называется *D-решёткой*, если всякий 2-порождённый (и следовательно, всякий конечнопорождённый) элемент $c \in L$ удовлетворяет условию (17).

Замечания. а) Решётка подконтинуумов дендроида есть D-решётка.

б) Всякой D-решётке L подмножеств множества X естественным образом соответствует T-решётка $L' \supseteq L$:

$$L' = \{x \subseteq X \mid x \text{ слабокомпактен} \,\&\, \forall\, a \in L\colon a \text{ — конечнопорождённый} \Rightarrow x \cap a \in L\}.$$

в) Существует D-решётка, не являющаяся HD-решёткой: возьмём бесконечнопорождённый дендроид X и положим

$$L = \{a \subseteq X \mid a \text{ — конечнопорождённый континуум}\}.$$

Тогда $L' = L \cup \{X\}$ есть D-решётка, но не HD-решётка.

г) Существует D-,HD-решётка с максимальным элементом, не являющаяся решёткой подконтинуумов континуума удовлетворяющего аксиоме отделимости T_2: возьмём последовательность отрезков на плоскости с общим концом и сходящуюся к отрезку, предельный отрезок заменим обобщённым отрезком мощности $> 2^{2^{\mathfrak{c}}}$, где $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

§2. Теоремы о неподвижной точке

2.1. Отображения HD-решёток. Пусть L_1, L_2 — HD-решётки. Будут рассматриваться лишь отображения F: $L_1 \to L_2$, удовлетворяющие условиям

$$(\mathrm{f}1)\qquad F(\emptyset) = \emptyset,$$

$$(\mathrm{f}2)\qquad \forall a, b \in L_1\colon a \wedge b \neq \emptyset \Rightarrow F(a \cup b) = F(a) \cup F(b),$$

$$(\mathrm{f}3)\qquad \{a_i\}_{i \in J} \subseteq L \text{ — убывающая направленность} \Rightarrow F\Big(\bigcap_i a_i\Big) = \bigcap_i F(a_i).$$

Из этих условий легко получить

(f2′) $$\forall x \in L_1 \colon F(x) = \bigcup_{\xi \in x} F(\xi) .$$

Из (f3) следует существование для многих Φ элемента $k \in L$, минимального по отношению к свойству Φ. Утверждения такого рода нужные для дальнейшего изложения, доказываться не будут ввиду их тривиальности.

Пример: L_1, L_2 — решётки подконтинуумов λ-дендроидов, F — полунепрерывное сверху континуум-значное отображение.

Отметим, что условия (f1,2,3) значительно слабее полунепрерывности сверху.

2.2. Теорема Маньки: подготовительные результаты. Пусть L есть HD-решётка, $X \in L$. Тогда решётка L полна. Пусть $F\colon L \to L$ удовлетворяет условиям (f1, 2, 3); $\alpha, \beta \in X$. Положим $\alpha \vee \beta \in P_\alpha$, если

(*) $$\alpha \notin \beta \vee F(\alpha) ,$$

(**) $$\varkappa \in \alpha \vee \beta \setminus [\beta]_\alpha \Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \varkappa \vee \beta \colon \varkappa \notin \lambda \vee \mu \vee \beta \;\&\; \lambda \in \varkappa \vee \mu \setminus \mu \vee F(\lambda) .$$

Корректность этого определения очевидна (легко проверить, что оно не изменится, если в каждом вхождении β в качестве точки произвести замену $\beta \mapsto [\beta])_\alpha$.

Если $\alpha \vee \beta = \sup\limits_{i \in J} \alpha \vee \beta_i$ и $\alpha \vee \beta_i \in P_\alpha$, для каждого i, то $\alpha \vee \beta \in P_\alpha$ (см. 1.2, (vi)); если $\alpha \notin F(\alpha) \vee \beta \vee \gamma$, $\beta \in \alpha \vee \gamma$ и $\beta \vee \gamma \in P_\beta$, то $\alpha \vee \gamma \in P_\alpha$ (следует для $\varkappa \in \alpha \vee \gamma \setminus [\gamma]_\alpha$ искать надлежащие λ, μ в $\beta \vee \gamma$ для $\gamma \in \alpha \vee \beta$ и в $\zeta \vee \gamma$, где $\zeta \in \alpha \vee \beta$, $\gamma \vee \zeta = \bigcap \{\gamma \vee \eta |\ \eta \in \alpha \vee \beta\}$, для $\gamma \notin \alpha \vee \beta$).

