Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

§ 1. L'objet du présent travail est de donner la résolution du problème suivant posé par M. S. Banach dans les *Fundamenta Math.* vol. *VI* (p. 279).

Un ensemble plan fermé, dont tout point est linéairement accessible, est-il nécessairement de mesure superficielle nulle?

Cette question est intimément liée à l'étude de la mesure des projections des ensembles fermés.

Dans cet ordre d'idées MM. S. Mazurkiewicz et S. Saks [1]) ont obtenus un résultat fort intéressant en démontrant qu'il existe un ensemble plan, fermé, dont les projections orthogonales sur toutes les droites:

$$x = t\cos\varphi, \quad y = t\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < \pi,$$

ont la mesure 0 l'exception étant faite pour une seule droite, pour laquelle on obtient un ensemble de mesure positive. Les auteurs ont remarqués, à la fin de leur article, qu'on peut modifier convenablement leur construction afin d'obtenir „un ensemble plan fermé, dont la projection sur toute droite $y = mx$ $(-M \leqslant m \leqslant M)$ est un segment de longueur $\geqslant 1$ et sur toute autre droite passant par l'origine — un ensemble de mesure nulle; M désigne un nombre non négatif quelconque". En s'appuyant sur un lemme d'ont l'énoncé est un

[1]) Sur les projections d'un ensemble fermé. *Fundamenta Mathematicae.* Tome 8. p. 109—113.

peu différent de ci-dessus, nous allons démontrer l'existence d'un ensemble E jouissant des propriétés suivantes:

1°. E est situé dans un carre, dont le côté est égale à *un.* 2°. $mes\,E = 1$, 3°. pour chaque point $x \varepsilon E$ il existe une droite l, qui a avec E un seul point commun, à savoir le point x.

Cet exemple montre donc qu'il existe des ensembles fermés plans de mesure > 0, pour lesquels tous les points sont rectilinéairement accessibles. Nous nous servirons plusieures fois de l'axiome de M. Zermelo quoique il ne serait pas difficile de s'en passer.

Nous construirons, en employant la méthode de MM. Mazurkiewicz et Saks (un peu modifiée), un certain ensemble plan, ensuite un ensemble dans l'espace à 3 dimensions moyennant duquel nous obtiendrons une classe non dénombrable d'ensembles, laquelle nous permettra enfin atteindre notre but.

Notations employées dans le présent travail.

1°. $\langle a, b \rangle$ désigne le segment rectiligne fermé joignant les points a et b.

2°. *mes* E désigne la mesure de l'ensemble E au sens de M. Lebesgue.

3°. $\widehat{xyz}\{\ldots\}$ désigne l'ensemble de tous les points dont les coordonnées x, y, z satisfont à la condition vue entre les accolades $\{\ldots\}$.

4°. Il nous faudra considérer outre des ensembles de points aussi des ensembles dont les éléments sont *des droites* et il sera nécessaire de faire la distinction entre la droite l et l'ensemble de tous les points de cette droite. Ce dernier ensemble sera désigné par *ens* l.

5°. Si R est une correspondance biunivoque entre les points de l'espace ou du plan, le symbole $R\,pro\,E$ désigne ce qui correspond au E par cette correspondance. Nous aurons besoin dans la suite des différentes translations et rotations, que nous considérons toujours comme des correspondances entre des points de l'espace ou du plan.

6°. Nous aurons besoin de faire la distinction entre la *direction*, (définie par un faisceau de droites parallèles et ayant la même orientation) et la *direction „double"* ou *bi-direction* définie par un faisceau de droites parallèles dont on n'a pas choisi aucune orientation. Chaque direction (simple) peut être représentée par un nombre réel φ on plus généralement par $\varphi + 2N\pi$ (N entier), où

$$x = t\cos\varphi + x_0, \qquad y = t\sin\varphi + y_0, \qquad t > 0$$

sont les équations des demi droites appartenant à cette direction. D'une manière analogue le nombre φ représente aussi la bi-direction:

$$x = t\cos\varphi + x_0, \qquad y = t\sin\varphi + y_0$$

(où le paramètre t peut prendre toutes les valeurs). Pour que deux nombres φ et φ' représentent la même bi-direction il faut et il suffit qu'il existe un nombre entier N, tel que: $\varphi = \varphi' + N\pi$.

Si a, b sont deux nombres tels que

$$0 < b - a < \pi$$

nous désignerons par bi-angle $<a, b>$ ou *ang* $<a\,b>$ l'ensemble de toutes les bi-directions pour lesquelles ils existent leurs nombres φ représentant, satisfaisant à l'inégalité

$$a \leqslant \varphi \leqslant b\,.$$

$\varphi\, \varepsilon$ *ang* $<a\,b>$ veut dire que la bi-direction representée par le nombre φ appartient à l'ensemble *ang* $<a, b>$. Dans ce cas nous employerons l'expression: *la bi-direction φ appartient au bi-angle* $<a, b>$: L'expression φ se trouve *en dehors de l'ang* $<a, b>$ signifera que la bi-direction n'appartient pas à *ang* $<a, b>$. Nous désignerons parfois par une même lettre un nombre et la direction ou la bi-direction correspondante.

7⁰. Nous emploierons souvent des différentes projections, soit des projections orthogonales soit obliques ou même des projections par des rayons partant d'un point, et c'est dans ce but que nous allons introduire la notation suivante:

Si E est un ensemble de points, le symbole

$$proj_A^B\, E$$

désigne l'ensemble de points qu'on obtient en projéttant tous les points le E sur la droite (ou le plan) A par moyen des rayons d'un faisceau de droites (ou de plans) désigné par B.

Dans le cas des projections orthogonales nous nous permettons de supprimer l'un ou autre indice en écrivant simplement:

$$proj_A\, E \quad \text{ou} \quad proj^B\, E,$$

mais seulement si la présence de l'autre indice sera indifférente. P. ex. si φ est une bi-direction le symbole *mes* $proj_\varphi E$ désigne la mesure de l'ensemble obtenu par la projection orthogonale de l'ensemble E sur n'importe quelle droite du faisceau „bi-direction φ".

8⁰. $a\, \varepsilon\, b$ veut dire que a appartient comme élément à l'ensemble b.

9⁰. $S(a, r)$ représente le cercle ouvert, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points dont la distance du point a est *inférieure* a r.

$S<a, r>$ représente le cercle fermé, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points dont la distance du point a est $\leqslant r$.

§ 2. Nous démontrerons le suivant:

I. Théorème auxiliaire: Soient $0 < r' < r$, $\eta > 0$ et α, β des nombres positifs, satisfaisant à l'inégalité $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions on peut construire un ensemble F jouissant des propriétés suivantes:

1. F est somme d'un nombre fini de cercles fermés dont les rayons sont égaux.

2) $F \subset S(0, r)$.

3) Si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \lambda \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha$,

on a: *mes* $proj^\lambda F > 2r'$

4) Si $-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \leqslant \lambda \leqslant -\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$

on a: *mes* $proj^\lambda F < 2\eta$.

Pour démontrer ce théorème j'emploierai la méthode analogue à celle qui est exposé dans le mémoire cité de MM. **Mazurkiewicz** est **Saks**. J'en expose ici la démonstration de ce lemme parce que ses conséquences semblent être paradoxales et sa démonstration, quoique facile, est assez longue et pénible et ne paraît pas être tout-à-fait évidente.

Démonstration: Envisageons un système des coordonnées rectangulaires x, y et soit le sens positif pour les angles celui, qui fait coïncider l'axe $+x$ avec l'axe $+y$ après une rotation de l'angle $+\frac{\pi}{2}$. Nous ne considérons que des demidroites avec lesquelles l'axe $+x$ fait un angle $\geqslant -\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$. Désignons par $A(\varphi)$ la demidroite issue du point A et avec laquelle l'axe $+x$ fait un angle égal à φ. La droite illimitée portant la demidroite $A(\varphi)$ sera désignée par $\overline{A(\varphi)}$.

Nous avons supposé que

$$\alpha > 0, \quad \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Choisissons un nombre β' où $0 < \beta' < \beta$ et posons

$$\gamma \underset{df}{=} \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta'). \tag{2}$$

On a évidemment

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

I. Lemme. Si $-\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta' < l < \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta'$ et $c > 0$ est inférieur aux nombres: $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\sin\beta'$, on a $\cos(l + \alpha) > c$.

En effet, si $l \geqslant 0$, on a: $0 < l + \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta'$, d'où

$$\cos(l + \alpha) > \sin\beta' \tag{4}$$

Dans le cas où $l<0$ on a: $-\frac{\pi}{2}+\alpha<l+\alpha<\alpha$, d'où, si $l+\alpha\leqslant 0$, il s'ensuit que:

$$\cos(l+\alpha)>\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \tag{5}$$

et si $l+\alpha>0$, on obtient

$$\cos(l+\alpha)>\cos\alpha. \tag{6}$$

Les inégalités (4), (5) et (6) démontrent le lemme.

Remarque A. Soit

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta'<l<l'<\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta' \tag{6 bis}$$

et soit A un point quelconque. La droite $\overline{A(l')}$ ne passe jamais par le domaine convexe de l'angle: $\left[A\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ A(l)\right]$.

Par conséquant il existe une droite m, parallèle à $\overline{A(l')}$ et coupant les deux demidroites $A\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $A(l)$, cette droite m pouvant être choisie de manière à ce que la distance du point A soit si petite qu'on veut. Envisageons une droite m comme ci-dessus et soient P et Q ses points d'intersection avec $A\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $A(l)$ respectivement. Les points A, P, Q forment donc toujours un triangle, qui nous donne:

$$PQ=QA\frac{\cos(l+\alpha)}{\cos(l'+\alpha)} \tag{7}$$

$$AP=QA\frac{\sin(l'-l)}{\cos(l'+\alpha)} \tag{8}$$

comme $-\frac{\pi}{2}-\alpha<-\frac{\pi}{2}<l$, la demidroite $A\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ coupe nécessairement le segment ouvert (P, Q) dans un point, soit S. Elle coupe aussi la demidroite $P(l)$ dans un point, soit R.

Remarque B. Soit P_1 le point d'intersection des demidroites $P(l)$ et $Q\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Cherchons une condition suffisante pour qu'il soit $PR<PP_1$.

On a: $PP_1=AQ$ et $PR=AP\frac{\sin\alpha}{\cos l}$, c'est qu'on tire du triangle APR. Cela nous donne, par rapport à (8):

$$PR=AQ\frac{\sin(l'-l)}{\cos(l'+\alpha)}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos l}.$$

Mais d'après l'hypothèse:

$$\cos l>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \tag{9}$$

d'où et par rapport au lemme I: $PR<AQ\frac{\sin(l'-l)}{c}$.

Par conséquent: Si l'on suppose que $0<l'-l<c$, on obtient $PR<PP_1$ et cela quels que soient l et l' satisfaisant à la condition (6 bis).

Remarque C. Le triangle ARP nous donne:

$$AR=AP.\frac{\cos(\alpha+l)}{\cos l},$$

donc, en vertu de (8):

$$AR=QA.\frac{\cos(\alpha+l)}{\cos l}\cdot\frac{\sin(l'-l)}{\cos(\alpha+l')}.$$

Par rapport à (9) et en vertu du lemme on en obtient:

$$AR<QA.\frac{\cos(\alpha+l).\sin(l'-l)}{\sin\alpha.c}$$

donc

$$AR<\frac{QA}{c^2}. \tag{10}$$

Par conséquent, si $QA<c^2.\varepsilon$, où $\varepsilon>0$, on a toujours $AR<\varepsilon$, quelques soient l et l' satisfaisants à la condition (6 bis).

Remarque D. Soit λ tel que $-\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\lambda\leqslant-\frac{\pi}{2}$ et envisageons le segment AS. Du triangle APS on tire:

$$AS=AP\frac{\cos(\alpha+l')}{\cos l'}$$

d'où, par rapport à (8):

$$AS=AQ\frac{\sin(l'-l)}{\cos l'}.$$

On en conclut, comme plus haut, que: $AS < \frac{AQ}{c}$ parce que l'inégalité (9) est vraie pour l'.

Par conséquant: $mes\ proj^{\lambda} AS < \frac{AQ}{c} \sin \alpha$.

Donc, si l'on suppose que $AQ < \frac{\varepsilon . c}{\sin \alpha}$, on obtient

$$mes\ proj^{\lambda} AS < \varepsilon$$

quelque soit λ, où $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \lambda \leqslant -\frac{\pi}{2}$ et quelques soient l et l' satisfaisant à la condition (6 bis).

Remarque *E*. Soit $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \lambda \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha$. Etant donné un vecteur $\overrightarrow{MN}$ désignons par $proj^{\lambda} \overrightarrow{MN}$ le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ que l'on obtient en projetant $\overrightarrow{MN}$ sur la droite

(13 bis) $$x = t \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = t \sin\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right),$$

et par $mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{MN}$ la mesure algébrique de $\overrightarrow{M'N'}$, en considérant comme le sens positif de la droite (13 bis) celui de la direction $\lambda + \frac{\pi}{2}$.

Par rapport à (8) on a:

$$mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AP} = QA \left(\frac{\sin (l' - l)}{\cos (l' + \alpha)} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha - \lambda - \frac{\pi}{2} \right)$$

donc

(13 ter) $$mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AP} \leqslant 0$$

parce que $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + 2\alpha < \frac{\pi}{2}$.

D'une manière analogue on obtient

$$mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AQ} = QA . \cos \left(l - \lambda - \frac{\pi}{2} \right) > 0$$

parce que $0 < l - \lambda < \pi$.

Il s'ensuit que les points $proj^{\lambda} P$, $proj^{\lambda} A$, $proj^{\lambda} Q$ procédent dans la direction $\lambda + \frac{\pi}{2}$, si $-\frac{\pi}{2} - \alpha < \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$ et $-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta') \leq l < l' \leq \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta')$.

