subsiste pour presque tous les points P de l'ensemble E, R_P désignant ici des rectangles centrés en P, leurs diamètres tendant vers 0?

M. Zygmund a bien voulu me communiquer que l'exemple construit ci-dessus permet d'y donner la réponse négative. En effet on remarque que, si E est un ensemble fermé et si P est un point de E, tel qu'on peut trouver un segment (B', B) ouvert et satisfaisant aux conditions

$$P \varepsilon (B', B), \quad (B', B) . E = \mathrm{I}\, P,$$

l'équation (1) peut être en défaut, parce qu'on peut aisément construire une suite infinie $\{R_n\}$ de rectangles, centrés en P, et tels que

1) leurs diamètres tendent vers 0.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{mes\,(E . R_n)}{mes\, R_n} = 0.$

Envisageons donc un sous-ensemble F fermé de l'ensemble R'' (p. 167), de sorte que $mes\, F > 0$. Tout point de F est accessible par des lignes droites illimitées. D'après ce qui précède, aucun point de F ne possède la propriété exprimée par l'équation (1).

La réponse négative ci-dessus contient la résolution d'un problème semblable au problème de M. C. Carathéodory, concernant le théorème de M. Vitali [1]. Cette question a été résolue [2] pour la première fois par M. Banach [3].

[1]) *C. Carathéodory.* Vorlesungen über reelle Funktionen 1918, p. 304 (en bas de page). Le problème de M. Carathéodory suppose que les côtés des rectangles soient parallèles aux axes du système de coordonnées, tandis que le problème, dont on parle, ne le suppose pas.

[2]) *S. Banach.* Sur le théorème de M. Vitali. *Fund. Math. T. V.* p. 130—136.

[3]) M. S. Saks propose d'étudier le problème de M. Banach (considéré dans la note ci-dessus), en supposant que les côtés des rectangles soient parallèles aux axes du système des coordonnées.

Sur une propriété caractéristique des ensembles analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans son Mémoire „*Sur les ensembles analytiques*“ [1]) M. N. Lusin a démontré que, lorsqu'on néglige un ensemble énumérable de points, tout ensemble analytique peut être regardé comme ensemble de valeurs d'une fonction $f(t)$ continue dans $(0 \leqslant t < 1)$ du côté droit en chaque point t.

Le but de cette Note est de démontrer que le théorème de M. Lusin subsiste même sans négliger un ensemble énumérable de points: nous pouverons notamment ce

Théorème: *Tout ensemble (A) linéaire peut être regardé comme ensemble de valeurs d'une fonction $f(t)$ continue dans $(0 < t \leq 1)$ du côté gauche en chaque point t* [2]).

Nous partirons de la définition des ensembles (A) (analytiques) au moyen des systèmes déterminants [3]). Soit E un ensemble (A) lineaire donné. Il existe donc un système déterminant d'intervalles fermés $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, dont le noyau est E, c'est-à-dire

$$(1) \qquad E = \sum \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \cdots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, t. X, p. 12—15.

[2]) il suffirait évidemment de poser $\varphi(t) = f(1-t)$ pour obtenir une fonction continue du côté droit dans $(0 \leqslant t < 1)$, dont l'ensemble de valeurs est l'ensemble (A) considéré.

[3]) V. p. e. *Fund. Math.* t. VIII, p. 362.

Comme on le sait, on peut encore supposer que tout intervalle $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ est contenu dans l'intervalle $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et que la longueur de l'intervalle $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ est $< \frac{1}{k}$.

Soit t un nombre réel donné, tel que $0 < t \leq 1$. Il existe, comme on sait, une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$ bien déterminée par le nombre t, telle que

$$t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \dots \tag{2}$$

Des propriétés des intervalles $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ résulte que le produit infini

$$\delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \dots$$

est un point bien déterminé par le nombre t: désignons-le par $f(t)$. La fonction $f(t)$ est ainsi définie pour tout nombre réel t, où $0 < t \leq 1$, et il résulte sans peine de la formule (1) que l'ensemble de valeurs de $f(t)$ pour $0 < t \leq 1$ est l'ensemble E. Il nous reste donc à démontrer que la fonction $f(t)$ est continue du côté gauche dans $(0 < t \leq 1)$ en tout point t.

Soit

$$t_0 = \frac{1}{2^{n_1^0}} + \frac{1}{2^{n_1^0+n_2^0}} + \frac{1}{2^{n_1^0+n_2^0+n_3^0}} + \dots \tag{3}$$

un nombre réel donné, $0 < t_0 \leq 1$, et soit ε un nombre positif donné quelconque. Désignons par k un nombre naturel, tel que

$$\frac{1}{k} < \varepsilon. \tag{4}$$

Posons

$$t_1 = \frac{1}{2^{n_1^0}} + \frac{1}{2^{n_1^0+n_2^0}} + \dots + \frac{1}{2^{n_1^0+n_2^0+n_k^0}} \tag{5}$$

(nous aurons évidemment $0 < t_1 < t_0$); soit t un nombre réel, tel que

$$t_1 < t < t_0, \tag{6}$$

et soit (2) le développement de t.

De (2), (3), (5) et (6) il résulte sans peine que

$$n_i = n_i^0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

donc que

$$\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \delta_{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0}. \tag{7}$$

Or, il résulte de la définition de la fonction $f(t)$ que le nombre $f(t)$ est contenu dans l'intervalle $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et le nombre $f(t_0)$ dans l'intervalle $\delta_{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0}$. Les nombres $f(t)$ et $f(t_0)$ étant ainsi compris, d'après (7), dans le même intervalle $\delta_{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0}$ de longueur $< 1/k$, on trouve, d'après (4):

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Nous avons ainsi démontré que, pour tout nombre réel t_0, tel que $0 < t_0 \leqslant 1$, et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $t_1 < t_0$, tel que l'inégalité (6) entraîne l'inégalité (8), ce qui prouve que la fonction $f(t)$ est continue du côté gauche en tout point t de l'intervalle $0 < t \leq 1$. Notre théorème est ainsi démontré.

Or, toute fonction d'une variable réelle, qui est partout continue du côté gauche, admet, comme on sait, un ensemble au plus dénombrable de discontinuités et parsuite est une fonction de classe $\leqslant 1$ de M. R. Baire: l'ensemble de valeurs d'une telle fonction est donc un ensemble (A). La propriété des ensembles (A) que nous venons de démontrer est donc caractéristique pour ces ensembles.