un G_δ). Reste la deuxième propriété: Une droite $x=a$ rencontre P seulement dans le cas où $a\,\varepsilon\,E_1$. Si $a\,\varepsilon\,E_2$ cette droite rencontre M_n, donc elle contient pour toute valeur de n un point (a, y_n) tel que $2-\frac{1}{n}\leqq y_n\leqq 2-\frac{1}{2n}$. Donc le y-maximum de P sur cette droite aurait l'ordonnée $\geqq 2$, ce qui est impossible, car P est situé d'après (4) dans la bande $0<y<2$. On voit ainsi que la droite $x=a$ ne rencontre pas H si $a\,\varepsilon\,E_2$ ou si a est en dehors de E_1.

Supposons maintenant que $a\,\varepsilon\,E_1-E_2$. La droite $x=a$ ne rencontre alors aucun M_n c. à d. tout point (a, y) contenu dans P est situé dans K_1. Soit $y(a)$ la borne supérieure des ordonnées des points $(a, y)\,\varepsilon\,K_1$. Supposons, que le point $(a, y(a))$ n'appartient pas à l'ensemble P. Il existe alors une suite $\{y_k\}$, $k=1,2\ldots$ telle que:

$$(5)\qquad y_k<y_{k+1};\quad \lim_{k=\infty} y_k=y(a);\quad (a, y_k)\,\varepsilon\,K_1.$$

Ces relations entraînent en vertu de la définition de K_1:

$$(6)\qquad 0<y_k\leqq 1;\quad 0<y(a)\leqq 1;\quad a=f(y_k).$$

Donc, $f(y)$ étant continue du côté gauche pour $0<y\leqq 1$:

$$(7)\qquad f(y(a))=\lim f(y_k)=a$$

$$(8)\qquad (a, y(a))=(f(y(a)), y(a))\,\varepsilon\,K_1\subset P,$$

contrairement à la supposition. Donc $(a, y(a))\,\varepsilon\,P$. Mais, d'après la définition de $y(a)$, c'est un y-maximum de P, donc un point de H. C à d.: Si $a\,\varepsilon\,E_1-E_2$, alors la droite $x=a$ rencontre H.

Les considérations précédentes montrent que $E_1-E_2=E$ est la projection de H sur l'axe des abscisses, c. q. f. d.

Une propriété des continus de M. Knaster.

Par

Paul Urysohn †.

M. **Brouwer** à introduit dans la science mathématique les *continus indécomposables*.

M. **Knaster** a donné ensuite un exemple d'un continu indécomposable dont tout sous-continu est lui aussi indécomposable. Nous appellerons *continu de M. Knaster* tout continu jouissant de cette propriété.

On pourrait introduire dans le même ordre d'idées la notion d'un *semicontinu* [1]) *indécomposable*: nous entendons par là un semicontinu S qui ne peut être représenté comme somme de deux semicontinus S_1 et S_2 dont aucun ne coïncide avec S tout entier.

Le but de cette note est de démontrer la propriété suivante des continus de M. **Knaster**:

Tout semicontinu agrégé à un continu de M. Knaster est indécomposable.

Soit S un sémicontinu quelconque agregé à un continu K de M. **Knaster**. Supposons qu'on ait

$$(1)\qquad S=S_1+S_2,\quad S_1\neq S\neq S_2,$$

où S_1 et S_2 sont des semicontinus. Il résulte de (1) qu'on peut trouver deux points a et b tels que

$$(2)\qquad a\subset S_1-S_2,\quad b\subset S_2-S_1.$$

[1]) Nous entendons dans cette note par un sémicontinu un ensemble S non fermé et tel qu'il existe pour tout couple de points x, y de S un continu C_{xy} vérifiant l'inclusion:

$$x+y\subset C_{xy}\subset S.$$

Soit $C_1 \subset S$ un sous-continu de S contenant les deux points a et b. S n'est pas fermé, l'ensemble $S - C_1$ est donc non vide; soit d un point de cet ensemble. Le point d appartient à l'un au moins des semicontinus S_1, S_2; supposons, p. ex., que $d \subset S_1$.

Considérons maintenant un sous-continu C_2 de S_1 joignant les deux points a et d:

$$(a+d) \subset C_2 \subset S_1,$$

et posons

$$C = C_1 + C_2.$$

C est un continu (puisque $C_1 . C_2 \supset a \neq 0$).

Aucun des deux continus C_1 et C_2 ne coïncide avec C (puisque $b \subset (S_2 - S_1) . C_1 \subset (S_2 - C_2) . C_2$ et $d \subset C_2 . (S - C_1)$).

Il en résulte que C est décomposable, contrairement à notre supposition. Notre proposition se trouve démontrée.

Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Considérons toutes les fonctions d'une variable réelle x qui ne sont pas constamment nulles. Divisons ces fonctions en paires, en rangeant dans une même paire deux fonctions qui ne diffèrent que par leur signe: soit P l'ensemble de toutes ces paires.

Le but de cette Note est de démontrer que *si l'on savait nommer un ensemble N contenant une et une seule fonction de chaque paire appartenant à P, on saurait aussi nommer un ensemble non mesurable au sens de M. Lebesgue.*

Supposons que nous savons nommer un ensemble N contenant une et une seule fonction de chaque paire appartenant à P.

Soit a un nombre irrationnel donné. Quels que soient les nombres rationnels r et r', il ne peut être jamais $r + a = r' - a$ (puisqu'il en résulterait que a est rationnel, contrairement à l'hypothèse). Par conséquent on peut définir une fonction $f_a(x)$ d'une variable réelle x par les deux conditions suivantes:

1) quel que soit le nombre rationnel r, on a $f_a(r+a) = 1$ et $f_a(r-a) = -1$,

2) si x est un nombre réel qui n'est pas de la forme $r \pm a$, où r est un nombre rationnel, on a $f_a(x) = 0$.

Désignons maintenant par E l'ensemble de tous les nombres irrationnels a, tels que la fonction $f_a(x)$ appartient à l'ensemble N. Je dis que l'ensemble E est non mesurable (L).

A ce but nous prouverons d'abord la propriété suivante de l'ensemble E. Quels que soient le nombre rationnel ϱ et le nombre irrationnel ξ, de deux nombres $\varrho + \xi$ et $\varrho - \xi$ l'un appartient toujours à E et l'autre à CE.