Cherchons maintenant des conditions suffisantes pour que $|mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AQ}| > |mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AP}|$. On trouve qu'une telle condition est: $0 < l' - l < c^2$.

En effet, soit $0 < l' - l < c^2$. Il s'ensuit progressivement:

$$\frac{l' - l}{c} < c < \sin \beta', \qquad \frac{\sin (l' - l)}{\cos (l' + \alpha)} \cos (\alpha + \lambda) < \sin \beta',$$

ce qui résulte des faits: $0 < c < 1$, $0 \leq \cos (\alpha + l) \leq 1$, $\sin (l' - l) < < (l' - l)$ et $\cos (l' + \alpha) > c$ (I Lemme).

Mais on a:

$$\pi - \beta' \geq l + \frac{\pi}{2} + \alpha \geqslant l - \lambda \geqslant l + \frac{\pi}{2} - \alpha \geqslant \beta',$$

d'où $\sin (l - \lambda) \geqslant \sin \beta'$, donc

$$\frac{\sin (l' - l)}{\cos (l' + \alpha)} \cos (\alpha + \lambda) < \sin (l - \lambda)$$

c'est à-dire $|mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AQ}| > |mes\ proj^{\lambda} \overrightarrow{AP}|$.

Remarque *F*. Cela posé, envisageons le segment AB, où $B (\neq A)$ est un point situé sur la demidroite $A(l)$. Divisons AB en n parties égales:

$$AA_1 = A_1 A_2 = \ldots = A_{n-1} B,$$

où $n \geqslant 3$. Posons $A_0 \underset{df}{=} A$ et $A_n \underset{df}{=} B$ et définissons P_i comme le point d'intersection des droites: $\overline{A_i \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$ et $\overline{A_{i+1} (l')}$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Soit maintenant $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$ et $0 < l' - l < c^2$. Ce qui nous intéresse, c'est la projection de l'ensemble:

(13) $$T \underset{df}{=} \widehat{xy} \{x \geqslant a\} . \sum_{i=0}^{n-1} P_i A_{i+1},$$

où a désigne l'abscisse du point A.

Dans le cas où $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$, on peut démontrer que

$$proj^{\lambda} T \supset proj^{\lambda} AB.$$

En effet, soient $P_0', A_0', P_1', A_1', \ldots, P_n', A_n'$ les projections des points $P_0, A_0, P_1, A_1, \ldots, P_n, A_n$ sur la droite (13 bis) orientée comme plus haut. Par rapport à la remarque E, si l'on suppose que $0 < l' - l < c^2$, les projections ci-dessus sont écrites dans leur ordre. Il s'ensuit que

$$P_0' A_n' = proj^\lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i A_{i+1}.$$

Par conséquent, en vertu de la remarque B, $proj^\lambda T$ est un segment dont A_n' est l'une de ses extrémités, parce que la demidroite $A_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ne coupe qu'un seul de segments $P_i A_{i+1}$, à savoir le segment $P_0 A_1$.

Mais la demidroite $A_0(\lambda)$ coupe nécessairement le segment $P_0 A_1$ dans un point E qui se trouve sur le segment $\widehat{xy}\{x \geqslant a\}.P_0 A_1$ et on a $proj^\lambda E = A_0'$. On en déduit facilement que dans notre cas $proj^\lambda T \supset proj^\lambda AB$.

Dans le cas où $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$, on trouve par un raisonnement analogue que

$$proj^\lambda T \subset proj^\lambda AB.$$

Supposons que $0 < l' - l < c^2$. Il s'ensuit que $0 < l' - l < c$ car $c < 1$; par conséquent, d'après la remarque B, la projection de T diffère de celle de AB d'un segment, qui est précisément identique à $proj^\lambda AS$, où S est le point d'intersection des demidroites $A_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $P_0(l')$.

On en conclut que:

$$proj^\lambda AB = proj^\lambda AS + proj^\lambda T.$$

Soit maintenant n tel que

$$\frac{AB}{n} < \frac{\sin\alpha}{\varepsilon c}.$$

D'après la remarque D, il s'ensuit que: $mes\, proj^\lambda AS < \varepsilon$.

D'une façon générale, ayant donné un segment droit quelconque AB, où l'abscisse de A est inférieure à celle de B, désignons par $\theta(n, l')$ l'opération qui consiste à remplacer AB par l'ensemble T construit comme ci-dessus (13); on suppose ici que $-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta') < l < l' < +\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta')$, où l désigne la direction de AB. Cette opération est univoque.

En résumant on peut affirmer que si

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta' < l < l' < \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta', \tag{12 ter}$$

$$l' - l < c^2$$

et

$$n > \frac{AB}{\varepsilon . c} \sin\alpha,$$

on a, quelque soit λ, satisfaisant à la condition: $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$ la propriété suivante:

Il suffit qu'on ajoute à l'ensemble $proj^\lambda T$ un segment de longueur $< \varepsilon$, pour que la somme ainsi obtenue renferme l'ensemble $proj^\lambda AB$; T est le résultat de l'opération $\theta(n, l')$ appliquée au segment AB et est défini par (13).

Remarque G. Soit d la longueur du segment AB et d' la somme des longueurs de tous les segments dont se compose T. d est évidemment inférieur a la longueur de $P_0 A_1$ prise n fois. Par rapport à (7) on trouve:

$$P_0 A_1 = A_0 A_1 . \frac{\cos(l+\alpha)}{\cos(l'+\alpha)}$$

donc:

$$d' < d \frac{\cos(l+\alpha)}{\cos(l'+\alpha)}.$$

Le triangle $A_0 P_0 A_1$ est analogue au triangle APQ considéré plus haut. Envisageons le point R, c'est-à-dire le point d'intersection des demidroites $A_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $P_0(l)$ et appelons la longueur du segment $A_0 R$: *l'hauteur de l'ensemble* T. D'après (10) on a

$$A_0 R < \frac{A_0 A_1}{c^2} = \frac{AB}{n c^2}. \tag{15}$$

On en conclut que: Le nombre $\varepsilon \geqslant 0$ étant donné, si l'on prend

$$n > \frac{AB}{c^2 . \varepsilon},$$

l'hauteur de l'ensemble T, que l'on obtient de AB en y appliquant l'opération $\theta(n, l')$, est $< \varepsilon$.

Remarque H. Soit

$$(15\,\text{bis}) \quad \begin{cases} 0 < l' - l < c^2 \quad \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta' < l < l' < -\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta' \end{cases}$$

comme d'habitude. Soient

$$(15\,\text{a}) \qquad A_1 B_1,\ A_2 B_2, \ldots,\ A_m B_m.$$

une suite finie de segments fermés n'ayant pas de points communs et supposons qu'ils aient la direction l. Choisissons un nombre positif σ. Appliquons l'opération $\theta(n, l')$ à chaque segment (15 a), où n désigne un nombre naturel qui ne sera déterminé que dans la suite. On en obtient une suite

$$(16) \qquad T_1,\ T_2, \ldots,\ T_m$$

d'ensembles dont chacun est une somme de n segments fermés possédant la direction l'.

Désignons par d la somme des longueurs des tous les segments (15a). Supposons que n satisfasse à l'inégalité:

$$(17) \qquad n > \frac{4d}{c^2 . \sigma}$$

On a à fortiori $n > \dfrac{A_i B_i}{c^2 . \frac{\sigma}{4}}$, $(i = 1, \ldots, n)$, donc, d'après la remarque F, l'hauteur de chaque T_i est inférieure à $\dfrac{\sigma}{4}$.

Soit $-\dfrac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\dfrac{\pi}{2} + \alpha$. Si $n > \dfrac{d}{\varepsilon . c} \sin \alpha$, où $\varepsilon > 0$ est choisi arbitrairement, on a: $n > \dfrac{A_i B_i}{\varepsilon . c} \sin \alpha$, donc, en vertu de la remarque E: l'ensemble $proj^\lambda A_i B_i$ est contenu dans l'ensemble $proj^\lambda T_i$ augmenté d'un segment convenable de longueur $\leq \varepsilon$.

Il s'ensuit que

$$mes\ proj^\lambda \sum_{i=1}^{m} A_i B_i \leq mes\ proj^\lambda \sum_{i=1}^{m} T_i + m\varepsilon.$$

Soit d' la somme des longueurs de tous les segments constituants tous les T_i. D'après la remarque G on trouve

$$d' < d \frac{\cos(\alpha + l)}{\cos(\alpha + l')}.$$

Le nombre n n'est pas été choisi jusqu'à maintenant. Choisissons le de sorte que:

$$n > \frac{4d}{c^2 . \sigma} \quad \text{et} \quad n > \frac{dm}{\varepsilon . c} \sin \alpha;$$

dans ces conditions on a, quelques soient l et l', satisfaisant à (15 bis)

1) la hauteur de $T_i \leq \dfrac{\sigma}{4}$.

2) la somme des longueurs des tous les segments de $\sum\limits_{i=1}^{m} T_i$ est $< d \dfrac{\cos(\alpha + l)}{\cos(\alpha + l')}$,

3) si $-\dfrac{\pi}{2} - \alpha \leqq \lambda \leqq \dfrac{\pi}{2} + \alpha$,

on a:

$$mes\ proj^\lambda \sum_{i=1}^{m} A_i B_i \leq mes\ proj^\lambda \sum_{i=1}^{m} T_i + \varepsilon.$$

Convenons de dire que $\sum\limits_{i=1}^{m} T_i$ est un des résultats de l'opération $\theta'(\sigma, \varepsilon, l')$ appliquée à l'ensemble $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i B_i$, si les propriétés 1), 2), 3) subsistent, les T_i étant construits comme plus haut par moyen de l'opération $\theta(n, l')$. Le résultat obtenu peut être exprimé en disant que pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\sigma > 0$ on peut trouver un nombre n_0 tel que, si l'on choisit $n < n_0$ et qu'on applique l'opération $\theta(n, l')$ à chaque segment $A_i B_i$, on en obtient un ensemble $\sum\limits_{i=1}^{m} T_i$, qui est un des résultats de l'opération $\theta'(\sigma, \varepsilon, l')$ appliquée à $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i B_i$.

Lemme II. Soit E un ensemble fermé, borné et tel qu'il n'existe aucune droite $x = a$ n'ayant de points communs avec E et telle que

$$E . \widehat{xy}\{x < a\} \neq 0, \quad E . \widehat{xy}\{x > a\} \neq 0.$$

Dans ces conditions on a

$$proj_0 E = proj_0 E_1,$$

où E_1 désigne le plus petit domaine convexe, fermé et contenant l'ensemble E.

En effet, on a

$$proj_0 E \subset proj_0 E_1.$$

Il suffit donc démontrer l'inclusion inverse.

Soient a_1 et a_2 les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $proj_0 E$. E étant un ensemble fermé, il existe deux points P_1 et P_2 tels que

$$P_1 \varepsilon E, \quad P_2 \varepsilon E, \quad proj_0 P_1 = (a_1, 0), \quad proj_0 P_2 = (a_2, 0).$$

On a $P_1 \neq P_2$. Envisageons le segment droit fermé $P_1 P_2$. Des hypothèses il résulte que

$$proj_0 P_1 P_2 = proj_0 E.$$

D'autre part on a

$$proj_0 P_1 P_2 = proj_0 E_1,$$

d'où résulte le lemme II.

Remarque I. Nous aurons à considérer dans la suite des parallélogrammes, possédant deux cotés parallèles à l'axe y. Nous les appelorons *parellélogrammes normaux*. Les cotés parellèles à l'axe y seront appelées *„bases"* [1]). Les cotés non parellèles à l'axe y seront appelées tout court *„côtés"*. Étant donné un segment rectiligne AB non parallèle à l'axe de y, on en peut contruire d'une infinité de manières des parellélogrammes normaux $ABCD$ pour lesquels 1) AB est une de deux cotés, 2) les bases sont situées sur les demidroites $A\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Les parallélogrammes normaux satisfaisant à ces deux conditions seront appelés *„parallélogrammes appartenant à AB"*.

Soient

$$A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \ldots, \quad A_m B_m \quad (m \geqslant 1)$$

des segments rectilignes, fermés, parallèles et n'ayant pas de points communs. Supposons que leurs direction ne soit pas parellèle à l'axe y.

[1]) comp. le Mémoire de MM. Mazurkiewicz et Saks.

Soit $\varepsilon > 0$; je dis qu'il existe un nombre $\sigma_0 > 0$ tel que, si l'on remplace les $A_i B_i$ par des parallélogrammes $A_i B_i C_i D_i$ y appartenant respectivement et possédant les basses $< \sigma_0$, on aura, quelque soit φ:

$$mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i C_i D_i \leq mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i + \varepsilon$$

et

$$proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i \subset proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i C_i D_i.$$

L'inclusion ci-dessus étant évidente, il suffit seulement de démontrer l'inégalité.

Soit $\sigma > 0$; envisageons l'ensemble

$$M_i \underset{df}{=} S<A_i, \sigma> + A_i B_i + S<B_i, \sigma>$$

et ses projections. On a:

$$proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i = proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i + \sum_{i=1}^{m} proj^{\varphi} S<A_i, \sigma> + \\ + \sum_{i=1}^{m} proj^{\varphi} <B_i, \sigma>$$

donc:

$$mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i \leq mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i + 4 m \sigma.$$

Posons $\sigma_0 \underset{df}{=} \frac{\varepsilon}{4m}$ et choisissons σ tel que $0 < \sigma < \sigma_0$. On obtient ainsi

(20) $$mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i \leq mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i + \varepsilon.$$

Si l'on désigne par M_i' le plus petit domaine convexe et fermé, enfermant M_i, on a d'après le lemme II:

$$proj^{\varphi} M_i = proj^{\varphi} M_i'$$

donc

(21) $$proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i = proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i'.$$

Soit $A_i B_i C_i D_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ un parallélogramme quelconque appartenant à $A_i B_i$ et possédant sa base $= \sigma$.

