Sur une propriété des ensembles $C(A)$.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est la démonstration du résultat suivant: *E désignant un ensemble linéaire, qui est la différence de deux ensembles (A), il existe un ensemble plan H, tel que: 1) H est un ensemble $C(A)$ c. à d. le complémentaire d'un ensemble (A); 2) la projection de H sur l'axe des abscisses est identique à E; 3) toute droite $x=a$ rencontre H, dans un point au plus.*

E étant d'après 2) et 3) une image biunivoque et continue (dans un sens) de H, *il en résulte la solution négative* du problème suivant posé par M. Sierpiński: *Une image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble complémentaire à un ensemble (A) de M. Souslin, est elle de même nature?*[1]

2. Je dirai qu'un point (x_1, y_1) d'un ensemble plan L est un *y-maximum* de L si L ne contient aucun point d'abscisse x_1 et d'ordonnée $> y_1$.

3. *L'ensemble des y maxima d'un ensemble plan L. mesurable (B) est un ensemble $C(A)$.* En effet soit Y cet ensemble. Définissons l'ensemble Z de la manière suivante: $(x', y') \varepsilon Z$, s'il existe un point $(x', y'') \varepsilon L$ tel que $y'' > y'$. En désignant le complémentaire de Z par $C(Z)$, on a $Y = L.C(Z)$. L est mesurable (B), donc un $C(A)$: il suffit par suite de montrer que $C(Z)$ est un $C(A)$, c. à d. que Z est un ensemble (A). Soit F un rectangle fermé: $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$; je désignerai par $U(F)$ l'ensemble $a \leqq x \leqq b$, $y < c$. $U(F)$ est evidemment un $F_\sigma G_\delta$.

[1]) *Fund. Math.* VI, pag. 279, probl. 33.

L admet un système déterminant $S(F_{i_1, i_2, \dots, i_k})$, dont les éléments sont des rectangles fermés à côtés parallèles aux axes des coordonnées, et assujétis à la condition $F_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} \subset F_{i_1 \dots i_k}$, le diamètre de $F_{i_1, \dots, i_k}$ tendant vers 0 pour $k \to \infty$.

Posons:

$$Z^{j_1 j_2, \dots, j_e}_{i_1 i_2, \dots, i_k} = U(F_{j_1, \dots, j_e\, i_1, \dots, i_k}) \tag{1}$$

$$Z^{j_1, j_2, \dots, j_e} = \sum_{(i_1 i_2 \dots)} Z^{j_1, \dots, j_e}_{i_1} Z^{j_1, \dots, j_e}_{i_1, i_2} Z^{j_1, \dots, j_e}_{i_1, i_2, i_3} \dots \tag{2}$$

On verifie aisément que

$$Z = \sum_{(j_1 j_2 \dots)} Z^{j_1, j_2, \dots, j_e}. \tag{3}$$

Tout $Z^{j_1, j_2, \dots, j_e}$ est un ensemble (A), car il admet un système déterminant, dont les éléments sont des $F_\sigma\, G_\delta$. Donc, Z étant d'après (3) la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (A), Z est aussi un ensemble (A). c. q. f. d.

4. Soit maintenant $E = E_1 - E_2$, E_1 et E_2 désignant deux ensembles (A) linéaires. Nous pouvons supposer que $E_2 \subset E_1$. Supposons que E est situé sur l'axe des abscisses. Il existe une fonction $f(t)$ continue du côté gauche pour $0 < t \leqq 1$ et telle que l'ensemble de ses valeurs coïncide avec E_1 [1]). Soit K_1 l'image de la fonction $x = f(y)$ c. à d. l'ensemble de tous les points $(f(y), y)$ pour $0 < y \leqq 1$. C'est un G_δ, car $f(y)$ est de classe 1. Soit M un ensemble G_δ contenu dans la bande: $0 \leqq y \leqq 1$, dont la projection sur l'axe des abscisses est E_2. Désignons par M_n le transformé de M par la transformation: $x' = x$, $y' = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} y$. Soit:

$$P = K_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{4}$$

et H l'ensemble des y maxima de P. Je dis que H possède les trois propriétés requises. C'est évident pour la troisième propriété, d'après la définition d'un y-maximum. Pour la première propriété cela résulte de 3 et de ce que P est, d'après (4), un $G_{\delta\sigma}$ (c'est même

