Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions.

Par

S. Saks. (Varsovie).

Introduction.

§ 1. Nous traiterons dans cette Note une classe de fonctionnelles considérées récemment par M. Banach dans l'ouvrage „*Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires* [1]).

§ 2. E désignera dans la suite le champ vectoriel, métrique et complet au sens de M. Banach.

Pour la commodité du lecteur nous rappellerons sommairement les propriétés caractéristiques d'un tel champ dont la définition précise se trouve dans la *Thèse* [2]) de M. Banach. Notamment: les procédés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre réel sont déterminés pour tous les éléments du champ, de manière à vérifier les lois ordinaires d'Algèbre. A tout élément x du champ correspond un nombre non-négatif qui est appelé norme de x et désigné par $\|x\|$. On a pour tout couple d'éléments du champ x, y et pour tout nombre réel K:

$$\|x\| = 0 \quad \text{équivaut à} \quad x = 0\ ^{3}),$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \|K.x\| \leqslant |K|.\|x\|.$$

La propriété du champ d'être complet tient au fait que, si $\{a_n\}$ en est une suite d'éléments, l'égalité $\lim\limits_{p,q\to\infty} \|a_p - a_q\| = 0$ entraîne l'existence d'un élément a tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$. L'élément a est appelé le point limite de la suite $\{a_n\}$. Par écrit: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Remarquons que tout espace de M. Banach peut être regardé comme un espace métrique et complet au sens de M. Hausdorff *(metrisches, vollständiges Raum* [1]); il suffit, pour cela, définir la *distance* de deux éléments du champ comme la norme de leur différence. Ainsi, toutes les notions établies pour l'espace métrique et complet de M. Hausdorff sont valables encore pour le champ de M. Banach. Nous en mentionnerons celles d'ensembles fermé, non-dense, de I^e^ et de II^e^ catégorie, etc. dont nous tiendrons compte dans la suite.

§ 3. Dans la note citée, M. Banach a étudié des fonctionnelles $u(x)$ qui, à tout élément x de E, attribuent une fonction mesurable [2]) d'une variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Une telle fonctionnelle $u(x)$ est dite continue lorsque, pour toute suite $\{x_n\}$ convergeant vers un élément x, $u(x_n)$ (regardé comme une fonction de la variable t) tend en mesure [3]) (asymptotiquement) vers $u(x)$; elle est dite continue relativement à un ensemble L de valeurs t, lorsque $\lim x_n = x$ entraîne la convergence en mesure de la suite $u(x_n)$ vers $u(x)$ sur l'ensemble L.

La fonctionnelle $u(x)$ est linéaire lorsque pour tout couple de nombres réels k, h et tout couple d'éléments x, y de E, on a

$$u(kx + hy) = k\,u(x) + h\,u(y).$$

§ 4. Nous employerons encore la notation suivante qui sera utile dans la suite: φ, ψ désignant deux fonctions de la variable t dans $(0, 1)$ (l'une de ces fonctions peut être d'ailleurs une constante) et L étant un ensemble situé dans $(0, 1)$, la relation

$$\varphi \leq \psi, \quad \text{resp.} \quad \varphi < \psi \qquad [L, \alpha]$$

exprimera que $\varphi \leqslant \psi$, respectivement $\varphi < \psi$, a lieu dans un sous-ensemble de L de mesure $\geqslant \alpha$.

On voit aisément que, lorsque $\{\varphi_n\}$ désigne une suite de fonctions tendant en mesure vers une fonction φ et lorsqu'on a, pour un couple de nombres k, α

$$\varphi_n \leq k \quad [L, \alpha] \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a encore

$$\varphi \leq k \qquad [L, \alpha].$$

[1]) *Bull. des Sc. Math.* 1926. Mars. Cette Note sera citée dans la suite comme: Banach, II.

[2]) Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits. Fund. Math.* 1922. vol. III. p. 134—181. On citera ce Mémoire comme Banach, I.

[3]) 0 désigne l'élément nul du champ.

[1]) Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre.* 1914. pp. 318—328.

[2]) Elle peut d'ailleurs admettre des valeurs infinies.

[3]) Cette notion est due à M. F. Riesz (C. R. 18 mars 1907).