On a évidemment

$$A_i B_i C_i D_i \subset M_i'$$

donc $$proj^{\varphi} A_i B_i C_i D_i \subset proj^{\varphi} M_i',$$

donc $$proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i C_i D_i \subset proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} M_i' .$$

Des relations (20) et (21) on obtient donc: quelque soit $\varepsilon > 0$, on a

$$mes^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i C_i D_i \leq mes\, proj^{\varphi} \sum_{i=1}^{m} A_i B_i + \varepsilon,$$

si les bases sont suffisamment petites.

§ 3. Ayant achevé tous les préliminaires, nous pouvons passer à la construction principale.

Soit $N \geqslant 4$ un nombre qui ne sera déterminé que plus tard. Considérons la suite des directions:

$$l_i \overline{\overline{df}} - \gamma + i . \frac{2\gamma}{N}, \ (i = 0, 1, 2, \dots, N-1), \tag{22}$$

où $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta')$, (comparez (2)).

Pour qu'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta') < l_1 < -\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \quad \text{et} \\ & \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) < l_{N-1} < \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta'), \end{aligned} \right. \tag{23}$$

il suffit de supposer que

$$N > \frac{2\gamma}{\beta - \beta'} \tag{24}$$

Supposons donc que N satisfasse à la condition (24), et qu'on ait

$$\frac{2\gamma}{N} < c^2. \tag{24 bis}$$

Soit $0 < r' < r'' < \varrho < r$, où r' et r sont les nombres introduits dans l'énoncé du théorème auxiliaire (p. 118). Marquons le point W d'intersection de la demidroite $0\,(l_1)$ avec la circonférence du cercle $S(0, \varrho)$ et soit W' le point de la même circonférence, diamétralement opposé à W. Soit $N_0 \geqslant 4$ un nombre naturel assez grand, pour que les côtés des polygones réguliers (à $4\,N_0 + 2$ sommets) inscrits dans le cercle $S(0, \varrho)$ n'aient pas de points communs avec la circonférence du cercle $S(0, r'')$. Envisageons un polygone dont W est un des sommets. W' en est aussi un. Soient

$$\left\{ \begin{aligned} & W,\ W_1, \dots,\ W_{N_0},\ W_{N_0+1}, \dots,\ W_{2N_0},\ W', \\ & \quad W_1', \dots,\ W_{N_0}',\ W_{N_0+1}', \dots;\ W_{2N_0}',\ W \end{aligned} \right. \tag{25}$$

les sommets consécutifs, considérés dans le sens positif de parcours.

Envisageons la somme suivante de segments fermés rectilignes:

$$F_1 \overline{\overline{df}} \sum_{k=1}^{N_0} < W_k W_{2N_0-k+1} > + \sum_{k=1}^{N_0} < W_k' W_{2N_0-k+1}' > + < W W' >. \tag{26}$$

L'ensemble F_1 satisfait aux conditions du lemme II en ce qui concerne les projections $proj^{\lambda}$, où

$$-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \lambda \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha . \tag{27}$$

Cela résulte du fait que, en vertu de (23), la droite $\overline{0\,(l_1)}$ ne passe pas par le domaine convexe de l'angle $\left[0\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right), 0\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right]$. Par conséquent, quelque soit λ, satisfaisant à (27), l'ensemble $proj^{\lambda} F_1$ est identique à la projection $proj^{\lambda}$ du polygone régulier dont les sommets sont (25). Comme, d'après ce qui précède, le cercle $S < 0, r'' >$ se trouve dans l'intérieur du polygone, il s'ensuit que:

$$mes\, proj^{\lambda} F_1 > mes\, proj^{\lambda}\ S < 0, r'' >$$

c'est-à-dire:

$$mes\, proj^{\lambda} F_1 > 2\, r''. \tag{28}$$

Soit maintenant $\sigma_1 > 0$ tel que les cercles

$$\begin{matrix} S < W, \sigma_1 >, & S < W_k, \sigma_1 >, \\ S < W', \sigma_1 >, & S < W_k', \sigma_1 > \end{matrix} \quad (k = 1, \dots, N_0)$$

n'aient pas de points communs ni deux à deux ni avec la circonférence $S(0, r)$ et que $2\,\sigma_1$ soit inférieur aux distances mutuelles des segments envisagés dans la somme F_1. Soit $\eta' > 0$. Appliquons à la somme F_1 la remarque I faite dans le § 2, en remplaçant chaque segment par un parallélogramme y appartenant respectivement, dont la base est suffisamment petite et inférieure à σ_1. On obtient ainsi $2\,N_0 + 1$ parallélogrammes normaux dont les cotés ont la direction l_1. Ils n'ont pas de points communs deux à deux et ne sortent jamais de l'intérieur du cercle $S(0, r)$. En désignant par E_1 la somme de tous ces polygones, on a pour σ (voir la remarque mentionnée) suffisamment petit:

$$mes\, proj^{\varphi} E_1 \leqslant mes\, proj^{\varphi} F_1 + \eta'$$
$$F_1 \subset E_1$$

quelque soit φ.

En particulier, si $|\lambda - l_1| \leqslant |l_2 - l_1| = \frac{2\gamma}{N}$, on a:

$$mes\ proj^\lambda E_1 \leqslant mes\ proj^\lambda F_1 + \eta'.$$

Soit d_1 la somme des longueurs de tous les segments (26) dont F_1 se compose.

On a

$$mes\ proj^\lambda F_1 \leqslant d_1 \sin \frac{2\gamma}{N} < \frac{2\gamma d_1}{N}.$$

On obtient ainsi: $proj^\lambda F_1 \subset proj^\lambda E_1$ et

$$mes\ proj^\lambda E_1 \leq \frac{2\gamma d_1}{N} + \eta' \tag{30}$$

pour $|\lambda - l_1| \leq \frac{2\gamma}{N}$.

Si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$ on a:

$$mes\ proj^\lambda E_1 \geqslant mes\ proj^\lambda F_1 > 2r''. \tag{31}$$

Voila le premier pas dans la construction.

Pour aller plus loin, convenons d'appeler „*côté supérieure*" d'un parallélogramme normal celle de ses deux côtés, à laquelle „appartient" le parallélogramme suivant la définition du § 2 (Rem. I) L'ensemble E_1 c'est la somme d'un nombre fini de parellélogrammes normaux et F_1 la somme de ses côtés supérieures. Appliquons è F_1 l'opération $\theta'(\sigma, \varepsilon, l_2)$ où σ et ε sont des nombres positifs suffisamment petits, (nous indiquons ici seulement la marche générale des considérations détaillées, qui vont suivre), de sorte que l'on obtienne un ensemble-somme F_2 de segments situés dans E_1. On remplace ensuite les segments de F_2 par des parallélogrammes y appartenant. On s'arrange de manière à ce que la somme E_2 de ses parallélogrammes soit contenue dans E_1. On procède ainsi de suite en envisageant succesivement les directions $l_3, \ldots, l_{N-1}$. D'une manière générale, supposons qu'on a déja obtenu les ensembles E_i et F_i, $(1 \leq i \leq N-2)$ où F_i est somme d'un nombre fini de segments droits et fermés, — désignons les par:

$$A_1^i B_1^i,\ A_2^i B_2^i, \ldots, \tag{32}$$

sans points communs et ayant tous la même direction l_i (voir 22) et où E_i désigne la somme des parallélogrammes fermés, sans points communs deux à deux et appartenant respectivement aux segments (32). Soient

$$A_1^i B_1^i C_1^i D_1^i,\quad A_2^i B_2^i C_2^i D_2^i, \ldots \tag{33}$$

ces parallélogrammes. Les segments (32) présentent leurs côtés supérieures.

Supposons de plus que:

a) si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$ on ait:

$$mes\ proj^\lambda E_i \geqslant mes\ proj^\lambda F_i > 2r'' - (i-1)\eta''$$

b) si d_i désigne la somme des longueurs de tous les segments (32), on ait:

$$d_i \leq d_1 \frac{\cos(l_1 + \alpha)}{\cos(l_i + \alpha)}$$

c) Quelque soit φ:

$$mes\ proj^\lambda E_i \leq mes\ proj^\lambda F_i + \eta'$$

η' désigne ici le nombre introduit plus haut (p. 131) et $\eta'' > 0$ un nombre positif arbitraire.

Soit $\sigma_i > 0$ un nombre inférieur aux longueurs de toutes les bases des parallélogrammes (33).

Appliquons à F_i l'opération $\theta'(\sigma, \varepsilon, l_{i+1})$ conformément à la remarque H, et en choisissant $\varepsilon = \eta''$ et $\sigma < \sigma_i$. En vertu de (22), (24) et (24 bis), on obtient ainsi pour chaque parallélogramme $A_k^i B_k^i C_k^i D_k^i$, un ensemble T_k^i, jouissant des propriétés suivantes:

1) la hauteur de $T_k^i \leq \frac{\sigma_i}{4}$,

2) la somme des longueurs de tous les segments dont $\sum_k T_k^i$ se compose, est inférieure où égale à

$$d_i \frac{\cos(l_i + \alpha)}{\cos(l_{i+1} + \alpha)},$$

3) Si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$, on a:

$$mes\ proj^\lambda F_i \leq mes\ proj^\lambda \sum_k T_k^i + \eta''$$

4) Les segments, composant les T_k^i, ont la même direction l_{i+1}, ils sont fermés et sans points communs deux à deux. On a en outre $T_k^i \subset A_k^i B_k^i C_k^i D_k^i$.

Définissons

$$F_{i+1} = \sum_k T_k^i$$

et désignons par d_{i+1} la somme des longueurs de tous les segments de F_{i+1}. D'après b) et 2) on trouve:

$$d_{i+1} \leq d_1 \frac{\cos(l_i+\alpha)}{\cos(l_{i+1}+\alpha)} \cdot \frac{\cos(l_1+\alpha)}{\cos(l_i+\alpha)}$$

c'est-à-dire:

$$d_{i+1} \leq d_1 \frac{\cos(l_1+\alpha)}{\cos(l_i+\alpha)},$$

par conséquent, la propriété b) se conserve d'une manière inductive, si l'on passe de i à $i+1$.

Comme d'après 4):

$$T_k^i \subset A_k^i B_k^i C_k^i D_k^i$$

et d'après 1) la „hauteur" de T_k^i est $\leq \frac{\sigma_i}{4}$, on peut trouver un nombre $\sigma' > 0$ tel que, si l'on remplace chaque segment de T_k^i par un parallélogramme y „appartenant", et ayant la base $< \sigma'$, on ne sorte jamais du $A_k^i B_k^i C_k^i D_k^i$. En y appliquant la remarque I, choisissons un nombre $\sigma > 0$ et $< \sigma'$ tel que, quelque soit φ, on ait:

(35) $$\text{mes proj}^\varphi E_{i+1} \leq \text{mes proj}^\varphi F_{i+1} + \eta'$$

(36) $$\text{proj}^\varphi F_{i+1} \subset \text{proj}^\varphi E_{i+1},$$

où E_{i+1} désigne la somme de tous les parallélogrammes nouveaux, étendue à $k = 1, 2, \ldots$ On a $E_{i+1} \subset E_i$. Nous avons eu la relation 3):

$$\text{mes proj}^\lambda F_i \leqq \text{mes proj}^\lambda F_{i+1} + \eta'',$$

si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$, donc, pour les mêmes λ on a, en vertu de a) et (36):

$$\text{mes proj}^\lambda E_{i+1} \geqslant \text{mes proj}^\lambda F_{i+1} > 2r'' - i\eta'',$$

c'est-à-dire, la propriété a) se conserve, si l'on passe de i à $i+1$.

En outre (35) montre que la propriété c) se conserve aussi par l'induction.

Des raisonnement ci-dessus il résulte qu'on peut former deux suites d'ensembles

(36 bis) $$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_{N-1} \quad \text{et}$$
$$F_1, F_2, \ldots, F_{N-1},$$

où F_i se compose de segments droites fermés, ayant la même direction l_i et où E_i est la somme des parallélogrammes appartenant aux segments dont se compose F_i et tous peut être arrangé de sorte que, pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$:

1′) Si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$, on ait:

$$\text{mes proj}^\lambda E_i > 2r'' - (i-1)\eta'',$$

2′) si $l_{i-1} \leq \lambda \leq l_{i+1}$, on ait:

$$\text{mes proj}^\lambda E_i \leq \text{mes proj}^\lambda F_i + \eta',$$

3′) la somme d_i des longueurs des segments dont F_i se compose soit au plus égale à:

$$d_1 \frac{\cos(l_1+\alpha)}{\cos(l_i+\alpha)}.$$

En vertu de 3′) et en rapport au lemme I, on a:

$$d_i < \frac{d_1}{c}$$

donc, en vertu de 2′), si $l_{i-1} \leq \lambda \leq l_{i-1}$, on a:

$$\text{mes proj}^\lambda E_i \leqslant \frac{d_1}{c} \sin \frac{2\gamma}{N} + \eta' \quad \text{(voir (22))}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N-1),$$

donc d'après (22), (23) et (36 bis):

$$\text{si } -\frac{\pi}{2} + (\alpha+\beta') \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta'),$$

on a

(37) $$\text{mes proj}^\lambda E_{N-1} < \frac{2 d_1 \gamma}{cN} + \eta'.$$

On a en outre: si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$:

(38) $$\text{mes proj}^\lambda E_{N-1} > 2r'' - (N-2)\eta''$$

Les propriétés (37) et (38) peuvent être réalisées quelques soient η', η'' et N, ce dernier nombre étant seulement assujetti de satisfaire aux conditions:

$$N \geqslant 4,\quad N > \frac{2\gamma}{\beta - \beta'},\quad N > \frac{2\gamma}{c^2}.$$

Disposons de ces nombres de sorte que:

$$\eta'' < \frac{2(r'' - r')}{N - 2},\quad \eta' < \frac{\eta}{2}$$

$$N > 4 + \frac{2\gamma}{\beta - \beta'} + \frac{4 d_1 \gamma}{c\eta} + \frac{2\gamma}{c^2},$$

où η c'est le nombre introduit dans l'énonce du théorème auxiliaire p. 113.