Предложение. *Если* $\alpha \vee \beta \in P_\alpha$ *и* $F([\beta]_\alpha) \cap [\beta]_\alpha = \varnothing$, *то*

(а) $$\forall \gamma \in F([\beta]_\alpha) \colon \beta \in \alpha \vee \gamma ,$$

(б) $$\alpha \vee \beta \cap F([\beta]_\alpha) = \varnothing ,$$

(в) $$\alpha \notin \beta \vee F([\beta]_\alpha) ,$$

(г) $$\alpha \vee \beta \cap \beta \vee F([\beta]_\alpha) \subseteq [\beta]_\alpha .$$

Доказательство. (а) Предположим противное, тогда $[\beta]_\alpha \cap \alpha \vee F([\beta]_\alpha) = \varnothing$. Пусть пара $\alpha \vee \varkappa$, $\varkappa \vee \beta$ разлагает $\alpha \vee \beta$ и $\varkappa \vee \beta \cap \alpha \vee F(\varkappa \vee \beta) = \varnothing$ (см. 1.2 (iii) и замечание а). Для этой точки $\varkappa$ должны найтись надлежащие λ, μ. Можно считать, что $\varkappa \in \alpha \vee \mu$. Тогда для $\lambda \in \varkappa \vee \mu$ имеем

$$\lambda \in \mu \vee \alpha \cup \alpha \vee F(\varkappa \vee \beta) = \mu \vee \zeta \cup \zeta \vee \alpha \cup \zeta \vee F(\lambda) \cup F(\varkappa \vee \beta) ,$$

где $\varkappa \vee \zeta = \bigcap \{\varkappa \vee \eta |\ \eta \in \alpha \vee F(\varkappa \vee \beta)\}$ (см. 1.2 (i)). Отсюда

$$\lambda \in \mu \vee \zeta \cup \zeta \vee F(\lambda) = \mu \vee F(\lambda) \text{ (противоречие).}$$

(б) Из (а) видно, что $\alpha \vee \beta \cap F([\beta]_\alpha) \subseteq [\beta]_\alpha$, откуда и следует требуемое.

(в) Пусть пара $\alpha \vee \varkappa$, $\varkappa \vee \beta$ разлагает $\alpha \vee \beta$ и (см. 1.2 (iii) и замечание а) $\varkappa \vee \beta \cap F(\varkappa \vee \beta) = \varnothing$. Возьмём для $\varkappa$ надлежащие λ, μ. Тогда

$$\lambda \notin \mu \vee F(\lambda) \cup F(\varkappa \vee \beta) = \mu \vee F(\varkappa \vee \beta) .$$

Теперь предположим, что $\alpha \in \beta \vee F([\beta]_\alpha)$, т.е. $\alpha \in \beta \vee \gamma$ для $\gamma \in F([\beta]_\alpha)$. Учитывая (а), получаем $\alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma$, откуда $\alpha \vee \beta \subseteq [\alpha]_\gamma$. Тогда

$$\lambda \vee \gamma = \mu \vee \gamma \text{ и } \lambda \vee F(\varkappa \vee \beta) = \mu \vee F(\varkappa \vee \beta) \text{ (противоречие).}$$

(г) Предположим противное. Пусть $\varkappa \in \alpha \vee \beta \cap \beta \vee F([\beta]_\alpha) \setminus [\beta]_\alpha$ и $\alpha \vee \beta \cap F(\varkappa \vee \beta) = \varnothing$. Для $\varkappa$ должны найтись надлежащие λ, μ. Однако

$$\varkappa \in \beta \vee F(\varkappa \vee \beta) = \beta \vee \mu \cup \mu \vee F(\lambda) \cup F(\varkappa \vee \beta) ,$$

откуда $\varkappa \in \mu \vee F(\lambda)$. Следовательно, $\lambda \in \mu \vee F(\lambda)$ (противоречие).