On en déduit aussitôt que, si $u(x)$ est une fonctionnelle continue dans le champ E, l'ensemble de points x où

$$u(x) \leq k \qquad [L, \alpha],$$

est fermé, pour tout couple de nombres k, α et tout sous-ensemble L de l'intervalle considéré.

§ 5. Le but de la note présente est de donner une extension aux résultats de M. Banach concernant les fonctionnelles dont la définition a été rappelée plus haut; dans la deuxième partie de ce travail nous donnerons quelques applications aux théorèmes abstraits qui seront démontrés dans la première partie. Ces applications complètent celles qui ont été signalées antérieurement par M. Banach.

Pour abréger le langage, nous supposerons toujours dans la suite que L désigne un sous-ensemble mesurable de l'intervalle $(0, 1)$ et que $\{u_n(x)\}$ est une suite de fonctionnelles définies dans le champ E, chacune en étant une fonction mesurable de t dans $(0, 1)$; $v_n(x)$ désignera $\max[|u_1(x)|, |u_2(x)|, \ldots, |u_n(x)|]$;

$v_n(x)$ est ainsi une fonction non-négative de t, admettant en chaque point t la plus grande de valeurs admises en t par les n premières des fonctions $|u_k(x)|$.

On posera ensuite: $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$.

I.

§ 6. **Théorème 1.** $\{u_u(x)\}$ étant une suite de fonctionnelles continues, l'ensemble de points x où

$$(1) \qquad v(x) \leq k \qquad [L, \alpha]$$

est fermé pour tout couple de nombres réels k, α.

Démonstration. Soit F_n l'ensemble de x où

$$v_n(x) \leq k \qquad [L, \alpha].$$

Les $v_n(x)$ étant continus en même temps que les $u_n(x)$, tout ensemble F_n est fermé en vertu de la remarque faite au § 4. Or, l'ensemble où (1) a lieu, est comme on le vérifie aisément, identique à $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n$; il est donc également fermé.

Théorème 2. Si 1° $\{u_n(x)\}$ est une suite de fonctionnelles continues, et

2° si α est un nombre tel que l'ensemble de x où sont vérifiées les relations

$$(2) \qquad v(x) < \infty \qquad [L, \alpha'], \quad \alpha' > \alpha$$

est de II^e catégorie,

il existe alors une sphère K et deux nombres N et $\alpha_0 > \alpha$, tels que pour tout $x \varepsilon K$

$$(3) \qquad v(x) \leqslant N \qquad [L, \alpha_0].$$

Démonstration. Soit H l'ensemble de x où (2) est vérifiée et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de points où

$$v(x) \leq n \qquad \left[L, \alpha + \frac{1}{n}\right].$$

On a évidemment

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Or, H étant, par hypothèse, un ensemble de II^e catégorie, l'un, au moins, des H_n, soit H_{n_0}, l'est aussi. D'autre part, d'après le théorème précédent, tous les H_n sont fermés et parsuite H_{n_0} doit contenir une sphère K. En posant $\alpha_0 = \alpha + \frac{1}{n_0}$ et $N = n_0$, on trouve la relation (3) vérifiée dans la sphère K.

Théorème 3. Si les conditions 1° et 2° du théorème précédent sont vérifiées et si, en outre,

3° $u_n(x)$ sont toutes linéaires,

4° $v(x)$ est presque partout finie dans L pour chaque x appartenant à un ensemble partout dense dans E,

il existe alors un nombre $\alpha_1 > \alpha$ [1]) et un nombre S tels que, pour tout x

$$(4) \qquad v(x) \leq S \cdot \|x\| \qquad [L, \alpha_1].$$

Démonstration. Observons d'abord que $u_n(x)$ étant linéaires, on a pour tout couple de nombres p, q:

$$u_n(px + qy) = pu_n(x) + qu_n(y),$$

donc, en vertu de la définition de $v_n(x)$:

$$v_n(px + qy) \leq |p| \cdot v_n(x) + |q| \cdot v_n(y)$$

[1]) α conserve le sens précisé dans l'énoncé précédent.