On obtient ainsi de (37) $\text{mes proj}^{\lambda} E_{N-1} < \eta$ pour

$$-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta') \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta'),$$

donc à fortiori pour

$$-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$$

et $\text{mes proj}^{\lambda} E_{N-1} > 2r'$ pour

$$-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha.$$

L'ensemble E_{N-1} est fermé, contenu dans le cercle ouvert $S(0,r)$ et est une somme d'un nombre fini de parellélogrammes fermés.

Envisageons maintenant l'ensemble E' de tous les points (du plan considéré), dont la distance de l'ensemble E_{N-1} est $\leq \tau$, où $\tau > 0$ est un nombre 1) inférieur à la plus courte distance de E_{N-1} à la frontière du cercle $S(0,r)$ et 2) inférieur à $\frac{\eta}{2\mu}$, où μ désigne le nombre de parallélogrammes dont E_{N-1} se compose. On trouve facilement que $E' \subset S(0,r)$ et que:

$$\text{mes proj}^{\lambda} E' < 2\eta$$

$$\text{pour } -\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \leq \lambda \leq + \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta).$$

D'autre part d'après le théorème de Heine-Borel on peut trouver un nombre fini de cercles fermés dont les rayons sont $= \tau$ et dont les centres appartiennent à E_{N-1}, ces cercles étant choisis de manière que leur somme contienne l'ensemble E_{N-1}. En désignant cette somme par E on conclut de ce qui précède que: $E \subset S(0,r)$ et que:

1) si $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \lambda \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha$, on a:

$$\text{mes proj}^{\lambda} E > 2r',$$

2) si $-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \leq \lambda \leq + \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$, on a

$$\text{mes proj}^{\lambda} E > 2\eta.$$

Notre théorème auxiliaire (p. 118) est ainsi démontré.

§ 4. Ceci posé, envisageons dans l'espace à trois dimensions un système des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Nous avons besoin de considérer des projections des différents ensembles sur les droites (φ):

$$x = 0,\quad y = t\cos\varphi,\quad z = t\sin\varphi,$$

à savoir des projections obtenues au moyen des plans y perpendiculaires. La projection de l'ensemble E, obtenue de cette façon, sera désignée par $\text{proj}_{(\varphi)} E$. C'est un ensemble de points situés sur la droite (φ).

Soit

$$C \underset{df}{=} \widehat{xyz} \left\{ \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \end{matrix} \right\} \tag{1}$$

un cylindre, où y_0, z_0 sont des nombres réels arbitraires, r un nombre positif et a, b, des nombres satisfaisant à l'inégalité:

$$-\frac{\pi}{4} \leq a < b \leq + \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Soient d'autre part r' et ε des nombres tels que

$$0 < r' < r \tag{3}$$

$$\varepsilon > 0. \tag{4}$$

Posons

$$\eta \underset{df}{=} \frac{b - a}{10} \tag{5}$$

et

$$\varphi_k \underset{df}{=} \frac{b + a}{2} + 2k\eta \quad (k = -2, -1, 0, 1, 2). \tag{6}$$

Les intervalles

(7) $<\varphi_{-2}-\eta,\ \varphi_{-2}+\eta>$; $<\varphi_{-1}-\eta,\ \varphi_{-1}+\eta>$, $<\varphi_0-\eta,\ \varphi_0+\eta>$,

$$<\varphi_1-\eta,\ \varphi_1+\eta>,\quad <\varphi_2-\eta,\ \varphi_2+\eta>$$

c'est-à-dire les intervalles:

$$\left\langle \frac{b+a}{2}+(2k-1)\frac{b-a}{10},\quad \frac{b+a}{2}+(2k+1)\frac{b-a}{10}\right\rangle$$
$$(k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2),$$

n'ont pas de points communs, l'abstraction faite de leurs extrémités. et la somme des intervalles (7) est précisément l'intervalle $<a,b>$.

Envisageons le cercle

(8) $$K \underset{df}{=} \widehat{xyz}\left\{\begin{matrix} x=0 \\ (y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \leq r^2 \end{matrix}\right\}$$

qui est identique avec l'ensemble $\mathrm{proj}_{0rz} C$.

Soit $\varepsilon' > 0$ un nombre, satisfaisant à l'inégalité

(8 bis) $$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Envisageons dans le plan $0yz$ un ensemble E jouissant des propriétés 1. 2. 3. 4, énumérées dans l'énoncé du théorème auxiliaire I, après la substitution suivante:

$$S(0,r) \mid K,\quad r' \mid r',\quad 2\eta \mid \varepsilon',\quad \alpha \mid \eta,\quad \beta \mid \eta$$

On sait qu'un tel ensemble existe.

L'ensemble E est somme d'un nombre fini de cercles fermés et

(9) $$E \subset K.$$

Outre cela on a:

(10) $$mes\ proj_{(\psi)} E \geqslant 2r'$$

pour toutes les directions ψ situées dans le bi-angle

$$ang <-\eta, +\eta> \quad \text{et}$$

(11) $$mes\ proj_{(\psi)} E < \varepsilon'$$

pour tous les ψ situés en dehors du bi-angle

$$ang <-2\eta,\ +2\eta>.$$

Désignons par $S(\theta)$ la rotation de l'espace autour de l'axe $y=y_0$, $z=z_0$, la grandeur algébrique de cette rotation étant θ (on prend

un tel sens positif des rotations, qui fait transporter l'axe $+0y$ dans l'axe $+0z$ par une rotation de grandeur $\frac{\pi}{2}$).

Définissons les ensembles:

(12) $$F_k \underset{df}{=} \widehat{xyz}\left\{\begin{matrix} \varphi_k-\eta \leq x \leq \varphi_k+\eta \\ (y,z)\ \varepsilon\ S(\varphi_k)\ pro\ E \end{matrix}\right\}$$

(13) $$F \underset{df}{=} \sum_{x=-2}^{+2} F_k.$$

On voit que les ensembles F_k sont congruents deux à deux au sens euclidien et se produisent l'un de l'autre par une simple rotation, suivie d'une translation convenable.

On a

(14) $$proj_{0x} F_k = <\varphi_k-\eta,\ \varphi_k+\eta>$$

et

(15) $$proj_{0yz} F_k = S(\varphi_k)\ pro\ E.$$

Outre cela on voit que:

(16) $$F \subset C$$

et que F_k est une somme d'un nombre fini de cylindres fermés, dont les rayons sont égaux et dont les projections sur l'axe $0x$ coïncident avec l'intervalle (14).

Soit maintenant

(17) $$\psi\ \varepsilon <\varphi_k-\eta,\ \varphi_k+\eta>.$$

On a:

(18) $$\left\{\begin{aligned} & mes\ proj_{(\psi)} F_k = mes\ proj_{(\psi-\varphi_k)} [S(-\varphi_k)\ pro\ F_k] = \\ & \qquad = mes\ proj_{(\psi-\varphi_k)} E \geqslant 2r' \quad \text{d'après (10)} \end{aligned}\right.$$

parce que $\psi - \varphi_k\, \varepsilon <-\eta, +\eta>$.

Nous en tirerons une conséquence importante pour la suite.

Soit $\psi\, \varepsilon <a, b>$, il existe alors un indice k, tel que:

$$\psi\ \varepsilon <\varphi_k-\eta,\ \varphi_k+\eta>.$$

On en déduit en vertu de (18) que: $mes\ proj_{(\psi)} F_k \geqslant 2r'$, d'où à fortiori:

(19) $$mes\ proj_{(\psi)} F \geqslant 2r'$$

pour tous les ψ, où $\psi\, \varepsilon <a, b>$.

Cela posé, soit φ un nombre arbitraire. Posons:

(20) $$P_\varphi \underset{df}{=} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz}\,\{\varphi - 3\eta + N\pi \leq x \leq \varphi + 3\eta + N\pi\}.$$

Allons étudier la mesure de l'ensemble $proj_\varphi\,[F - P_\varphi]$.

On a d'après (11)

(21) $$mes\,proj_\psi\,F_k < \varepsilon'$$

dans le cas, où la bi-direction ψ se trouve en dehors de

$$ang < \varphi_k - 2\eta,\ \varphi_k + 2\eta >.$$

Cela résulte du fait que, pour le nombre ψ, on a:

$$mes\,proj_\psi\,F_k = mes\,proj_{\psi-\varphi_k}[S(-\varphi_k)\,pro\,F_k] = mes\,proj_{\psi-\varphi_k}\,E,$$

la bi-direction $\psi - \varphi_k$ se trouvant en dehors du bi-angle

$$ang < -2\eta,\ +2\eta >.$$

De (21) il s'ensuit qu'on a

(22) $$mes\,proj_\varphi\,F_k < \varepsilon'$$

pour tous les indices k, pour lesquels la bi-direction φ se trouve en dehors du bi-angle $<\varphi_k - 2\eta,\ \varphi_k + 2\eta>$.

Ce sont précisément ces indices, pour lesquels la bi-direction φ_k est située en dehors du bi-angle $<\varphi - 2\eta,\ \varphi + 2\eta>$. Donc, seulement pour les indices k, pour lesquels

(23) $$\varphi_k\ \varepsilon\ ang < \varphi - 2\eta,\ \varphi + 2\eta >,$$

l'inégalité (22) peut être en défaut.

Pour ces k on a:

$$ang < \varphi_k - \eta,\ \varphi_k + \eta > \subset ang < \varphi - 3\eta,\ \varphi + 3\eta >$$

donc d'après (14)

$$F_k \subset \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz}\,\{\varphi - 3\eta + N\pi \leqslant x \leqslant \varphi + 3\eta + N\pi\}$$

c'est-à-dire $F_k \subset P_\varphi$.

Il s'ensuit que l'ensemble $F - P_\varphi$ n'a pas de points communs avec F_k si l'indice k et tel que (23) est satisfait. Donc $F - P_\varphi \subset \Sigma' F_\lambda$, la sommation étant étendue à tous les indices λ restants.

On a donc:

$$mes\,proj_{(\varphi)}\,(F - P_\varphi) \leq mes\,proj_{(\varphi)}\,\Sigma' F_\lambda \leq \Sigma'\,mes\,proj_{(\varphi)}\,F_\lambda \leq 10\,\varepsilon'$$

c'est-à dire d'après (8 bis):

(24) $$mes\,proj_{(\varphi)}\,(F - P_\varphi) < \varepsilon$$

pour tous les φ.

Nous avons ainsi démontré le suivant

II. Théorème auxiliaire: Étant donné d'une part un cylindre:

$$C \underset{df}{=} \widehat{xyz} \begin{Bmatrix} a \leq x \leq b \\ (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \end{Bmatrix}$$

où $a < b$ et $r > 0$, et d'autre part deux nombres r' et ε où $0 < r' < r$, $\varepsilon > 0$, on peut construire cinq ensembles:

$$F_{-2},\ F_{-1},\ F_0,\ F_1,\ F_2$$

jouissant des propriétés suivantes, que nous apellerons les *propriétés* (β) *par rapport au cylindre* C *et aux nombres* r' *et* ε:

1. chacun des ensembles F_i est une somme d'un nombre fini de cylindres circulaires, fermés, de même rayon et de la même longueur; leurs axes sont perpendiculaires au plan yz.

2. la projection (sur l'axe $0x$) du chaque cylindre dont se compose F_i, coïncide avec l'intervalle:

$$\Delta_i \underset{df}{=} \left\langle \frac{a+b}{2} + \frac{(2i-1)(b-a)}{10},\ \frac{a+b}{2} + \frac{(2i+1)(b-a)}{10} \right\rangle.$$

3. si $\psi\ \varepsilon\ ang\ \Delta_i$ on a:

$$mes\,proj_{(\psi)}\,F_2 \geqslant 2r' \quad (i = -2, -1, 0, 1, 2).$$

4. pour tous les nombres ψ on a:

$$mes\,proj_{(\psi)}\left[\sum_{i=-2}^{+2} F_i - \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz}\left\{\psi - \frac{3(b-a)}{10} + N\pi,\ \psi + \frac{3(b-a)}{10} + N\pi\right\}\right] < \varepsilon.$$

5. $F_i \subset C$ pour tous les i.

Pour aller plus loin, nous avons besoin du lemme suivant:

III. Lemme[1]). Soient $0 < k' < k$ et $\delta > 0$, soit d'autre part M un nombre naturel. Dans ces conditions il existe un nombre l_0 tel que, quelque soit l'ensemble E, qui est une somme d'un nombre fini et $\leq M$ d'intervalles, dont chacun a la longueur δ, si l'on remplace ces intervalles par des ensembles n'importe quels, respectivement y situés et de mesure $\geqslant l.\delta$, la somme de tous ces ensembles (remplaçants) aura la mesure $\geqslant k'$.

Je donne ici la démonstration suivante, que M. Saks m'a bien voulu communiquer, cette démonstration étant beaucoup plus simple que la mienne.

Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$, $(N \leq M)$ les intervalles de longueur δ, et tels que $E = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i$.

On a d'après l'hypothèse:

$$(a) \qquad mes\, E = mes \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \geq k > k'.$$

Si l'on remplace chaque Δ_i par un ensemble F_i, où $F_i \subset \Delta_i$ et $mes\, F_i \geqslant l\delta$, on obtient:

$$mes\,(E - \sum_{i=1}^{N} F_i) \leq \sum_{i=1}^{N} mes\,(\Delta_i - F_i) \leq M.\delta.(1 - l),$$

donc, en rapport à (a):

$$mes \sum_{i=1}^{N} F_i \geqslant mes\, E - M\delta(1 - l) \geqslant k - M\delta(1 - l).$$

Il suffit, donc, prendre $l_0 \geq 1 - \frac{k - k'}{M.\delta}$, pour qu'on ait pour chaque l supérieur à l_0: $mes \sum_{i=1} F_i \geqslant k'$. Le lemme est donc démontré.

