Soit $C_1 \subset S$ un sous-continu de S contenant les deux points a et b. S n'est pas fermé, l'ensemble $S - C_1$ est donc non vide; soit d un point de cet ensemble. Le point d appartient à l'un au moins des semicontinus S_1, S_2; supposons, p. ex., que $d \subset S_1$.

Considérons maintenant un sous-continu C_2 de S_1 joignant les deux points a et d:

$$(a+d) \subset C_2 \subset S_1,$$

et posons

$$C = C_1 + C_2.$$

C est un continu (puisque $C_1 . C_2 \supset a \neq 0$).

Aucun des deux continus C_1 et C_2 ne coïncide avec C (puisque $b \subset (S_2 - S_1) . C_1 \subset (S_2 - C_2) . C_2$ et $d \subset C_2 . (S - C_1)$).

Il en résulte que C est décomposable, contrairement à notre supposition. Notre proposition se trouve démontrée.

Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Considérons toutes les fonctions d'une variable réelle x qui ne sont pas constamment nulles. Divisons ces fonctions en paires, en rangeant dans une même paire deux fonctions qui ne diffèrent que par leur signe: soit P l'ensemble de toutes ces paires.

Le but de cette Note est de démontrer que *si l'on savait nommer un ensemble N contenant une et une seule fonction de chaque paire appartenant à P, on saurait aussi nommer un ensemble non mesurable au sens de M. Lebesgue.*

Supposons que nous savons nommer un ensemble N contenant une et une seule fonction de chaque paire appartenant à P.

Soit a un nombre irrationnel donné. Quels que soient les nombres rationnels r et r', il ne peut être jamais $r + a = r' - a$ (puisqu'il en résulterait que a est rationnel, contrairement à l'hypothèse). Par conséquent on peut définir une fonction $f_a(x)$ d'une variable réelle x par les deux conditions suivantes:

1) quel que soit le nombre rationnel r, on a $f_a(r+a) = 1$ et $f_a(r-a) = -1$,

2) si x est un nombre réel qui n'est pas de la forme $r \pm a$, où r est un nombre rationnel, on a $f_a(x) = 0$.

Désignons maintenant par E l'ensemble de tous les nombres irrationnels a, tels que la fonction $f_a(x)$ appartient à l'ensemble N. Je dis que l'ensemble E est non mesurable (L).

A ce but nous prouverons d'abord la propriété suivante de l'ensemble E. Quels que soient le nombre rationnel ϱ et le nombre irrationnel ξ, de deux nombres $\varrho + \xi$ et $\varrho - \xi$ l'un appartient toujours à E et l'autre à CE.

En effet, soient ϱ un nombre rationnel et ξ un nombre irrationnel et distinguons deux cas:

α) La fonction $f_{\varrho+\xi}(x)$ appartient à N.

Il résulte dans ce cas, de la définition de l'ensemble E, que le nombre $\varrho+\xi$ appartient à E. Or, il résulte de la définition de la fonction $f_a(x)$ que (pour ϱ rationnel et ξ irrationnel) $f_{\varrho+\xi}(x)=-f_{\varrho-\xi}(x)$ (pour tout x réel). La fonction $f_{\varrho+\xi}(x)$ appartenant à N, il s'en suit donc de la propriété de N que la fonction $f_{\varrho+\xi}(x)$ n'appartient pas à N, et parsuite le nombre $\varrho-\xi$ n'appartient pas à E.

β) La fonction $f_{\varrho+\xi}(x)$ n'appartient pas à N.

Dans ce cas la fonction $f_{\varrho-\xi}(x)=-f_{\varrho+\xi}(x)$ appartient à N (d'après la propriété de N) et on conclut sans peine (d'après la définition de E) que le nombre $\varrho-\xi$ appartient à E, et le nombre $\varrho+\xi$ n'appartient pas à E.

Désignons par H l'ensemble de tous les nombres irrationnels qui n'appartiennent pas à E. Il résulte de la propriété de l'ensemble E que nous venons de démontrer que, ϱ étant un nombre rationnel quelconque, les ensembles E et H sont les images symétriques l'un de l'autre, le point ϱ étant le centre de symétrie.

Admettons que l'ensemble E est mesurable (L) et soit (a, b) un intervalle à extrémités rationnelles, d'ailleurs quelconque; désignons par E_1 et H_1 les parties respectives de E et H contenues dans (a, b); E_1 sera un ensemble mesurable. Les ensembles E_1 et H_1 sont superposables, puisqu'ils sont les images symétriques l'un de l'autre (le centre de (a, b) étant le centre de symétrie); ils ont donc la même mesure. Or, la partie de CE contenue dans (a, b) ne diffère de H_1 que par un ensemble dénombrable de points (rationnels). Donc l'ensemble E et son complémentaire CE ont la même mesure dans tout intervalle à extrémités rationnelles. On peut démontrer sans peine que la conclusion à laquelle nous venons d'arriver est inadmissible. Nous avons donc démontré que l'ensemble E est non mesurable (L).

La proposition énoncée au commencement de notre Note est ainsi démontrée.

Les fonctions $f_a(x)$ étant, comme on le voit sans peine, de la classe 2 de M. Baire, on pourrait évidemment se borner aux fonctions de la classe 2 au lieu de considérer la division en paires de toutes les fonctions d'une variable réelle. Notre proposition serait donc vraie si l'on y remplaçait l'ensemble P par l'ensemble de toutes

les paires de deux fonctions de la classe 2 qui ne diffèrent que par leur signe. On voit aussi sans peine que *si nous savons nommer une ordination simple de l'ensemble F de toutes les fonctions de la classe 2, nous savons nommer un ensemble non mesurable (L).* En effet, si nous savons nommer une direction simple de l'ensemble F, nous savons nommer un ensemble contenant une et une seule fonction de toute paire de deux fonctions de F qui ne diffèrent que par leur signe (p. e. contenant toujours celle de deux fonctions d'une paire qui précède l'autre) [1]).

[1]) Cf. W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 147.