et, en passant vers la limite

$$v(px+qy) \leq |p| \cdot v(x) + |q| \cdot v(y). \tag{5}$$

Cela posé, on peut en vertu du théorème précédent, déterminer une sphère $K(a, \varrho)$ [1]) et deux nombres $\alpha_0 > \alpha$ et N de manière que la relation (3) soit vérifiée. On peut supposer évidemment (l'ensemble B étant partout dense) que a appartient à B et que, $v(a)$ est parsuite presque partout finie. Il existe donc un nombre fini M tel qu'on a

$$v(x) \leqslant M \quad [L, \text{ mes } L - \varepsilon], \tag{6}$$

où on a posé, pour abréger:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0 - \alpha}{2}. \tag{7}$$

Ceci étant, on a en vertu de (5):

$$v(x) \leq v(x+a) + v(a).$$

Donc, si $\|x\| \leq \varrho$, on a, d'après (3) et (6):

$$v(x) \leq N + M \quad [L, \alpha - \varepsilon],$$

ou bien, d'après (7):

$$v(x) \leqslant N + M \quad [L, \alpha_1], \tag{8}$$

où:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha_0}{2} > \alpha.$$

Soit ensuite x un élément quelconque. On a, en vertu de (8):

$$v(x) = \frac{\|x\|}{\varrho} v\left(\frac{x}{\|x\|}\varrho\right) \leq \frac{N+M}{\varrho}\|x\| \qquad [L, \alpha_1].$$

En y posant $S = \dfrac{N+M}{\varrho}$, on obtient la relation (4).

On déduit du théorème qu'on vient de prouver, la proposition suivante de M. Banach [2]) (la démonstration que nous y donnons coïncide au fond avec celle qui est due à cet auteur):

[1]) $K(a, \varrho)$ désigne une sphère dont le centre est a et le rayon ϱ.

[2]) Banach, II; § 2, théorème 3.

Théorème 4. Si 1° les fonctionnelles $\{u_n(x)\}$ sont linéaires et continues,

2° $v(x) < \infty$ presque partout dans L pour chaque x,

3° la suite $u_n(x)$ converge presque partout dans L pour chaque x d'un ensemble B partout dense dans E,

la suite $u_n(x)$ converge presque partout dans L pour chaque $x \varepsilon E$ vers une fonctionnelle $u(x)$ continue rèlativement à L.

Démonstration. Soit x_0 un point du champ et ε un nombre positif quelconque. En vertu du théorème précédent dont les prémisses sont remplies pour tout $\alpha <$ mes L, donc en particulier pour $\alpha =$ mes $L - \varepsilon$, il existe un nombre fini S_ε tel que.

$$v(x) \leqq S_\varepsilon \cdot \|x\| \quad [L, \text{ mes } L - \varepsilon] \tag{9}$$

pour tout $x \varepsilon E$.

Soit x un point de B tel que

$$\|x_0 - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2S_\varepsilon}. \tag{10}$$

La suite $\{u_n(x_1)\}$ convergeant par hypothèse et les fonctions $u_n(x)$ étant linéaires, on a, en vertu de (9) et (10):

$$\begin{aligned}\limsup u_n(x_0) - \liminf u_n(x_0) &= \limsup u_n(x_0 - x_1) - \limsup u_n(x_0 - x_1) \\ &\leq 2v(x_0 - x_1) \\ &\leq \varepsilon \qquad\qquad [L, \text{ mes } L - \varepsilon].\end{aligned}$$

Or, ε étant un nombre positif quelconque, on en conclut: $\limsup u_n(x) = \liminf u_n(x)$ presque partout dans L.

Posons: $u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)$ [1]). On a, en vertu de (9), pour chaque ε et pour chaque couple de points x', x'' tels que

$$\|x' - x''\| \leq \frac{\varepsilon}{2S_n}:$$

$$|u(x'') - u(x')| = |u(x'' - x')| \leq |v(x'' - x')| \leq \varepsilon \quad [L, \text{ mes } L - \varepsilon].$$

ce qui prouve la continuité de la fonctionnelle $u(x)$ relativement à l'ensemble L.

Théorème 5. Si 1° $u_n(x)$ sont linéaires et continues,

2° $v(x)$ est finie presque partout dans L pour chaque x d'un ensemble B partout dense dans E,

[1]) $u(x)$ n'est défini qu'aux points $t \varepsilon L$.