§ 5. Soit a un nombre satisfaisant à l'inégalité:

$$(1) \qquad 0 < a < 1.$$

Envisageons une suite infinie

$$q_0 > q_1 > \ldots > q_n > \ldots$$

où $0 < aq < 1$ et $\lim_{n \to \infty} q_n = 1$.

[1]) M. Saks a simplifié le lemme que j'ai utilisé dans la première rédaction de ce travail.

On a évidemment:

$$(2) \qquad a q_0 > a q_1 > \ldots > a q_4 > \ldots$$

et

$$(2\text{ bis}) \qquad \lim_{n \to \infty} (a q_n) = a.$$

Considérons le cylindre circulaire:

$$(3) \qquad C \underset{df}{=} \widehat{xyz} \begin{Bmatrix} -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ y^2 + z^2 \leqslant 1 \end{Bmatrix}.$$

D'après le résultat obtenu dans le § 4, il existe les ensembles:

$$(4) \qquad F_{i_1} \underset{df}{=} G_{i_1} \quad (i_1 = -2, -1, 0, 1, 2),$$

satisfaisant aux conditions (β) par rapport au cylindre (3) et aux nombres $a q_0$ et ε, où ε est un nombre positif, qu'on se donne arbitrairement à l'avance.

L'ensemble F_{i_1} est une somme d'un nombre fini des cylindres fermés, que nous désignerons par $C_{(i_1, 1)}, C_{(i_1, 1)}, \ldots$; ces cylindres ont leurs rayons égaux pour tous les indices et ont la même longueur $\frac{\pi}{2.5}$.

On a

$$proj_{0x}\, C_{(i_1, k_1)} = \Delta_{i_1} \quad (k_1 = 1, 2, \ldots)$$

où par définition

$$\Delta_{i} \underset{df}{=} \left\langle \frac{\pi(2i_1 - 1)}{10}, \ \frac{\pi(2i_1 + 1)}{10} \right\rangle.$$

On a $mes\, \Delta_{i_1} = \frac{\pi}{2.5}$.

Outre cela

$$(5) \qquad mes\, proj_{(\psi)}\, G_{i_1} \geqslant 2 a q_0$$

pour chaque direction ψ située dans le bi-angle $ang\, \Delta_{i_1}$.

Posons

$$(5\text{ bis}) \qquad F^{(1)} \underset{df}{=} \sum_{i_1=-2}^{+2} G_{i_1}.$$

On a

$$(6) \quad mes\, proj_{(\varphi)} \left[F^{(1)} - \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz} \left\{ \varphi - \frac{3\pi}{4.5} + N\pi \leqslant x \leqslant \varphi + \frac{3\pi}{4.5} + N\pi \right\} \right] < \varepsilon.$$

Faisons maintenant des constructions analogues en prenant pour le point de départ les cylindres $C_{(i_1,k_1)}$ au lieu de C. Soit ϱ_1 le rayon des cylindres $C_{(i_1,k_1)}$.

Envisageons deux nombres ε' et p' où $\varepsilon' > 0$ et $0 < p' < 1$; ces nombres ne serons déterminés que plus tard. Pour chaque couple (i_1, k_1) des indices considérés il existe, d'après le § 4, cinq ensembles

$$F_{(i_1,k_1),i_2}, \quad (i_2 = -2, -1, 0, 1, 5)$$

qui satisfont aux conditions (β) par rapport au cylindre $C_{(i_1,k_1)}$ et aux nombres ϱ_1 p' et ε'.

Posons

$$\Delta_{i_1,i_2} = \left\langle \frac{a_{i_1}+b_{i_1}}{2} + \frac{(2i_2-1)\pi}{4.5^2}, \quad \frac{a_{i_1}+b_{i_1}}{2} + \frac{(2i_2+1)\pi}{4.5^2} \right\rangle,$$

où a_{i_1}, b_{i_1} désignent les extrémités de l'intervalle Δ_{i_1}.

On a $\quad mes\, \Delta_{i_1,i_2} = \dfrac{\pi}{2.5^2}$.

On a

$$mes\, proj_{(\psi)} F_{(i_1,k_1),i_2} \geqslant 2\varrho_1 p' \tag{7}$$

pour $\quad \psi\, \varepsilon\, ang\, \Delta_{i_1,i_2}\quad$ et

$$\begin{aligned} mes\, proj_{(\varphi)} \Bigg[\sum_{i_2=-2}^{+2} F_{(i_1,k_1),i_1} - \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz} \Big\{ \varphi - \frac{3\pi}{4.5^2} + N\pi \leqslant x \leqslant \varphi + \\ + \frac{3\pi}{4.5^2} \quad N\pi \Big\} \Bigg] < \varepsilon' \end{aligned} \tag{7 bis}$$

pour tous les nombres φ.

Les longueurs des tous les intervalles Δ_{i_1,i_2} étant égaux, on peut construire les ensembles $F_{(i_1,k_1),i_2}$ de sorte, que les rayons de tous les cylindres, dont ils se composent, soient égaux, parce qu'on peut choisir les ensembles $F_{(i,k_1),i_2}$ de sorte qu'ils soient congruents au sens euclidien et se produisent l'un de l'autre par une simple rotation, suivie d'une translation convenable.

Supposons qu'on ait arrangé tous cela de cette manière. Pour préciser le nombre p', observons d'abord que les intervalles Δ_{i_1,i_2} $(i_1 = -2, -1, 0, 1, 2)$ n'ont pas de points intérieurs communs et

$$\sum_{i_1=-2}^{+2} \Delta_{i_1,i_2} = \Delta_{i_1}.$$

L'ensemble $F_{(i_1,k_1),i_2}$ se trouve dans le cylindre $C_{(i_1,k_1)}$ dont le rayon est ϱ_1, donc l'ensemble

$$proj_{(\psi)} F_{(i_1,k_1),i_2} \tag{8}$$

est situé dans un intervalle de longueur $2\varrho_1$, qui se trouve sur la droite $x = 0,\ y = t\cos\psi,\ z = t\sin\psi$, et est produit par la projection de $C_{(i_1,k_1)}$.

Donc l'ensemble

$$proj_{(\psi)} \sum_{k_1} F_{(i_1,k_1),i_2}$$

s'obtient en remplaçant chaque intervalle

$$proj_{(\psi)} C_{(i_1,k_1)} \quad (k_1 = 1, 2, \ldots)$$

par l'ensemble (8), dont la mesure est, d'après (7), $\geqslant 2\varrho_1 p'$, si $\psi\, \varepsilon\, ang\, \Delta_{i_1,i_2}$.

Mais

$$\sum_{k_1} proj_{(\psi)} C_{(i_1,k_1)} = proj_{(\psi)} \sum_{k_1} C_{(i_1,k_1)} = proj_{(\psi)} G_{i_1}$$

et d'après (5) $\quad mes\, proj_{(\psi)} G_{i_1} \geqslant 2aq_0 \quad$ pour $\quad \psi\, \varepsilon\, ang\, \Delta_{i_1,i_2} \subset ang\, \Delta_{i_1}$. En outre l'ensemble $proj_{(\psi)} G_{i_1}$ est toujours situé dans un segment de longueur 2. D'après (2) on a: $\ 0 < aq_1 < aq_0$.

On se trouve donc dans les conditions du lemme III, d'après lequel on peut choisir p' (indépendamment du choix des indices i_1, i_2 et de la direction ψ) de sorte qu'on ait:

$$mes\, proj_{(\psi)} \sum_{k_1} F_{(i_1,k_1),i_2} \geqslant 2aq_1.$$

Définissons:

$$G_{i_1,i_2} \mathop{=}_{df} \sum_{k_1} F_{(i_1,k_1),i_2}. \tag{8 bis}$$

On a d'après ce que nous venons de dire:

$$mes\, proj_{(\psi)} G_{i_1,i_2} \geqslant 2aq_1 \quad \text{pour} \quad \psi\, \varepsilon\, ang\, \Delta_{i_1,i_2}.$$

Définissons

$$F^{(2)} \mathop{=}_{df} \sum_{i_1} \sum_{i_2} G_{i_1,i_2}. \tag{9}$$

Je dis que, si $\psi\, \varepsilon \left\langle -\dfrac{\pi}{4}, +\dfrac{\pi}{4} \right\rangle$, on a:

$$mes\, proj_{(\psi)} F^{(2)} \geqslant 2aq_1.$$

En effet, soit $\psi \varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Il existe un indice i_1, tel que: $\psi \varepsilon \Delta_{i_1}$, donc il existe un autre indice i_2, tel que $\psi \varepsilon \Delta_{i_1, i_2}$.

Pour ces indices on a

$$mes\ proj_{(\psi)} G_{i_1, i_2} > 2 a q_1,$$

donc d'après (9):

$$mes\ proj_{(\psi)} F^{(2)} \geqslant 2 a q_1.$$

Soit maintenant φ un nombre arbitraire et posons

$$P_\varphi \underset{df}{=} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \widehat{xyz} \left\{ \varphi - \frac{3\pi}{4.5^2} + N\pi \leqslant x \leqslant \varphi + \frac{3\pi}{4.5^2} + N\pi \right\}.$$

D'après (7 bis) on a

$$mes\ proj_\varphi \left[\sum_{i_2=-2}^{+2} F_{(i_1, k_1), i_2} - P_\varphi \right] < \varepsilon'.$$

Mais d'après (8 bis) et (9) on a

$$F^{(2)} - P_\varphi = \sum_{i_1} \sum_{k_1} \left[\sum_{i_2} F_{(i_1, k_1), i_2} - P_\varphi \right],$$

donc $$mes\ proj_{(\varphi)} [F^{(2)} - P_\varphi] < m_1 \varepsilon',$$

où m_1 désigne le nombre de couples (i_1, k_1), c'est-à-dire, le nombre de cylindres desquels se compose l'ensemble $F^{(1)}$.

Le nombre ε' n'est pas déterminé jusqu'ici. Déterminons le de sorte qu'on ait $m_1 \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nous aurons ainsi:

$$mes\ proj_{(\varphi)} [F^{(2)} - P_\varphi] < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tous les nombres φ.

En outre on voit que $F^{(2)} \subset F^{(1)} \subset C$.

Cela posé, faisons une construction analogue (à celle que nous venons de considérer), mais en partant des cylindres $C_{(i_1, k_1)(i_2, k_2)}$ et des nombres $\frac{\varepsilon}{2^2}$ et $2 a q_2$.

D'une façon générale, supposons qu'on ait déja fait le $n^{i\grave{e}me}$ pas dans

cette suite de constructions. A savoir, supposons ce qui suit: 1) L'ensemble $F^{(n)}$ est une somme d'un nombre fini de cylindres fermés:

(10) $$C_{(i_1, k_1), (i_2, k_2), \ldots, (i_n, k_n)}$$

où $i_1, \ldots, i_n$, prennent des valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ et les indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ admettent des valeurs naturels en nombre fini.

(11) 2) $$F^{(n)} \subset \widehat{xyz} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ y^2 + z^2 \leqslant 1 \end{array} \right\}$$

3) Les rayons de tous les cylindres (10) sont égaux deux à deux, leurs axes sont parallèles à l'axe $0x$ et l'ensemble

$$proj_{0x}\, C_{(i_1, k_1), \ldots, (i_n, k_n)}$$

coïncide avec l'intervalle

(12) $$\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$$

pour tous les $k_1, k_2, \ldots, k_n$ considérés.

4) Les intervalles (12) n'ont pas de points intérieurs communs et on a:

(13) $$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} \Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4} \right\rangle.$$

5) On a toujours

(14) $$mes\ \Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \frac{\pi}{2.5^n}.$$

6) Les ensembles

(15) $$G_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} C_{(i_1, k_1), \ldots, (i_n, k_n)}$$

ont la propriété:

(16) $$mes\ proj_{(\psi)}\, G_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \geqslant 2 a q_{n-1}$$

pour toutes les bi-directions φ appartenant au bi-angle $ang\ \Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$.

En outre 6) $mes\ proj_{(\psi)} F^{(n)} \geqslant 2 a q_{n-1}$ pour

(17) $$\psi \varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4} \right\rangle,$$

$$(18)\quad 7)\ mes\ proj_{(\varphi)}\left[F^{(n)}-\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\left\{\varphi-\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi\leqslant x\leqslant\varphi+\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi\right\}\right]<\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$$

et 8)

$$(19)\qquad F^{(n)}\subset F^{(n-1)}.$$

Notre procédé étant supposé d'être ainsi précisé jusqu'au $n^{i\grave{e}me}$ pas, le $n+1^{i\grave{e}me}$ pas se présente comme il suit: Soient $\varepsilon''>0$ et $0<p''<1$ deux nombres, dont le choix ne sera précisé qu'ensuite.

Envisageons le cylindre

$$(20)\qquad C_{(i_1,k_1),(i_2,k_2),\dots,(i_n,k_n)},$$

un de ceux, dont $F^{(n)}$ est la somme (voir (10)).

Soit ϱ_n le rayon du cylindre (20). La projection du cylindre (20) sur l'axe $0x$ coïncide avec l'intervalle $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, dont la longueur est $\frac{\pi}{2.3^n}$.

Il existe des ensembles:

$$(21)\qquad F_{(i_1,k_1),(i_2,k_2),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}$$
$$(i_{n+1}=-2,-1,0,1,2)$$

satisfaisant aux conditions (β) par rapport au cylindre (20) et aux nombres $\varrho_n p''$ et ε''.

L'ensemble (21) est une somme d'un nombre fini de cylindres fermés, que nous désignerons par:

$$(22)\qquad C_{(i_1,k_1),(i_2,k_2),\dots,(i_n,k_n)(i_{n+1},k_{n+1})}$$
$$(k_{n+1}=1,2,\dots)$$

Leurs longueurs sont égales, à savoir $=\frac{\pi}{2.5^{n+1}}$ et leur projections sur l'axe $0x$ coïncident avec l'intervalle

$$(23)\qquad \Delta_{i_1,i_2,\dots,i_{n+1}},$$

qui, par définition, est identique avec l'intervalle:

$$(24)\quad \left\langle\frac{A+B}{2}+\frac{\pi}{2.5^n}\cdot\frac{2i_{n+1}-1}{10},\quad \frac{A+B}{2}+\frac{\pi}{2.5^n}\cdot\frac{2i_{n+1}+1}{10}\right\rangle,$$

où A et B désignent les extrémités gauche et droite de l'intervalle $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$.