[1]) V. la Note précedente de M. Sierpiński. La possibilité d'utiliser le résultat de cette Note, ce qui a simplifié d'une manière essentielle la construction de l'ensemble H — m'a été indiqué par M. Sierpiński.

un G_δ). Reste la deuxième propriété: Une droite $x=a$ rencontre P seulement dans le cas où $a \varepsilon E_1$. Si $a \varepsilon E_2$ cette droite rencontre M_n, donc elle contient pour toute valeur de n un point (a, y_n) tel que $2-\frac{1}{n} \leqq y_n \leqq 2-\frac{1}{2n}$. Donc le y-maximum de P sur cette droite aurait l'ordonnée $\geqq 2$, ce qui est impossible, car P est situé d'après (4) dans la bande $0<y<2$. On voit ainsi que la droite $x=a$ ne rencontre pas H si $a \varepsilon E_2$ ou si a est en dehors de E_1.

Supposons maintenant que $a \varepsilon E_1 - E_2$. La droite $x=a$ ne rencontre alors aucun M_n c. à d. tout point (a, y) contenu dans P est situé dans K_1. Soit $y(a)$ la borne supérieure des ordonnées des points $(a, y) \varepsilon K_1$. Supposons, que le point $(a, y(a))$ n'appartient pas à l'ensemble P. Il existe alors une suite $\{y_k\}, k=1,2\ldots$ telle que:

$$(5) \qquad y_k < y_{k+1}; \quad \lim_{k=\infty} y_k = y(a); \quad (a, y_k) \varepsilon K_1.$$

Ces relations entraînent en vertu de la définition de K_1:

$$(6) \qquad 0 < y_k \leqq 1; \quad 0 < y(a) \leqq 1; \quad a = f(y_k).$$

Donc, $f(y)$ étant continue du côté gauche pour $0<y\leqq 1$:

$$(7) \qquad f(y(a)) = \lim f(y_k) = a$$

$$(8) \qquad (a, y(a)) = (f(y(a)), y(a)) \varepsilon K_1 \subset P,$$

contrairement à la supposition. Donc $(a, y(a)) \varepsilon P$. Mais, d'après la définition de $y(a)$, c'est un y-maximum de P, donc un point de H. C à d.: Si $a \varepsilon E_1 - E_2$, alors la droite $x=a$ rencontre H.

Les considérations précédentes montrent que $E_1 - E_2 = E$ est la projection de H sur l'axe des abscisses, c. q. f. d.

Une propriété des continus de M. Knaster.

Par

Paul Urysohn †.

M. **Brouwer** à introduit dans la science mathématique les *continus indécomposables*.

M. **Knaster** a donné ensuite un exemple d'un continu indécomposable dont tout sous-continu est lui aussi indécomposable. Nous appellerons *continu de M. Knaster* tout continu jouissant de cette propriété.

On pourrait introduire dans le même ordre d'idées la notion d'un *semicontinu* [1]) *indécomposable*: nous entendons par là un semicontinu S qui ne peut être représenté comme somme de deux semicontinus S_1 et S_2 dont aucun ne coïncide avec S tout entier.

Le but de cette note est de démontrer la propriété suivante des continus de M. **Knaster**:

Tout semicontinu agrégé à un continu de M. Knaster est indécomposable.

Soit S un sémicontinu quelconque agregé à un continu K de M. **Knaster**. Supposons qu'on ait

$$(1) \qquad S = S_1 + S_2, \quad S_1 \neq S \neq S_2,$$

où S_1 et S_2 sont des semicontinus. Il résulte de (1) qu'on peut trouver deux points a et b tels que

$$(2) \qquad a \subset S_1 - S_2, \quad b \subset S_2 - S_1.$$

[1]) Nous entendons dans cette note par un sémicontinu un ensemble S non fermé et tel qu'il existe pour tout couple de points x, y de S un continu C_{xy} vérifiant l'inclusion:

$$x + y \subset C_{xy} \subset S.$$