3^0 il existe un point $x = x_0$ tel que $v(x) = \infty$ presque partout dans L,

on a alors $v(x) = \infty$ presque partout dans L pour tout point $x \varepsilon E$ près d'un ensemble de I^e catégorie au plus.

Démonstration. Si l'ensemble des x pour lesquels il n'est pas vrai que $v(x) = \infty$ a lieu presque partout dans L, eût été de II^e catégorie, il existerait en vertu du th. III deux nombres positifs $\alpha_1 > 0$ et S tels que pour tout x

$$v(x) \leq S . \|x\| < \infty \qquad [L, \alpha_1].$$

Or, cela est en contradiction avec l'hypothèse 3^0.

§ 7. Nous allons démontrer maintenant le théorème qui résume, en grande partie, les considérations précédentes.

Théorème 6. *$\{u_n(x)\}$ étant une suite de fonctionnelles continues, linéaires, presque partout finies et convergeant presque partout dans (0, 1) pour chaque x d'un ensemble B partout dense dans E, il existe alors dans l'intervalle (0, 1) un ensemble L_0 tel que:*

1^0 $u_n(x)$ converge presque partout dans L_0, pour chaque x, vers une fonctionnelle $u(x)$ continue relativement à L_0;

2^0 on a $\limsup\limits_{n\to\infty} |u_n(x)| = \infty$ presque partout dans le complémentaire de L_0 pour tout x, excepté au plus un ensemble de I^e catégorie.

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les ensembles A pour lesquels il y a des points x tels que $v(x) = \infty$ presque partout dans A.

Soit M la borne supérieure des mesures des ensembles appartenant à $\mathfrak{A}$. Il existe, par conséquent, une suite $\{A_n\}$ de ces ensembles telle que

$$M = \lim \operatorname{mes} A_n .$$

Posons: $L_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; on a donc

(11) $$M = \operatorname{mes} L_1 .$$

En vertu de la proposition précédente l'ensemble des points x, soit C_n, où $v(x)$ n'est pas infinie presque partout dans A_n, est de I^e catégorie. On a donc, presque partout dans $L_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ et pour chaque x n'appartenant pas à l'ensemble $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ de I^e catégorie:

$$v(x) = \infty,$$

ou, ce qui équivaut, chaque $u_n(x)$ étant presque partout finie:

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n(x)| = \infty .$$

Soit, à présent, L_0 le complémentaire de L_1. Nous affirmons d'abord que $v(x)$ est presque partout finie dans L_0 pour chaque x. En effet, supposons, par impossible, qu'il existe un point x_0 tel que $v(x_0) = \infty$ en tout point d'un sous-ensemble $L' \subset L_0$ de mesure positive. D'après la proposition précédente, on aurait donc $v(x) = \infty$ presque partout dans L' pour chaque x en dehors d'un ensemble de I^e catégorie qu'on désignera par C'. On aurait, parsuite, $v(x) = \infty$ presque partout dans $L_1 + L'$ pour tout x excepté l'ensemble de I^e catégorie $C + C'$, et l'ensemble $L_1 + L'$ appartiendrait à la classe $\mathfrak{A}$. Donc

$$M \geqslant \operatorname{mes} (L_1 + L') > \operatorname{mes} L'.$$

Or, c'est en contradiction avec l'égalité (11). $v(x)$ étant donc finie presque partout dans L_0 pour chaque x, il s'ensuit, en vertu du théorème IV, que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ existe presque partout dans l'ensemble L_0 pour tout x et qu'elle est une fonctionnelle continue relativement à cet ensemble.

§ 8. On déduit aisément du théorème que nous venons de prouver, la proposition suivante qui est analogue à un théorème de MM. Banach et Steinhaus sur les fonctionnelles admettant des valeurs numériques [1].

Corollaire. *Si $\{L_m\}$ est une suite d'ensembles situés dans l'intervalle (0, 1) et $\{u_{nm}(x)\}$ ($m = 1, 2, \ldots$) un système dénombrable de suites de fonctionnelles dont chacune vérifie les prémisses du théorème précédent, et si, pour chaque m ($m = 1, 2, \ldots$), existe un élément x_m tel que la suite correspondante $\{u_{nm}(x)\}$ diverge pour $x = x_m$ en presque tout point de L_m,*

il existe alors un point x_0 qui rend divergente chacune des suites considérées, en presque tout point de l'ensemble correspondant L_m.