On voit que les intervalles

$$\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n,i_{n+1}}$$
$$(i_{n+1}=-2,-1,0,1,2)$$

n'ont pas de points intérieurs communs et qu'ils remplissent l'intervalle $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ tout entier. Les longueurs des intervalles (23) sont égales deux à deux et le raissonnement du § 4 montre qu'on peut construire les ensembles (21) de telle manière que tous les cylindres, dont ils se composent, aient le même rayon indépendamment du choix des indices.

Définissons:

$$(25)\qquad G_{i_1,i_2,\dots,i_{n+1}}\overset{df}{=}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\dots\sum_{k_n}F_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}$$

et

$$(26)\qquad F^{(n+1)}=\sum_{i_1=-2}^{+2}\sum_{i_2=-2}^{+2}\dots\sum_{i_{n+1}=-2}^{+2}G_{i_1,i_2,\dots,i_{n+1}}.$$

D'après la définition des ensembles (21) on a:

$$(27)\qquad F_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}\subset C_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n)},$$

$$(28)\qquad mes\ proj_{(\psi)}F_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}\geqslant 2\varrho_n p''$$

pour $\psi\ \varepsilon\ ang\,\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_{n+1}}$ et

$$(29)\qquad mes\ proj_{(\varphi)}\left[\sum_{i_{n+1}=-2}^{+2}F_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}-\right.$$
$$\left.-\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\left\{\varphi-\frac{3\pi}{4.5^{n+1}}+N\pi\leq x\leq\varphi+\frac{3\pi}{4.5^{n+1}}+N\pi\right\}\right]<\varepsilon''$$

pour tous les nombres φ.

Soit ψ une bi-direction située dans le bi-angle:

$$ang\,\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n,i_{n+1}}.$$

D'après (27) l'ensemble

$$(30)\qquad proj_{(\psi)}F_{(i_1,k_1),\dots,(i_n,k_n),i_{n+1}}$$

est situé dans un intervalle de longueur $2\varrho_n$, qui se trouve sur la droite

$$x=0, \quad y=t\cos\psi, \quad y=\sin\psi,$$

et est produit par la projection du cylindre

$$C_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n)}.$$

Donc l'ensemble

$$\mathit{proj}_{(\psi)}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_n}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),\,i_{n+1}} \tag{31}$$

s'obtient, en remplaçant chaque intervalle

$$\mathit{proj}_{(\psi)}C_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n)}, \quad (k_1,\ldots,k_n=1,2,\ldots), \tag{32}$$

dont la somme, étendué à tous les $k_1, k_2, \ldots, k_n$, est identique à

$$\mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_n}, \tag{32}$$

par un ensemble convenable, à savoir par l'ensemble:

$$\mathit{proj}_{(\psi)}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),\,i_{n+1}},$$

dont la mesure, d'après (28), est $\geqslant 2\varrho_n p''$.

Le nombre de tous les intervalles (32) est fini, d'où le nombre d'intervalles (32), pour $i_1, i_2, \ldots, i_n$ fixes, est majoré par un nombre, qui est indépendant du choix de la bi-direction ψ est des indices $i_1, \ldots, i_n$.

Outre cela, d'après (11) et (15), l'ensemble

$$\mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

est situé toujours dans le même segment de longueur 2 et d'après (16)

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\geqslant 2a\,q_{n-1}$$

pour $\qquad \psi\ \varepsilon\ \mathit{ang}\ \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n}.$

D'après (2) on a:

$$0<aq_n<a\,q_{n-1}.$$

On se trouve donc dans les conditions du lemme III. D'après ce lemme, on peut choisir p'' (indépendamment du choix de ψ et des indices $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$) de sorte qu'on ait:

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\ldots\sum_{k_n}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),\,i_{n+1}}\geqslant 2a\,q_n.$$

Supposons qu'on ait choisi p'' de cette manière.
On a donc

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}\geqslant 2a\,q_n \tag{33}$$

pour tous les groupes d'indices $i_1, \ldots, i_{n+1}$ et pour chaque ψ tel que

$$\psi\ \varepsilon\ \mathit{ang}\ \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}.$$

Je dis que, si $\psi\,\varepsilon\left\langle-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle$, on a

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}F^{(n+1)}\geqslant 2a\,q_n.$$

En effet, soit

$$\psi\,\varepsilon\left\langle-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

Il existe certainement, un groupe d'indice $i_1, \ldots, i_n$, telle que

$$\psi\,\varepsilon\,\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n},$$

donc il existe un indice i_{n+1} tel que

$$\psi\,\varepsilon\,\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}}$$

Donc on a, d'après (33),

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}\geqslant 2a\,q_n.$$

Mais, en vertu de (26), on voit que

$$\mathit{proj}_{(\psi)}F^{(n+1)}\supset \mathit{proj}_{(\psi)}G_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}},$$

d'où enfin

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\psi)}F^{(n+1)}\geqslant 2a\,q_n \tag{34}$$

pour $\qquad \psi\,\varepsilon\left\langle-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle.$

Envisageons maintenant un nombre arbitraire φ et posons

$$P_\varphi \underset{df}{=} \sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\left\{\varphi-\frac{3\pi}{4.5^{n+1}}+N\pi\leqslant x\leqslant\varphi+\frac{3\pi}{4.5^{n+1}}+N\pi\right\}.$$

D'après (29) on a:

$$\mathit{mes}\ \mathit{proj}_{(\varphi)}\left[\sum_{i_{n+1}=-2}^{+2}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),\,i_{n+1}}-P_\varphi\right]<\varepsilon''. \tag{29}$$

Mais d'après (25). et (26):

$$F^{(n+1)}=\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_n}\sum_{i_{n+1}}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),i_{n+1}}$$

donc

$$F^{(n+1)}-P_\varphi=\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n}\sum_{k_1}\cdots\sum_{i_n}\Big[\sum_{i_{n+1}}F_{(i_1,k_1),\ldots,(i_n,k_n),i_{n+1}}-P_\varphi\Big].$$

Le nombre de tous les groupes considérés d'indices

$$i_1,\ i_2,\ldots,\ i_n,\quad k_1,\ k_2,\ldots,\ k_n$$

est égal au nombre de tous les cylindres (20), (dont la somme est $=F^{(n)}$); il est donc fini, soit m_n.

On a donc:

$$mes\ proj_\varphi\,[F^{(n+1)}-P_\varphi]\leq m_n\,.\,\varepsilon''.$$

Le nombre ε'' n'étant pas précisé jusqu'ici, choisissons le de sorte qu'on ait:

(35) $$m_n\,\varepsilon''<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Il en résulte l'inégalité:

(36) $$mes\ proj_{(\varphi)}[F^{(n+1)}-P_\varphi]<\frac{\varepsilon}{2^n},$$

pour tous les φ.

En outre on voit que $F^{(n+1)}$ est un ensemble fermé, composé d'un nombre fini de cylindres fermés

$$C_{(i_1,k_1),(i_2,k_2),\ldots,(i_{n+1},k_{n+1})},$$

ayant le même rayon et la même longueur.

On a aussi:

(37) $$F^{(n+1)}\subset F^{(n)}.$$

§ 6. Nous avons obtenu une suite infinie d'ensembles fermés:

(1) $$F^{(1)}\supset\ldots\supset F^{(n)}\supset\ldots,$$

situés dans le cylindre

(2) $$C=\widehat{xyz}\left\{\begin{array}{c}-\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}\\ y^2+z^2\leq 1\end{array}\right\}$$

et qui jouit des propriétés suivantes: Pour chaque bi-direction φ,

située dans le bi-angle $ang\left\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\rangle$, on a

(3) $$mes\ proj_{(\varphi)}F^{(n)}\geqslant 2a\,.\,q_{n-1},$$

où $$\lim q_n=1.$$

Pour chaque nombre φ on a:

(4) $$mes\ proj_{(\varphi)}\left[F^{(n)}-\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\left\{\varphi-\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi,\ \varphi+\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi\right\}\right]<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2^{n-1}};$$

où ε est un nombre positif et donné d'avance.

Définissons:

(5) $$H(a)\underset{df}{=}\prod_{n=1}^{\infty}F^{(n)}\qquad\text{(voir (1) § 5).}$$

Cet ensemble est fermé, non vide et on a toujours

(6) $$proj_{(\varphi)}H(a)=\prod_{n=1}^{\infty}proj_{(\varphi)}F^{(n)}$$

parce que les ensembles $F^{(n)}$ sont fermés.

Outre cela, en vertu de (1), on a

(7) $$proj_\varphi F^{(n+1)}\subset proj_\varphi F^{(n)}\quad(n=1,2,\ldots),$$

d'où il suit, d'après (6):

(8) $$mes\ proj_\varphi H(a)=\lim_{n\to\infty}mes\ proj_\varphi F^{(n)}.$$

De la propriété (3) on tire:

(9) $$mes\ proj_{(\varphi)}H(a)\geqslant 2a$$

pour $\varphi\ \varepsilon\left\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\rangle.$

Soit maintenant $\varphi\ \varepsilon\left\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\rangle$; je dis que

(10) $$mes\ proj_{(\varphi)}[H(a)-\widehat{xyz}\{x=\varphi\}]=0.$$

En effet, posons

(11) $$P_n\underset{df}{=}\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\left\{\varphi-\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi\leq x\leq\varphi+\frac{3\pi}{4.5^n}+N\pi\right\}.$$

On a d'après (5)

$$H(a)\subset F^{(n)},\quad (n=1,2,\dots)\quad \text{donc}$$

$$H(a)-P_n\subset F^{(n)}-P_n,$$

d'où, en vertu de la propriété (4):

(12) $$mes\ proj_{(\varphi)}[H(a)-P_n]\leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}.$$

Mais on a évidemment:

(13) $$P_n\supset P_{n+1}\supset\dots$$

et

(14) $$\prod_{k=0}^{\infty} P_{n+k}=\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\,\{x=\varphi+N\pi\},$$

d'où

(15) $$H(a)-\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\,\{x=\varphi+N\pi\}=\sum_{k=0}^{\infty}[H(a)-P_{n+k}].$$

On sait que $F^{(n)}\subset C$; donc $H(a)\subset C$, d'où on obtient

$$proj_{0x}\,H(a)\subset proj_{0x}\,C$$

(16) $$proj_{0x}\,H(a)\subset\left\langle -\frac{\pi}{4},\ +\frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

La longueur de l'intervalle $\left\langle -\frac{\pi}{4},\ +\frac{\pi}{4}\right\rangle$ étant inférieure à π, il s'ensuit que le nombre

$$\varphi+N\pi$$

n'appartient pas à $\left\langle -\frac{\pi}{4},\ +\frac{\pi}{4}\right\rangle$ pour $N\neq 0$.

Donc, d'après (16):

(17) $$H(a)-\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\widehat{xyz}\,\{x=\varphi+N\pi\}=H(a)-\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}$$

d'où, en vertu de (15):

(18) $$H(a)-\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}=\sum_{k=0}^{\infty}[H(a)-P_{n+k}]$$

et par conséquent:

$$mes\ proj_{(\varphi)}\,[H(a)-\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}]\leq\sum_{k=0}^{\infty} mes\ proj_{(\varphi)}\,[H(a)-P_{n+k}].$$

En vertu de (12) on en déduit:

$$mes\ proj_{(\varphi)}\,[H(a)-\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}]\leq\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}\left[1+\frac{1}{2}+\dots\right]\leq\frac{\varepsilon}{2^{n-2}}.$$

Si l'on fait croître n vers l'infini, on en obtient enfin

(19) $$mes\ proj_{(\varphi)}\,[H(a)-\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}]=0,$$

pour $$\varphi\,\varepsilon\left\langle -\frac{\pi}{4},\ +\frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

Ceci posé, envisageons une suite infinie

(20) $$0<a_1<a_2<\dots<a_m<\dots$$

convergente vers 1 et construisons des ensembles correspondantes:

$$H(a_1),\ H(a_2)\dots$$

pour lesquels on ait:

(21) $$mes\ proj_{(\varphi)}\,H(a_m)\geqslant 2a_m$$

et $$mes\ proj_{\varphi}\,[H(a_m)-\widehat{xyx}\,\{x=\varphi\}]=0,$$

pour chaque $$\varphi\,\varepsilon\left\langle -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

Définissons

(22) $$H\underset{df}{=}\sum_{m=1}^{\infty}H(a_m).$$

On a toujours

$$proj_{(\varphi)}\,H=\sum_{m=1}^{\infty}proj_{(\varphi)}\,H(a_m)$$

donc, pour $\varphi\,\varepsilon\left\langle -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right\rangle$, on a:

$$mes\ proj_{\varphi}\,H\geqslant mes\ proj_{\varphi}\,H(a_m)\geqslant 2a_m.$$

Ceci étant vraie pour $m=1,2,\dots$, on en tire la relation

$$mes\ proj_{\varphi}\,H\geqslant 2.$$

On a $H\subset C$ parce que $H(a_n)\subset C$.