Покажем теперь, что иногда $P_\alpha \neq \varnothing$. Пусть $k \in L$ и k минимален по отношению к свойству $k \cap F(k) \neq \varnothing$. Тогда $k \in X$ либо $k = \alpha \vee \beta \bigcap \{\alpha \vee \eta |\ \eta \in F(\alpha)\}$ для некоторых $\alpha \neq \beta$. Покажем, что в последнем случае $k \in P_\alpha$. Достаточно проверить (**). Для $\varkappa \in k \setminus [\beta]_\alpha$ найдём λ, μ следующим образом: пусть пара $\varkappa \vee \lambda'$, $\lambda' \vee \beta$ разлагает $\varkappa \vee \beta$, пара $\lambda' \vee \mu$, $\mu \vee \beta$ разлагает $\lambda' \vee \beta$ и $\lambda \in \varkappa \vee \lambda' \cap \lambda' \vee \beta \cap \varkappa \vee \mu$. Тогда $\lambda \notin \mu \vee \beta \cup F(\alpha \vee \lambda) \supseteq \mu \vee F(\lambda)$.

Поскольку решётка L полна, для любого $\alpha \vee \beta \in P_\alpha$ существует $\alpha \vee \gamma \in P_\alpha$ такой, что $\alpha \vee \beta \subseteq \alpha \vee \gamma$ и $\alpha \vee \gamma$ максимален в P_α (см. 1.2, замечание б).

2.3. Теорема Маньки. Пусть $X \in L$, $F\colon L \to L$ удовлетворяет условиям (f1, 2, 3).

Лемма. *Пусть* $\alpha \vee \beta$ *максимален в* P_α. *Тогда*

(а) $$\text{если } F([\beta]_\alpha) \cap [\beta]_\alpha = \varnothing, \quad \text{то } \exists\, \xi \colon \xi \in F(\xi),$$

(б) $$\beta \vee \gamma \in P_\beta \;\&\; [\beta]_\gamma \nsupseteq [\beta]_\alpha \Rightarrow \gamma \in [\beta]_\alpha .$$

Доказательство. (а) Пусть

$$\zeta \vee \gamma = \bigcap \{\varrho \vee \tau |\ \varrho \in [\beta]_\alpha \;\&\; \tau \in F([\beta]_\alpha)\}, \quad \zeta \in [\beta]_\alpha, \quad \gamma \in F([\beta]_\alpha) \text{ (см. 1.2 (i)).}$$

Можно считать, что $\zeta = \beta$. Покажем, что $F([\beta]_\gamma) \cap [\beta]_\gamma \neq \varnothing$. Предположим противное. Пусть пара $\beta \vee \sigma$, $\sigma \vee \gamma$ разлагает $\beta \vee \gamma$, $F(\beta \vee \sigma) \cap \beta \vee \sigma = \varnothing$ и $\beta \vee \sigma \cap \sigma \vee \gamma \subseteq [\sigma]_\beta$ (см. 1.2 (iii) и замечание а). Тогда $\beta \vee \sigma \in P_\beta$ и (см. 2.2) $\alpha \vee \beta \subseteq \alpha \vee \sigma \in P_\alpha$, $\sigma \notin \alpha \vee \beta$ (противоречие).

Из определения $\beta \vee \gamma$ видно, что $F([\beta]_\gamma) \supseteq \beta \vee \gamma$. Пусть k_β минимален по отношению к свойству $\beta \in k_\beta \subseteq [\beta]_\gamma \;\&\; F(k_\beta) \supseteq \beta \vee \gamma$. Тогда из утверждения (v) п. 1.2 следует, что k_β имеет вид $\beta \vee \delta$, где $\beta \in F(\delta)$, и (см. 1.2 (iii) и замечание а) $F([\delta]_\beta) \supseteq [\beta]_\gamma \supset [\delta]_\beta$. Пусть k минимален по отношению к свойству $k \subseteq [\delta]_\beta \;\&\; k \cap F(k) \neq \varnothing$. Покажем, что $k \in X$. Предположим противное, тогда $k = \tau \vee \eta$, $k \in P_\tau$ и $\alpha \vee \beta \subset \alpha \vee \eta \in P_\alpha$.

В этом доказательстве использовались без ссылок предложения предыдущего пункта.

(б) Легко следует из утверждений пунктов 1.2 и 2.2.