Car, dans l'hypothèse relative aux suites envisagées, chacune en diverge presque partout dans l'ensemble correspondant L_m pour tout élément x n'appartenant pas à un certain ensemble des x, soit C_m, de I^e catégorie. Ainsi, tout élément en dehors de l'ensemble $\sum\limits_{m=1}^{n} C_m$ qui est encore de I^e catégorie, possède la propriété desirée.

[1]) voir: *Fund. Math.* t. IX. pp. 50–61.

II.

§ 9. Nous nous bornons aux applications des théorèmes précédents dans la théorie des développements des fonctions sommables [1]) en des séries de fonctions orthogonales. Le lecteur est prié de vouloir bien rapprocher les énoncés et les considérations qui vont suivre de ceux contenus dans le Mémoire cité de M. Banach [2]).

Soit

(1) $$f_1(t),\ f_2(t), \dots$$

une suite de fonctions bornées, orthogonales dans (0, 1). Posons pour chaque fonction $x(t)$ sommable dans (0, 1):

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t), \qquad \text{où:} \qquad a_k = \int_0^1 x(t)\, f_k(t)\, dt.$$

$u_n(x)$ font évidemment une suite de fonctionnelles linéaires et continues dans le champ de fonctions sommables. On sait, d'autre part, qu'on peut toujours compléter le système (1) par l'adjonction d'une suite (finie ou infinie) de fonctions, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, de carré sommable. Or, la famille de combinaisons linéaires des fonctions f_k, φ_k fait un ensemble partout dense dans le champ de fonctions sommables, et si $x(t)$ est une telle combinaison la suite $u_n(x)$ nécessairement converge. Ainsi, on obtient en vertu de l'énoncé VI:

à chaque système (1), correspond un ensemble L_0 dans (0, 1) tel que le développement de toute fonction sommable converge presque partout dans L_0, tandis qu'il existe de fonctions sommables $x(t)$ telles que

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right| = \infty, \qquad a_k = \int_0^1 x f_n\, dt$$

presque partout en dehors de L_0.

Il s'ensuit que *les mesures des ensembles de convergence des développements des fonctions sommables (relatifs à un même système (1)) atteignent leur borne inférieure et celles des ensembles de divergence leur borne inférieure.* En particulier, *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction sommable dont le développement diverge en chaque point près d'un ensemble de mesure $\leq \varepsilon$, il existe une fonction sommable dont le développement diverge presque partout.*

Remarquons encore que dans le cas où la suite (1) est complète, les combinaisons linéaires des seules fonctions $f_k(t)$ forment un ensemble partout dense dans le champ de fonctions sommables. Or, $x(t)$ étant une telle combinaison, on a évidemment $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = x$. Donc, en tenant compte de la continuite de la fonctionnelle $u(x)$ relativement à L_0, on conclut qu'*en presque tout point de L_0 on a, pour chaque fonction sommable*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t) = x(t), \qquad \text{où:} \qquad a_k = \int_0^1 x(t)\, f_n(t)\, dt.$$

Pour la plupart de systèmes orthogonaux et complets, l'ensemble L_0 est de mesure nulle ou bien une pleine épaisseur de l'intervalle (0, 1). C'est le premier cas qui se produit, d'après le résultat remarquable de M. Kolmogoroff [1]), pour le système trigonométrique, et c'est le second qui a lieu pour le système connu de M. Haar [2]). On peut d'ailleurs construire facilement un système complet pour lequel aucun de ces cas extrêmes ne se présente. Soit notamment $\{\varphi_n\}$ le système trigonométrique relatif à l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$ et $\{f_n\}$ le système de M. Haar relatif à l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$. Posons $\Phi_n = \varphi_n$ dans $(0, \frac{1}{2})$ et $= 0$ dans $(\frac{1}{2}, 1)$. Pareillement, soit $F_n = 0$ dans $(0, \frac{1}{2}) = f_n$ dans $(\frac{1}{2}, 1)$. Par réunion de deux suites $\{F_n\}$ et $\{\Phi_n\}$ on obtient un système orthogonal, normal et complet. L'ensemble L_0 relatif à ce système (et au champ des fonctions sommables) coïncide (près d'un ensemble de mesure nulle) avec l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$.