On a donc $mes\ proj_{(\varphi)}\,H\leq 2$, d'où on obtient enfin $mes\ proj_{(\varphi)}\,H=2$ pour

(23) $$\varphi\,\varepsilon\left\langle -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

Je dis que

$$mes\ proj_{(\psi)}\,[H - \widehat{xyz}\,\{x=\psi\}] = 0$$

pour chaque nombre ψ appartenant à $\left\langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right\rangle$. En effet, en vertu de (22), on a l'indentité suivante:

$$H - \widehat{xyz}\,\{x=\psi\} = \sum_{m|1}^{\infty} [H(a_m) - \widehat{xyz}\,\{x=\psi\}],$$

d'où il suit:

$$mes\ proj_{(\psi)}\,[H - \widehat{xyz}\,\{x=\psi\}] \leq \sum_{m|1}^{\infty} mes\,proj_{(\psi)}[H(a_m) - \widehat{xyz}\{x=\psi\}] = 0.$$

Cela posé, définissons:

(25) $$E_\varphi \underset{df}{} proj_{0yz}\,[H\,\widehat{xyz}\,\{x=\varphi\}]$$

pour $-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

§ 7. On obtient ainsi une classe indénombrable d'ensembles se trouvant dans le cercle $y^2+z^2 \leq 0$, $x=0$ et jouissant des propriétés suivantes:

1) $mes\ proj_\psi \sum_\varphi E_\varphi = 2$ pour chaque

$$\psi\ \varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

la sommation étant étendue à tous les φ, où

$$\varphi\ \varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

2) $mes\ proj_\psi \sum_{\varphi \neq \psi} E_\varphi = 0$ pour chaque

$$\psi\ \varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle,$$

la sommation étant étendue à tous les φ situés dans $\left\langle -\frac{\pi}{4}. \frac{\pi}{4}\right\rangle$ et différents de ψ.

La première propriété résulte de l'identité:

$$proj_\psi \sum_\varphi E_\varphi = proj_{(\psi)}\,H$$

et la deuxième est une conséquence des identités suivantes

$$\sum_{\varphi \neq \psi} E_\varphi = proj_{0yz}\,[H - \widehat{xyz}\,\{x=\psi\}].$$

$$proj_\varphi\ proj_{0yz}\ M = proj_{(\varphi)} M \quad \text{pour chaque ensemble } M.$$

La classe $\{E_\varphi\}$ d'ensembles, que nous venons d'obtenir, va nous servir pour le point de départ pour la deuxième partie de raisonnement, qui sera d'un caractère un peu différent. En restant sur le plan $0yz$, faisons des projections obliques sur l'axe $0y$, des différents ensembles E_φ.

On démontre aisément que, pour des projections obliques considérées, on a

(4) $$mes\ proj_{0y}^{\psi+\frac{\pi}{2}} \sum_\varphi E_\varphi = \frac{2}{\cos\psi}.$$

(5) $$mes\ proj_{0y}^{\psi+\frac{\pi}{2}} \sum_{\varphi \neq \psi} E_\varphi = 0,$$

pour tous les nombres ψ, situés dans l'intervalle

$$\left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle.$$

Nous avons ainsi obtenu, dans le plan $0yz$, une configuration composée du cercle K:

(6) $$x=0,\quad y^2+z^2 \leqslant 1,$$

des ensembles E_φ, $\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ y situés, des faisceaux F_φ de droites:

(7) $$x=0,\ y\cos\varphi + z\sin\varphi - c = 0$$

où $$|c| \leqslant 1$$

et de l'axe $0y$. [On emploie ces droites, en faisant la projection oblique du cercle K:

(8) $$proj_{0y}^{\varphi+\frac{\pi}{2}} K].$$

Ayant cette configuration, en faisons la projection *centrale* sur le plan $0xy$, au moyen des rayons partant du point fixe T:

(9) $$T:\quad x=z=2,\quad y=0.$$

Cette projection produit une corespondance entre les éléments mentionnés plus haut de la configuration considérée et les éléments correspondants, situés dans le plan $0xy$. Dans la suite nous emploierons le signe „$*$" pour désigner des éléments correspondants aux différents éléments de la dite configuration.

On voit qu'au cercle K correspond une ellipse K^* et aux ensembles E_φ correspondent les ensembles E_φ^*, situés dans cette ellipse.

Cherchons, quel est l'image du faisceau F_φ (voir (7)). Les équations (7) équivalent à:

(10) $$x=0,\ y=-z\,tg\,\varphi+\frac{c}{\cos\varphi},$$

puisque $\cos\varphi \neq 0$, d'après la supposition
$$-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}.$$

Le nombre

(11) $$\frac{c}{\cos\varphi}$$

est égal à la coordonnée y du point d'intersection de la droite (10) avec l'axe $0y$.

On voit, que le faisceau F_φ de droites parallèles se transforme en un faisceau de droites passant par le point

(12) $$T_{\varphi+\frac{\pi}{2}},$$

dont les coordonnées sont:

(13) $$x=2,\ y=2\,tg\,\varphi,\ z=0.$$

Donc, à la droite (10) corresponde la droite, qui joint le point $T_{\varphi+\frac{\pi}{2}}$ avec le point:
$$x=0,\ y=\frac{c}{\cos\varphi},\ z=0.$$

On obtient ainsi la droite:
$$y-\frac{c}{\cos\varphi}=\frac{2\,tg\,\varphi-\frac{c}{\cos\varphi}}{2-0}(x-0)$$
$$y-\frac{c}{\cos\varphi}=\left(tg\,\varphi-\frac{c}{2\cos\varphi}\right)x$$

(14) $$\left|\begin{array}{l} y\,.\,2\cos\varphi+x\,(c-2\sin\varphi)-2c=0 \\ z=0,\quad |c|\leqslant 1. \end{array}\right.$$

Les droites (14) ferment précisément le faisceau F_φ^*; elles remplissent un angle, dont les bras sont:

(15) $$2y\cos\varphi+x\,(\pm 1-2\sin\varphi)\mp 2=0,\quad z=0.$$

Il s'ensuit que la projection oblique et parallèle
$$proj_{0_y}^{\varphi+\frac{\pi}{2}} E_{\varphi'}$$
dans le plan $0yz$, se transforme en une projection centrale, à savoir
$$proj_{0_y}^{(T_{\varphi+\frac{\pi}{2}})}(E_{\varphi'}^*)$$
sur la même droite $0y$, cette projection étant produite par des droites du faisceau F^*

On voit que

(16) $$proj_{0_y}^{\varphi+\frac{\pi}{2}} E_{\varphi'} = proj_{0_y}^{(T_{\varphi+\frac{\pi}{2}})}(E_{\varphi'}^*)$$

donc, d'après (4) et (5):

(17) $$mes\ proj_{0_y}^{(T_{\varphi+\frac{\pi}{2}})}\sum_{\varphi'} E_{\varphi'}^* = \frac{2}{\cos\varphi}$$

et

(18) $$mes\ proj_{0_y}^{(T_{\varphi+\frac{\pi}{2}})}\sum_{\varphi'\neq\varphi} E_{\varphi'}^* = 0$$

pour tous les φ et $\varphi' \,\varepsilon \left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle$.

Remarquons, ce qui sera important dans le suite, à savoir que l'ensemble

(19) $$proj_{0_y}^{(T_{\varphi+\frac{\pi}{2}})}\sum_{\varphi'} E_{\varphi'}^*,$$

se trouve dans un segment fermé, dont la mesure est précisément égale à la mesure de l'ensemble (19). Cela résulte du fait que:
$$proj_{0_y}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\sum_{\varphi'} E_{\varphi'} \subset proj_{0_y}^{\varphi+\frac{\pi}{2}} K,$$
et l'ensemble du second membre est un intervalle fermé de longueur $\frac{2}{\cos\varphi}$.

On peut dire brièvement que „l'ensemble (19) est *de mesure pleine*", pour exprimer la propriété dont on vient de parler.

Ceci posé, appliquons à la configuration, obtenue dans le plan $0xy$, la transformation *polaire* Φ par rapport au cercle K_1:

(20) $$K_1:\ (x-2)^2+(y+4)^2=1,\quad z=0;$$

c'est-à-dire, faisons correspondre au chaque point A du plan Oxy:

(21) $$(x_1, y_1, z_1 = 0) \quad \text{où} \quad (x_2, y_2) \neq (2, -4)$$

la droite Φ *pro* A:

(22) $$(x-2)(x_1-2)+(y+4)(y_1+4)=1,$$

et à chaque droite l: $ax+by+c=0$, ne passant pas par le point $(2,-4)$, faisons correspondre le point Φ *pro* l:

(23) $$\xi = 2+\frac{a}{-(2a-4b+c)}, \quad \eta = -4+\frac{b}{-(2a-4b+c)}.$$

Voyons ce qui se produit par la transformation Φ, si l'on l'applique à notre configuration.

Remarquons d'abord qu'aucune droite du faisceau F^*_φ ne passe jamais par le centre $(2,-4)$ du cercle K_1. En effet, les équations de ces droites sont d'après (14):

$$y \cdot 2\cos\varphi + x(c-2\sin\varphi) - 2c = 0 \atop |c| \leq 1,$$

donc, si l'on prend pour x et y respectivement les valeurs $2, -4$ on obtient la valeur

$$-8\cos\varphi + 2(c-2\sin\varphi) - 2c =$$
$$= -8\cos\varphi - 4\sin\varphi = -4\,[2\cos\varphi + \sin\varphi],$$

qui n'est jamais $=0$, parce que dans le cas contraire, on obtiendrait la relation

$$tg\,\varphi = -2,$$

ce qui est impossible, puisque $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$.

Il s'ensuit que pour chaque droite l des faiseaux F^*_φ considérés, le symbole Φ *pro* l a un sens précis.

On peut aussi démontrer que l'ellipse K^* n'a pas de points communs avec K_1. On en déduit que l'ensemble de droites Φ *pro* E^*_φ est complétement déterminé.

Au point $T_{\varphi+\frac{\pi}{2}}$, dont les coordonnées sont (13)

$$x=2, \quad y = 2\,tg\,\varphi,$$

correspond la droite:

(24) $$t_{\varphi+\frac{\pi}{2}} \overline{\overline{{}_{df}}}\ \Phi \text{ pro } T_{\varphi+\frac{\pi}{2}},$$

dont l'équation est:

(25) $$y = \frac{1}{2\,tg\,\varphi + 4} - 4.$$

On voit que les droites $t_{\varphi+\frac{\pi}{2}}$, pour $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, remplissent la bande:

(26) $$\widehat{xy}\{-4+\tfrac{1}{6} \leqslant y \leqslant -4+\tfrac{1}{2}\}$$

et sont parallèles à l'axe Ox. On voit aussi que la correspondance ainsi obtenue entre les nombre φ, où $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, et les ordonnées des droites correspondantes $t_{\varphi+\frac{\pi}{2}}$ est biunivoque et bicontinue.

Au faisceau F^*_φ de droites correspond, d'après (14) et (23), l'ensemble de points (ξ, η), où:

(27) $$\left\{\begin{array}{l} \xi = 2 + \dfrac{2\sin\varphi - c}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi} \\[2ex] \eta = -4 + \dfrac{1}{2\,tg\,\varphi + 4} \\[2ex] -1 \leqslant c \leq +1 \end{array}\right\}$$

Donc, si c varie dans l'intervalle $<-1, +1>$, ξ varie de

(28) $$2+\frac{2\sin\varphi+1}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi} \quad \text{à} \quad 2+\frac{2\sin\varphi - 1}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi},$$

de sorte que le point (ξ, η) décrit un segment rectiligne fermé.

Nous avons donc

(29) $$\Phi \text{ pro } F^*_\varphi = \widehat{xy}\left\{\begin{array}{c} y = -4 + \dfrac{1}{2\,tg\,\varphi + 4} \\[2ex] 2+\dfrac{2\sin\varphi+1}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi} \leq x \leq 2 + \dfrac{2\sin\varphi - 1}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi} \end{array}\right\}.$$

La différence de ces quantités:

$$f(\varphi) \overline{\overline{{}_{df}}}\ \frac{2}{-4\sin\varphi - 8\cos\varphi}$$

n'est jamais 0, d'où en raison de continuité, cette fonction est toujours <0 dans $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{4}$ et sa valeur absolue dans cet intervalle est supérieure à une quantité positive fixe. Si l'on désigne par η_φ l'ordonnée de la droite $t_{\varphi+\frac{\pi}{2}}$, on voit que la quantité $f(\varphi)$, considérée comme une fonction continue de η_φ, a une valeur absolue supérieure à un nombre positif fixe (voir (26)).

Donc, l'ensemble de points [1]):

(31) $$\sum_\varphi \Phi\, pro\, F_\varphi^*$$

possède des points intérieurs.

Définissons

(32) $$e_\varphi \underset{\overline{df}}{=} \Phi\, pro\, E_\varphi^* \text{ pour } |\varphi| \leq \frac{\pi}{4};$$

e_φ est un ensemble de droites.

Désignons par

(33) $$\{l_\varphi\}_\psi$$

l'ensemble de toutes les droites du faisceau F_ψ^*, qui contiennent au moins un point de l'ensemble E_φ^*. Ce sont précisément ces droites (dudit faisceau), dont on doit faire usage, en effectuant la projection: $proj_{0_\psi}^{(T_{\psi+\frac{\pi}{2}})} E_\varphi^*$.

Définissons

(24) $$\{L_\varphi\}_\psi \underset{\overline{df}}{=} \Phi\, pro\, \{l_\varphi\}_\psi .$$

Cet ensemble, dont les éléments sont des points, se trouve dans le segment (29) $\Phi\, pro\, F_\psi^*$ et se compose de points d'intersection des droites, appartenant à e_φ, avec la droite $t_{\psi+\frac{\pi}{2}}$. D'après une remarque faite plus haut, l'ensemble

$$proj_{0_\psi}^{\psi+\frac{\pi}{2}} \sum_\varphi E_\varphi^*$$

est de mesure pleine. Donc le faisceau $\sum_\varphi \{l_\varphi\}_\psi$ (pour ψ fixe) est un faisceau de droites partant du point $T_{\psi+\frac{\pi}{2}}$ et passant par les points d'un ensemble de mesure pleine. Par conséquent l'ensemble:

(25) $$\Phi\, pro \sum_\varphi \{l_\varphi\}_\psi = \sum_\varphi \Phi\, pro\, \{l_\varphi\}_\psi = \sum_\varphi \{L_\varphi\}_\psi$$

[1]) c'est à dire l'ensemble de points correspondants aux rayons employés pour les projections des différents points du cercle K.

est un ensemble de mesure pleine et on a:

(26) $$mes \sum_\varphi \{L_\varphi\}_\psi = mes\, [\Phi\, pro\, F_\varphi^*],$$

car on sait que

(27) $$\sum_\varphi \{L_\varphi\}_\psi \subset \Phi\, pro\, F_\varphi^* .$$

D'une façon analogue, on a

(28) $$mes \sum_{\varphi \neq \psi} \{L_\varphi\}_\psi = 0,$$

parce que

$$mes\, proj_{0_\psi}^{\psi+\frac{\pi}{2}} \sum_{\varphi \neq \psi} E_\varphi^* = 0$$

et

$$\Phi\, pro \sum_{\varphi\neq\psi} \{l_\varphi\}_\psi = \sum_{\varphi\neq\psi} \Phi\, pro\, \{l_\varphi\}_\psi = \sum_{\varphi\neq\psi} \{L_\varphi\}_\psi .$$

Définissons:

(29) $$M_\psi \underset{\overline{df}}{=} \{L_\psi\}_\psi - \sum_{\varphi\neq\psi} \{L_\varphi\}_\psi,$$

la sommation étant étendue à tous les φ appartenant à $\left\langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\rangle$ et différents de ψ.