Теорема. $\exists\, \xi\colon\ \xi \in F(\xi)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\alpha \vee \beta \in P_\alpha$ и $\alpha \vee \beta$ максимален в P_α. Тогда $F([\beta]_\alpha) \cap [\beta]_\alpha \neq \emptyset$ и (см. лемму) $\gamma \vee \delta \in P_\gamma \,\&\, [\gamma]_\delta \not\supseteq [\beta]_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \delta \in [\beta]_\alpha$ для $\gamma \in [\beta]_\alpha$. Пусть $k \subset [\beta]_\alpha$ и k минимален по отношению к свойству

$$k \cap F(k) \neq \emptyset \,\&\, \forall\, \gamma, \delta\colon\ \gamma \vee \delta \in P_\gamma \,\&\, [\gamma]_\delta \subset k \ \Rightarrow\ \delta \in k\,;$$

пусть $\hat{k} \subseteq k$ и $\hat{k}$ минимален по отношению к свойству $\hat{k} \cap F(\hat{k}) \neq \emptyset$. Тогда $\hat{k} = \eta \vee \vartheta$, $\hat{k} \in P_\eta$. Пусть $\eta \vee \sigma \supseteq \hat{k}$ и $\eta \vee \sigma$ максимален в P_η. Тогда $\eta \vee \sigma \subseteq k$ и, применяя лемму к $\eta \vee \sigma$, получаем противоречие с минимальностью k.

В следующих двух пунктах изложены некоторые приложения теоремы Маньки для случая $X \notin L$.

2.4. $\aleph_0$-полная решётка. Будем рассматривать отображения, удовлетворяющие условиям (f1, f2, f3) и условию

(f4) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L$ возрастающая $\aleph_0$-последовательность и $\alpha \in \sup\limits_n a_n \Rightarrow F(\alpha) \cap$ $\cap \sup\limits_n F(a_n) \neq \emptyset$.

Заметим, что это условие мало отличается от $\sup\limits_n F(a_n) = F(\sup\limits_n a_n)$ и что условия (f3, 4) по-прежнему значительно слабее полунепрерывности сверху.

Теорема. *Пусть HD-решётка L содержит* sup *любой возрастающей $\aleph_0$ направленности. Тогда $\exists\, \xi \in X\colon\ \xi \in F(\xi)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in X$. Положим $x_0 = \alpha \vee F(\alpha)$ и $x_{n+1} = x_n \cup F(x_n)$. Обозначим $x = \sup\limits_n x_n$. Тогда $\forall \xi \in x\colon\ F(\xi) \cap x \neq \emptyset$. Положим $\hat{F}(a) = F(a) \cap x$ для $a \subseteq x$ и применим к $\hat{F}$ теорему предыдущего пункта.

Приложения. 1) Если в пространстве X подконтинуумы образуют $\aleph_0$-*полную* HD-решётку, то X обладает свойством неподвижной точки для полунепрерывных сверху континуум-значных отображений.

2) Пусть X — хаусдорфово пространство, H — обобщённый отрезок. H-дугой в X назовём непрерывный монотонный образ H в X. Пусть $H = \alpha \vee \beta$ — обобщённый отрезок такой, что факторпространство $H_1 \cup H_2/_{\{\beta_1, \alpha_2\}}$ где H_1, H_2 — экземпляры H, есть H-дуга. Пусть в X для любых двух точек существует единственная H-дуга, их соединяющая, и объединение любой возрастающей $\aleph_0$-последовательности H-дуг содержится в некоторой H-дуге в X. Тогда X обладает свойством неподвижной точки для непрерывных однозначных отображений.

Примеры. а) Конус над любым ординалом.

б) „Длинная прямая” (лексикографическое произведение $\omega_1 \times [0, 1)$, где ω_1 — первый несчётный ординал, снабжённое интервальной топологией).

в) В каждой компоненте линейной связности лексикографического произведения $\lambda \times [0, 1)$, где λ-ординал, не кофинальный счётному, возьмём по одной точке, над полученным множеством построим конус и присоединим его к нашему пространству $\lambda \times [0, 1)$.

г) Компактифицируем $\lambda \times [0, 1)$ одной точкой и отождествим её с вершиной конуса, упомянутого в примере в.

2.5. Градуированные решётки. Пусть N — множество натуральных чисел. Назовём HD-решётку L *градуированной*, если задано отображение $\|\cdot\|\colon L \to N$, удовлетворяющее условиям

(18) $$a \wedge b \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \|a \vee b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}\,,$$

(19) если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и для любого n $\|a_n\| \leqslant m$, то существует $\sup\limits_n a_n \in L$.