§ 10. Le raisonnement tout-à-fait analogue au précédent conduit à la proposition suivante:

à tout système (1) et à chaque fonction $\varphi(n)$ tendant vers $+\infty$ avec n, correspond dans l'intervalle (0. 1) un ensemble L_1 tel que, pour toute fonction sommable $x(t)$, on a presque partout dans L_1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_n f_n}{\varphi(n)} = 0 \qquad \left(\text{où} \quad a_n = \int_0^1 x f_n\, dt\right),$$

[1]) les fonctions sommables font, comme on sait, un espace de M. Banach; on entend par la norme d'une fonction sommable $x(t)$ l'intégrale $\int_0^1 |x(t)|\, dt$. Les raisonnements du texte restent d'ailleurs valables pour d'autres champs fonctionnels, p. ex. pour celui de fonctions de carré sommable. (Cf. Banach I, Chap. III).

[2]) Banach, II, § 8.

[1]) Kolmogoroff, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout. *Fund. Math.* t. IV. 1923. pp. 324--328.

[2]) Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.* B. 69. 1910. pp. 361—369.

tandis qu'il y a des fonctions sommables $y(t)$ telles que presque partout en dehors de L_1:

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_n f_n}{\varphi(n)}\right| = \infty, \quad \left(\text{où} \quad b_n = \int_0^1 y(t)\, f_n(t)\, dt\right).$$

Pour interpréter encore le corollaire du § 8, nous indiquerons la proposition suivante qui en découle immédiatement: *si $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ désigne une suite de procédés linéaires de sommation et si pour chaque n il existe une fonction sommable dont le développement (relatif au système (1)) n'est sommable par le procédé T_n en presque aucun point d'un ensemble L, il existe une fonction sommable dont le développement n'est sommable en presque aucun point de l'ensemble L par* aucun *des procédés T_n.*

Le lecteur trouvera facilement quelques autres applications des théorèmes du Chapitre précédent qui rentrent dans le même ordre des idées.

Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes.

Par

Tibor Radó (Szeged, Hongrie).

M. L. Tonelli a publié récemment une série de Notes [1]) sur l'aire des surfaces courbes, contenant des résultats du plus haut intérêt et à plusieurs égards définitifs. En comparant ses méthodes avec celles du mathématicien hongrois Z. de Geöcze, je suis arrivé au théorème qui fait l'objet de la communication présente et qui établit un *procédé régulier de calcul pour l'aire*, au sens de Lebesgue, de toute surface continue donnée sous la forme $z = f(x, y)$.

Soit $f(x,y)$ une fonction continue dans le carré $Q: 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. L'aire de la surface $z = f(x,y)$ a été définie par M. H. Lebesgue comme la plus petite limite de l'aire, au sens élémentaire, des surfaces polyédrales tendant vers la surface proposée; désignons l'aire ainsi définie par $L_Q[f]$. Si $L_Q[f]$ est finie, la fonction $f(x,y)$ possède presque partout dans Q les dérivées premières $p(x,y)$ et $q(x,y)$, et la fonction $(1+p^2+q^2)^{1/2}$ est sommable dans Q [2]). On a toujours

$$(1) \qquad \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqq L_Q[f] \text{ }^{3}),$$

et on forme aisément des exemples où le signe d'égalité ne tient pas. *Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que $f(x, y)$ soit ab-*

[1]) L. Tonelli, *Sulla quadratura delle superficie*, I, II, III, Rendiconti della r. Accademia dei Lincei; séances du 7 mars, du 11 avril et du 7 mai 1926; *Sopra alcuni proprietà di un polinomio di approssimazione*, dans les mêmes Rendiconti; séance du 16 mai 1926. Je citerai ces Notes par T. I, T. II, T. III et T. IV.

[2]) Cf. le travail de M. Lampariello, cité dans T. II, p. 446.

[3]) T. II.