L'ensemble

$$\sum_\varphi \{L_\varphi\}_\psi = \{L_\psi\}_\psi + \sum_{\varphi\neq\psi} \{L_\varphi\}_\psi$$

est de mesure pleine, donc, le deuxième terme du second membre étant de mesure 0 d'après (28), l'ensemble $\{L_\psi\}_\psi$ est de mesure pleine:

(30) $$\begin{cases} mes\, \{L_\psi\}_\psi = mes\, [\Phi\, pro\, F_\psi^*] \\ \{L_\psi\}_\psi \subset \Phi\, pro\, F_\psi^* . \end{cases}$$

On en déduit que M_ψ est de mesure pleine:

(31) $$\begin{cases} mes\, M_\psi = mes\, [\Phi\, pro\, F_\psi^*] \\ M_\psi \subset \Phi\, pro\, F_\psi^* . \end{cases}$$

Envisageons les droites de l'ensemble

$$\sum_{\varphi} e_{\varphi}, \tag{32}$$

passant par les points de M_{ψ}.

Je dis que

I. si $A \varepsilon M_{\psi}$, il existe au moins une droite de l'ensemble (32) passant par A.

En effet, soit $A \varepsilon M_{\psi}$; on a d'après (29)

$$A \varepsilon \{L_{\psi}\}_{\psi}. \tag{33}$$

L'ensemble $\{L_{\psi}\}_{\psi}$ c'est précisément l'ensemble de points d'intersection des droites de l'ensemble e_{ψ} par la droite $t_{\psi+\frac{\pi}{2}}$; donc il existe une droite de l'ensemble (32) passant par A.

Démontrons maintenant que

II. si $A \varepsilon M_{\psi}$ et $l \varepsilon \sum\limits_{\varphi} e_{\varphi}$, on a nécessairement: $l \varepsilon e_{\psi}$, et l n'appartient pas à $e_{\varphi'}$, si $\varphi' \neq \psi$.

En effet, soit

$$A \varepsilon M_{\psi}, \quad l \varepsilon \sum_{\varphi} e_{\varphi}, \quad A \varepsilon \, ens \, l. \tag{34}$$

Supposons qu'il existe un nombre φ', tel que

$$\varphi' \neq \psi, \quad l \varepsilon e_{\varphi'}. \tag{35}$$

D'après (29)

$$A \varepsilon \{L_{\psi}\}_{\psi} \tag{36}$$

et

$$A \, non \, \varepsilon \{L_{\varphi'}\}_{\psi}. \tag{37}$$

L'ensemble $\{L_{\varphi}\}_{\psi}$ se compose de points d'intersection des droites de l'ensemble e_{φ} par la droite $t_{\psi+\frac{\pi}{2}}$. D'après (34) et (35) on a:

$$A \varepsilon \, ens \, l, \quad l \varepsilon e_{\varphi'}; \tag{38}$$

outre cela, on a $A \varepsilon \, ens \, t_{\psi+\frac{\pi}{2}}$, puisque (38).

Par conséquent:

$$A \varepsilon \, ens \, l \, . \, ens \, t_{\psi+\frac{\pi}{2}},$$

d'où $A \varepsilon \{L_{\varphi'}\}_{\psi}$, ce qui est en contradiction avec (37).

On a donc démontré que, si $A \varepsilon M_{\psi}$, $A \varepsilon \, ens \, l$, et $l \varepsilon \sum\limits_{\varphi} e_{\varphi}$, il s'ensuit que $l \, non \, \varepsilon e_{\varphi}$ pour $\varphi \neq \psi$.

Mais on a supposé que $l \varepsilon \sum\limits_{\varphi} e_{\varphi}$. Il en résulte que $l \varepsilon e_{\psi}$.

III. Si $A \varepsilon M_{\psi}$, $\psi \neq \psi'$, $B \varepsilon M_{\psi'}$ et si l est une droite, telle que

$$A \varepsilon \, ens \, l, \quad l \varepsilon \sum_{\varphi} e_{\varphi},$$

il s'ensuit que:

$$B \, non \, \varepsilon \, ens \, l.$$

En effet, supposons les hypothèses vérifiées.

On a, en vertu de II:

$$l \, non \, \varepsilon e_{\psi'}.$$

Si l'on avait $B \varepsilon \, ens \, l$, on en déduirait, d'après II, que

$$l \varepsilon e_{\psi'}$$

ce qui est en contradiction avec ce que nous venons d'obtenir.

IV. Si $A \varepsilon M_{\psi}$, il existe une droite l, passant par A et telle que:

$$\mathrm{I}\, A = ens \, l \, . \sum_{\varphi} M_{\varphi} \text{ [1]}.$$

En effet, d'après I, il existe une droite l satisfaisant aux conditions:

$$l \varepsilon \sum_{\varphi} e_{\varphi}, \quad A \varepsilon \, ens \, l.$$

Soit l une telle droite. On a:

$$ens \, l \, . \sum_{\varphi} M_{\varphi} = ens \, l \, . M_{\psi} + ens \, l \, . \sum_{\varphi \neq \psi} M_{\varphi}. \tag{39}$$

Je dis que le deuxième terme du second membre est un ensemble vide.

En effet, supposons que

$$B \varepsilon \, ens \, l \, . \sum_{\varphi \neq \psi} M_{\varphi};$$

il existe un nombre φ', tel que

$$\varphi' \neq \psi, \quad B \varepsilon M_{\varphi'}.$$

Donc on a:

$$\varphi' \neq \psi, \quad B \varepsilon M_{\varphi'}, \quad B \varepsilon \, ens \, l, \quad A \varepsilon M_{\psi}, \quad l \varepsilon \sum_{\varphi} e_{\varphi},$$

d'où, en vertu de III, on tire:

$$A \, non \, \varepsilon \, ens \, l,$$

ce qui est impossible.

[1]) I A veut signifier l'ensemble composé d'un seul point A.

On a donc:

$$ens\, l . \sum_{\varphi \neq \psi} M_\varphi = 0,$$

d'où, d'après (39):

$$ens\, l . \sum_\varphi M_\varphi = ens\, l . M_\psi \subset ens\, l . ens\, t_{\psi+\frac{\pi}{2}},$$

c'est-à-dire, $ens\, l . \sum_\varphi M_\varphi = \mathrm{I}\, A.$ c. q. f. d.

On en tire une conséquence importante:

Si

$$A \,\varepsilon \sum_\varphi M_\varphi,$$

il existe une droite l, telle que:

$$ens\, l . \sum_\varphi M_\varphi = \mathrm{I}\, A. \tag{40}$$

L'ensemble $\sum_\varphi M_\varphi$ est un ensemble plan. On sait déjà que

$$\left| \begin{array}{c} M_\varphi \subset \Phi\ pro\ F^*_\varphi \quad \text{et} \\ mes\ M_\varphi = mes\,(\Phi\ pro\ F^*_\varphi). \end{array} \right. \tag{41}$$

Outre cela, on sait que l'ensemble

$$\sum_\varphi [\Phi\ pro\ F^*_\varphi] \tag{42}$$

contient des points intérieurs.

Il existe donc un carré:

$$N \underset{df}{=} \widehat{xy} \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 - \tau \leq x \leq \xi_0 + \tau \\ \eta_0 - \tau \leq y \leq \eta_0 + \tau \end{array} \right\}, \tag{43}$$

qui est contenu dans l'ensemble (42).

D'après ce qu'on a dit plus haut ((41) et (26)), on voit que l'ensemble

$$R \underset{df}{=} N . \sum_\varphi M_\varphi$$

jouit de la propriété suivante:

Si

$$\eta_0 - \tau \leq y_1 \leq \eta_0 + \tau,$$

l'ensemble

$$R . \widehat{xy}\, \{y = y_1\}$$

est de mesure pleine. Donc la mesure superficielle de l'ensemble R est égale à la mesure du carré (43).

En outre, pour chaque point A de l'ensemble R, on peut trouver une droite l, telle que

$$R\, ens\, l = \mathrm{I}\, A.$$

Si l'on y applique la translation

$$x' = x - \xi_0, \quad y' = y - \eta_0$$

et ensuite la transformation:

$$x'' = \frac{1}{2\tau} x', \quad y'' = \frac{1}{2\tau} y',$$

on obtient un ensemble R'', qui jouit des propriétés suivantes:

1. R'' est situé dans un carré de côté égal à un.
2. la mesure superficielle de l'ensemble R'' est $= 1$.
4. pour chaque point A de l'ensemble R'' il existe une droite, qui n'a avec R'' que le seul point A commun.

Le problème de M. S. Banach est ainsi résolu par négatif, parce que tout ensemble ayant la mesure positive, contient un ensemble fermé de mesure positive.

Le résultat obtenu peut s'exprimer d'une manière, qui semble d'être tout à fait paradoxale.

A savoir, on a obtenu *un ensemble Π de droites coupant le carré et tel qu'on peut enlever de chaque droite de Π seulement un point de manière que l'ensemble de points restants forme dans le carré un ensemble de mesure nulle, tandis que les points enlévés forment un ensemble de mesure pleine.*

On peut se poser la question analogue pour le plan entier: Existe-t-il un ensemble Π_1 de droites tel qu'on peut enlever de chaque droite de Π_1 un seul point, de sorte que ces points recouvrent le plan entier à un ensemble de mesure nulle près?

Nous n'insistons pas sur ce problème.

Note [1]).

M. S. Banach a proposé, (dans une lettre) à résoudre le problème suivant, concernant les ensembles plans. *L'ensemble E étant supposé mesurable (L), peut on affirmer que l'équation*

$$lim \frac{mes\,(R_P . E)}{mes\, R_P} = 1 \tag{1}$$

[1]) de M. A. Zygmund.

subsiste pour presque tous les points P de l'ensemble E, R_P désignant ici des rectangles centrés en P, leurs diamètres tendant vers 0?

M. Zygmund a bien voulu me communiquer que l'exemple construit ci-dessus permet d'y donner la réponse négative. En effet on remarque que, si E est un ensemble fermé et si P est un point de E, tel qu'on peut trouver un segment (B', B) ouvert et satisfaisant aux conditions

$$P \varepsilon (B', B), \quad (B', B) . E = \mathrm{I} P,$$

l'équation (1) peut être en défaut, parce qu'on peut aisément construire une suite infinie $\{R_n\}$ de rectangles, centrés en P, et tels que

1) leurs diamètres tendent vers 0.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{mes\,(E . R_n)}{mes\, R_n} = 0.$

Envisageons donc un sous-ensemble F fermé de l'ensemble R'' (p. 167), de sorte que $mes\, F > 0$. Tout point de F est accessible par des lignes droites illimitées. D'après ce qui précède, aucun point de F ne possède la propriété exprimée par l'équation (1).

La réponse négative ci-dessus contient la résolution d'un problème semblable au problème de M. C. Carathéodory, concernant le théorème de M. Vitali[1]). Cette question a été résolue[2]) pour la première fois par M. Banach[3]).

[1]) *C. Carathéodory.* Vorlesungen über reelle Funktionen 1918, p. 304 (en bas de page). Le problème de M. Carathéodory suppose que les côtés des rectangles soient parallèles aux axes du système de coordonnées, tandis que le problème, dont on parle, ne le suppose pas.

[2]) *S. Banach.* Sur le théorème de M. Vitali. *Fund. Math. T. V*, p. 130—136.

[3]) M. S. Saks propose d'étudier le problème de M. Banach (considéré dans la note ci-dessus), en supposant que les côtés des rectangles soient parallèles aux axes du système des coordonnées.

Sur une propriété caractéristique des ensembles analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans son Mémoire „*Sur les ensembles analytiques*“ [1]) M. N. Lusin a démontré que, lorsqu'on néglige un ensemble énumérable de points, tout ensemble analytique peut être regardé comme ensemble de valeurs d'une fonction $f(t)$ continue dans $(0 \leqslant t < 1)$ du côté droit en chaque point t.

Le but de cette Note est de démontrer que le théorème de M. Lusin subsiste même sans négliger un ensemble énumérable de points: nous pouverons notamment ce

Théorème: *Tout ensemble (A) linéaire peut être regardé comme ensemble de valeurs d'une fonction $f(t)$ continue dans $(0 < t \leq 1)$ du côté gauche en chaque point t* [2]).

Nous partirons de la définition des ensembles (A) (analytiques) au moyen des systèmes déterminants [3]). Soit E un ensemble (A) lineaire donné. Il existe donc un système déterminant d'intervalles fermés $\{\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, dont le noyau est E, c'est-à-dire

$$E = \sum \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \cdots, \tag{1}$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, t. X, p. 12—15.

[2]) il suffirait évidemment de poser $\varphi(t) = f(1-t)$ pour obtenir une fonction continue du côté droit dans $(0 \leqslant t < 1)$, dont l'ensemble de valeurs est l'ensemble (A) considéré.

[3]) V. p. e. *Fund. Math.* t. VIII, p. 362.