Теорема. *Пусть L — градуированная решётка и $F\colon L \to L$ удовлетворяет условиям* (f1, 2′, 3, 4) *и условию*

(f5) $$\forall a \in L\colon\ \|F(a)\| \leqslant \|a\|\,.$$

Тогда $\exists \xi\colon\ \xi \in F(\xi)$.

Доказательство. См. доказательство теоремы 2.4.

Эту теорему естественнее всего применять к непрерывным однозначным отображениям. При этом в качестве $\|\cdot\|$ используется некоторая „мера сложности подконтинуума”.

Примеры. а) Пусть $X_n = \omega^{\omega_n}$ лексикографическая степень упорядоченных множеств (здесь ω, ω_n — кардиналы). Положим $X = \bigcup\limits_n X_n$ и определим на X топологию, порождённую линейным порядком $a \prec b \underset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} a \underset{X_n}{\leqslant} b$ для $a, b \in X_n$, $X_n \prec X_{n+1}$.

б) Пусть X_n — континуум, получающийся наматыванием полупрямой $[0, 1)_n$ на X_{n-1}, $X_0 = [0, 1]$. В дизъюнктном объединении $\bigcup\limits_n X_n$ отождествим точки $0_{n-1} \in X_{n-1}$ и $1 \in X_n$ для каждого n. При этом получается метризуемое некомпактное пространство.

Литература

[1] K. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points*, II, Fund. Math. 10 (1927), pp. 225–275.

[2] K. Kuratowski, *Топология* I, II, Москва 1966, 1969.

[3] — A. Mostowski, *Теория множеств*, Москва 1970.
[4] R. Mańka, *Association and fixed points*, Fund. Math. 91 (1976), pp. 105–121.
[5] — *End continua and fixed points*, Bull. Acad. Polon. Sci. 23 (1975), pp. 761–766.
[6] L. K. Mohler, *A fixed point theorem for continua which are hereditarily divisible by points*, Fund. Math. 67 (1970), pp. 345–358.
[7] G. S. Young, *The introduction of local connectivity by a change of topology*, Amer. J. Math. 68 (1946), pp. 479–494.

Accepté par la Rédaction le 5. 3. 1976

A fixed point theorem for plane homeomorphisms

by

Harold Bell (Cincinnati, Ohio)

Abstract. Every homeomorphism of the plane into itself that leaves a non-separating continuum invariant has a fixed point in this continuum.

In [3] Brouwer proved that if h is an orientation preserving homeomorphism of the plane onto itself and the iterates of some point x, x, $h(x)$, $h(h(x))$, ... has a cluster point, then h has a fixed point. In [4] Cartwright and Littlewood proved that every orientation preserving homeomorphism of the plane onto itself that leaves a non-separating continuum M invariant has a fixed point in M. In this paper it shall be shown that every homeomorphism of the plane into itself that leaves a non-separating continuum M invariant has a fixed point in M.

Basic assumption. It shall be assumed throughout this paper that h is a fixed point free homeomorphism of the plane into itself that leaves a continuum M invariant. It is also assumed, without loss of generality, that M is a non-separating plane continuum and that M does not contain a proper non-separating invariant subcontinuum.

All set will be assumed to be subsets of the plane unless otherwise is indicated.

In section I the theorem is proven for two special cases. The first (1.2) is a direct generalization of the Brouwer fixed point theorem for two-cells and the second (1.3) is designed to illustrate a type of proof in a setting that yields geometric intuition while minimizing formal constructions. In section II continua Y (2.9) and Y' (2.10) are constructed such that $M\subset Y\subset Y'$. In section III it is shown that if Y is a two-cell (1.2) guarantees a fixed point in Y. In section IV it is shown that if Y is not a two-cell, then Y' resembles the continuum N in (1.3) well enough to employ the technique used in the proof of (1.3).

Section I. Two special cases. In this section the theorem is proven for two special cases.

(1.1) Definition. *The operator T.* For each bounded set A let $T(A)$ be the smallest compact set that contains A and has a connected complement. It is handy to notice that $T(A)$ is the complement of the unbounded component of the complement of $\bar{A}$.